Russell paradoxon szögekkel és spárgákkal

András Ferenc 1988 – 2008

Bertrand Russell a XX. Század elején megcáfolta azt a feltevést, hogy minden α tulajdonságra van olyan halmaz amelynek azok és csak azok az elemei, melyekre igaz α tulajdonság. A bizonyításhoz felhasználta az „önmagának eleme” tulajdonságot. Hogy jól megértsük a feltevést és a bizonyítás lényegét, bemutatok egy szemléletes példát. Az érthetőség kedvéért a bizonyítást, a lényeget nem érintő mértékben, módosítottam. A példával amellett kívánok érvelni, hogy filozófiai szempontból én miért a „részhalmaz axióma” alapján kidolgozott megoldást tartom meggyőzőnek az ellentmondás elhárítására, bár tudom más megoldások is vannak. A másik hasonlóan fontos célom az, hogy megmutassam a részhalmaz axióma tartalmazza Tarski igazság koncepcióját.[1]

A halmazok a magyarázatok céljától függően többféle módon is ábrázolhatók. Egy ilyen ábrázolás minden esetben szükségszerűen töredékes, mivel a halmazelmélet axiomatikus felépítésében, ha csak az üres halmaz létét feltételezzük, már abból is végtelen sok egyéb halmaz léte következik. Ennek ellenére szemléletességük folytán hasznosak a halmazok geometriai alakzatokkal való ábrázolásai, mint egy elképzelt végtelen rendszer töredékes megjelenítései. Néhány egyszerű halmazelméleti állítás jól illusztrálható körökkel – Venn diagramokkal – vagy más síkidomokkal, de ilyen módon nem ábrázolható, hogy egy halmaz eleme önmagának. Ezért egy más megoldást választok, olyat, amelyik jól illusztrálja a probléma természetét. Képzeljük el a hazai klubok klubját. Ha a klubokat egy-egy betűvel jelenítjük meg a szövegben, akkor tekinthetjük a klubok klubját olyan halmaznak, amelynek elemei a klubokat jelképező betűk, és még a klubok klubját jelképező betű is az eleme a halmaznak, azaz önmagának. Ez a halmaz állóképet mutat a klubokról, nem képes ábrázolni, hogy egy klub, vagy akár maga a klubok klubja megszűnik. De ahogy a fényképek is hasznosak a mozgó filmek mellett, úgy ez az egyszerű ábrázolás is hasznos abból a célból, hogy rávilágít, nem merő abszurditás föltételezni, hogy egy halmaz eleme saját magának. Az ábrázolásban képzeletben még tovább megyek. A halmazokat és elemeiket szögekkel, halmazok és elemeik között fennálló „eleme” relációt pedig irányított spárgákkal jelenítem meg. Az összekötéseknek meg van jelölve az eleje és vége. Az írott szövegben nyilakkal ábrázolom az összekötéseket, és betűkkel a szögeket.

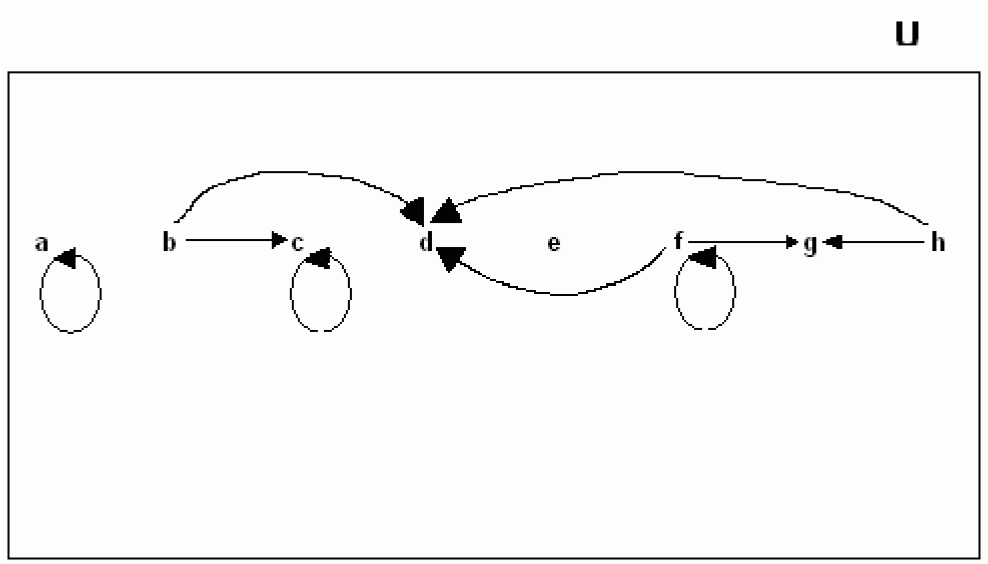
Az eredeti paradoxon levezethető egy axiómából, a mostani magyarázatban azonban ennek helyén, ennek a céljára nem állítás, hanem egy feladat szerepel. Világítsa meg ezt egy egyszerű példa. Az egész számok halmazán legyen a páros számok definíciója a következő:

Egy egész szám akkor és csak akkor páros, ha maradék nélkül osztható kettővel.

Ebben a meghatározásban egy feltételt adunk meg, és ha a feltétel teljesül, akkor a szám páros, ha nem teljesül, akkor nem páros. A definíció kettéosztja a egész számok halmazát párosokra és nem párosokra, és miden egész szám beletartozik a két halmaz közül az egyikbe, de csak az egyikbe. Ha vizsgálódásunkat az egész számokon belül véges sok számra korlátozzuk, akkor ezt a szétválasztást egy feladattal is végrehajthatjuk. Vesszük egyenként a megvizsgálandó számokat, mindegyiket elosztjuk kettővel, és ha van maradék az egyik, ha nincs a másik halmazba helyezzük. Ilyen módon megfeleltettünk a „páros szám” fogalma definíciójának egy szabályt, egy utasítást, amely a definícióval ekvivalens módon fölosztást ad az egész számok bármely *véges* halmazán.

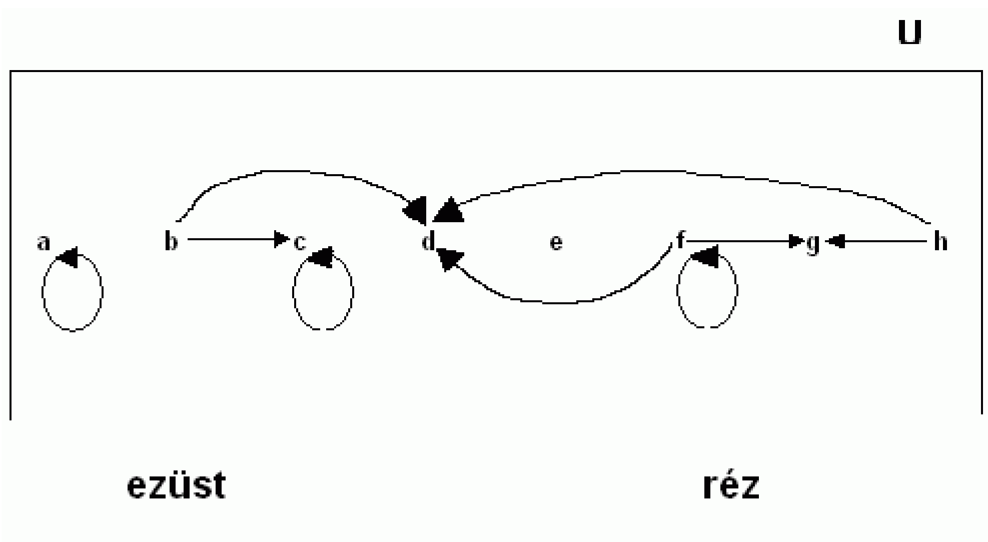
A ellentmondásra vezető feltevésnek ennek analógiájára egy feladatot fogok megfogalmazni. Miután megvizsgáltuk a feladatot, fordítva fogok eljárni: a feladatot fogom visszafordítani egy axiómára és nem fordítva, mint a „páros szám” esetén tettem. Látni fogjuk, hogy mi a különbség egy ellentmondásos feltételt tartalmazó feladat és egy paradox feladat között. Lássuk ezek után a példát!

Az első emeleten egy szobában vas szögek vannak kalapálva a padlóba. Néhány szög össze van kötve egymással vagy önmagával az alábbi módon:



Mint látható két szög között egy irányban legfeljebb egy összekötés van, és némelyik szögön van hurok, másikon pedig nincs. A feladat a következő: Kezünkbe adnak egy ezüst és egy réz szöget azzal a feladattal, hogy az előbbit kössük össze az összes olyan a szobában lévő szöggel amelyiken nincs hurok, de kiindul belőle spárga, míg az utóbbit az összes olyan szintén a szobában lévő szöggel, amin van hurok, és kiindul belőle spárga. Az új összekötéseknek mindig a réz vagy ezüst szögekből indulhatnak ki. A feladattal akkor vagyunk készen, ha elkészítettük az *egyetlen* helyes megoldást.

Ismét lerajzoltam az első emeletet, de most már az új szögekkel együtt. Oldjuk meg a feladatot, húzzuk be ceruzával a szükséges összekötéseket![2]



Az ezüst szöget nem kell össze kötni a *’d, e, g’* nevű szögekkel, mert nem indul ki belőlük zsineg, és nem kell összekötni az *’a, c, f’* szögekkel, mert hurok van rajtuk. Viszont a *’b, h’*. szögekkel össze kell kötni, mert azokon nincs hurok, de kiindul belőlük spárga. Könnyen belátható, hogy a réz szög esetén két megoldás is van. Ez is baj, hisz most nem tudjuk, hogy melyiket válasszuk.

A korábban említetteknek megfelelően a szögeket halmazok vagy elemeik, a spárgákat pedig az „eleme” reláció ábrázolásának tekintve a feladatnak megfelelő formulák következők.

(1) Minden x-re: $x \in \text{ezüst} \equiv (x \in U \ \& \ \exists y.y \in x \ \& \ x \notin x)$

(2) Minden x-re: $x \in \text{réz} \equiv (x \in U \ \& \ \exists y.y \in x \ \& \ x \in x)$

A formulákból ki lehet következtetni a megoldást. Ha az ezüst szöget a szobában kalapáljuk a padlóba, akkor az ennek megfelelő (3) formula így fest:

(3) $\text{ezüst} \in U$

(3) alapján (1)-ből és abból a tényből, hogy $b \in \text{ezüst}$ ez következik:

(4) $\text{ezüst} \in \text{ezüst} \equiv (\text{ezüst} \in U \ \& \ \text{ezüst} \notin \text{ezüst})$

Viszont (4)-ből az következik, hogy

(5) $\text{ezüst} \in U \supset (\text{ezüst} \in \text{ezüst} \equiv \text{ezüst} \notin \text{ezüst})$

Mivel az, hogy ’$\text{ezüst} \in \text{ezüst} \equiv \text{ezüst} \notin \text{ezüst}$’ logikai hamisság (ellentmondás), ezért a kondicionális előtagjának tagadására kell következtessünk, azaz arra, hogy $\text{ezüst} \notin U$, tehát az ezüst szög nem lehet a szobában. (Zermelo szerint az új szögek az első szinten is lehetnek csak a szobán kívül kell legyenek, viszont Russell szerint magát a feladatot is újra kell fogalmazni úgy, hogy mindig csak egy emelettel följebb lévő szögekből vezethetnek zsinegek az alattuk lévő szögekhez.) A feladat megoldásának kulcsa tehát az a kérdés, hogy hova kalapáljuk a réz és ezüst szöget? Ha az U szobán belül, akkor a feladat megoldhatatlan az ezüst szögre, és nem egyértelmű a réz szögre, ha viszont a két új szöget a szobán kívül helyezzük el, a feladat megoldható mindkét új szög esetén. Ha most az új a halmazt – amit esetünkben az ezüst vagy réz szög jelölt – egy általános H halmazzal, a szobát U halmazzal, a ’nem eleme önmagának’ feltételt pedig egy általánosabb F(x) formulával helyettesítjük, amelyik az elsőrendű logika valamely egyargumentumú nyitott mondata, akkor másodrendű logikai nyelvet használva megkapjuk a részhalmaz axiómát:

$$\forall F \forall U \exists H \forall x\, (x \in H \equiv (\, x \in U \,\&\, F(x)))$$ [3]

Most, hogy találtunk egy megoldást, érdemes végiggondolni más kivezető utakat is. Több is van, és ezek közül némelyik nem alkalmazható a halmazokra, csak a fenti szögeket tartalmazó példára. Lássuk hát az alternatív javaslatokat!

1: Kössük ki, hogy listával, felsorolással kell megadni a réz és ezüst szögek összekötéseit. Ez a megoldás csak véges sok elem esetén használható. Miért nem fordulhat elő ebben az esetben soha, hogy nem tudjuk megoldani a feladatot? Egyszerűsítsük le a feladatot amennyire csak lehet, legyen csak egyetlen szögünk, az ezüst szög, A kiinduló helyzetben ne legyen az ezüst szögön hurok. Legyen az a feladat, hogy kössük össze az ezüst szöget önmagával, ha nincs rajta hurok. Akkor vagyunk készen a feladattal, ha a végeredmény megfelel a feltételnek. Nagyon fontos az utóbbi megkötés. Ezen megkötés nélkül egy gép megvizsgálná az ezüst szöget, látná, hogy nincs rajta hurok, ezt a tényt összevetné a feltétellel, majd kikövetkeztetné, hogy hurkot kell kötni a szögre, rákötné a hurkot az ezüst szögre, és befejezné a feladat végrehajtását. A gép ugyanis teljesen mechanikusan gondolkozik. Csak nekünk embereknek ütne szöget a fejünkbe, hogy a feladat végrehajtásának eredményében valami hiba van. Egy gép ezt nem így értelmezi. Sorra veszi egyenként a feladat elemeit, végrehajtja azt ami a feltételből következik, és a következő objektumra lép, vagy befejezi a feladat végrehajtását. Ha azt akarjuk, hogy működése megfeleljen a józan észnek, akkor külön ki kell kössük, hogy minden egyes lépést ellenőrizzen, és ha hibát talál kezdje újra. Ekkor a gép, amikor az ezüst szöghöz ér végtelen ciklusba fog kerülni, és soha nem lesz képez befejezni a feladatot. Most visszatérhetünk annak a megfontolására, hogy miért nem fordulhat ez elő, ha listával vannak megadva a feltételek? A lista esetén nem kell az objektumok tulajdonságát vizsgálni, csak az azonosításukra van szükség. Az objektumok tulajdonságait hiába módosítaná esetleg a feladat végrehajtása, az nem befolyásolhatja a feladat lefutását, mert nincs hatással az előre megadott listára. Amikor viszont az objektumok tulajdonságaitól függ a feladat végrehajtásának minden egyes lépése, akkor baj származhat abból, ha a feladat végrehajtása közben az egyes lépések a saját feltételeikre is befolyással vannak. Nem okoz ez minden esetben megoldhatatlan feladatot, de okozhat. Amikor az imént lecsupaszítottuk a feladatot egyetlen szögre, akkor pontosan ez okozta a bajt. A szög azon tulajdonsága, ami meghatározta, hogy mit kell tenni, az ellentétére változott a végrehajtás során. Ezért ha az is követelmény, hogy a végrehajtás eredménye is feleljen meg a feltételnek, akkor a feladat megoldhatatlan.

A paradox helyzet elkerülésének *elegendő* feltétele, hogy kikötjük, a szabály (a feladat) szempontjából világosan el kell különíteni a kiinduló feltételeket az eredménytől. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a feladat, a szabály nem lehet befolyással a kiinduló állapotra. Ez a megkötés nem minden esetben szükséges. Vegyük ismét a leegyszerűsített feladatot! Legyen adott az ezüst szög, amin nincs hurok. A feladat az, hogy kössünk rá hurkot akkor és csak akkor, ha van rajta hurok. A feladat végrehajtható. Ha most nem kötünk hurkot az ezüst szögre, az megfelel a kikötésnek és a feladatot sikeresen befejeztük. Viszont hogyan értékeljünk egy olyan megoldást, ha valaki úgy oldaná meg ezt a feladatot, hogy mégis hurkot köt az ezüst szögre?

A két utóbbi példa ismét azt mutatja, hogy gondot okozhat egy feladat önmagára visszaható jellege. Mindazonáltal, számos olyan alkalmazás van, amikor egy automata kiindul egy kezdeti állapotból, végrehajtja az utasítást, majd az eredményt behelyettesíti a kezdeti állapotba, és újra kezdi. Egy ilyen folyamat sok esetben véges idő alatt befejeződik, ha nem is mindig. (Amikor nem fejeződik be, akkor is lehet hasznos, ha egy meghatározott eredmény felé tart.) Bizonyos esetekben csak látszólag az a helyzet, hogy egy feladat végrehajtása önmagára is visszahat. Pl.: A magyar nyelv nyelvtani szabályai kétségtelenül befolyással vannak azokra a magyar *mondatokra*, amelyeken a nyelvtani szabályokat megfogalmazták. Viszont ez egyáltalán nem jelenti azt, hogy magukra a *szabályokra* is befolyással volnának, hiszen rossz nyelvtannal és rossz helyesírással is meg lehet fogalmazni jó nyelvtani szabályokat, sőt akár más nyelven is meg lehet fogalmazni a magyar nyelvtan szabályait.

2: Készítsünk fényképfelvételt a szoba kezdeti állapotáról, és különböztessük ezt meg az eredménynek megfelelő állapottól. Ez a megoldás azért nem alkalmazható, mert a halmazok és elemeik közötti reláció független az időtől, nem az időben létezik.

3: Kössük ki, hogy az új szögekre soha nem kerül hurok. Az ennek megfelelő halmazelméleti feltevés így fest: $\forall F \exists y \forall x\ (y \notin y\ \&\ (x \neq y \supset (F(x) \equiv x \in y)))$

Azonban Quine kimutatta, hogy ez a feltevés ellentmondásra vezet.[4]

A feladatok, utasítások nyelve magában foglalja az állítások nyelvét. Utóbbi természete ebben az összefüggésben világosan megmutatkozik. Amiképp a fogalmak jelentése a mondatok összefüggésében, akképpen a kijelentések jelentése a tőlük függő utasítások összefüggésében nyilvánul meg. Tegyük fel, hogy az utasítások lépéssorozatában a következő elágazó utasítás feltétele egy p tényállást leíró kijelentés. Az egyik irányban folytatódik az utasítások sorozata ha p igaz, a másik irányban ha hamis, és megáll, tovább várakozik az utasítások végrehajtása , ha p nem értelmezhető. Hasonló a helyzet, ha nem tényállításról, hanem analitikus igazságról van szó. Ha egy utasítás végrehajtásának logikai ellentmondás a feltétele, akkor soha nem hajtjuk végre azt, ha logikai igazság, akkor minden körülmények között, feltétel nélkül végrehajtjuk, ha viszont paradoxon, akkor megállunk, nem tudjuk mit kell tennünk, elakadunk a feladat folytatásában, mert nem tudunk egyértelmű – időtlen – igazságértéket rendelni a feltételhez. A Russell által felfedezett ellentmondás esetén tudjuk mit kell tennünk, az előfeltevés tagadására kell következtessünk, arra, hogy nem igaz, hogy minden α tulajdonságra van olyan halmaz amelynek azok és csak azok az elemei, melyekre igaz α tulajdonság. Hasonlóképpen bizonyítható az is, hogy a halmazelmélet bizonyos axiomatikus fölépítéseiben nincs olyan halmaz, aminek bármely dolog az eleme, más szakavakkal, a halmazelmélet egy ilyen fölépítésében az univerzum nem halmaz. Nem öncél tehát az ellentmondások keresése, hanem arról való gondolkozás, hogy mi van.

A részhalmaz axióma alkalmazási körét kiterjesztve, ami mostani problémánk megoldásának a kulcsa, látható a kapcsolat a ’hazug’ és a Russell paradoxon között.

Legyen L_1 egy a klasszikus elsőrendű logikával kompatibilis nyelv. Legyenek P,Q halmazok L_1 nyelv mondat neveinek halmazai, és ρ egy olyan bijektív függvény, amely tetszőleges s mondat névhez magát a mondatot rendeli. A mondatok nevei legyenek egész-szám jelek, tehát P,Q elemei egész-szám jelek, Q elemei pozitív páratlan számjelek. Az L_1 nyelv leírására szolgáló szemantikai predikátumok nem részei L_1 nyelvnek, hanem egy nála gazdagabb L_2 nyelvnek melyet éppen most olvas, melyet L_1-hez képest 'metanyelv'-nek nevezek. L_2 része a közlési nyelnek. Az alábbi levezetés L_2 nyelven íródott, és a formulák mellé magyarázatokat írtam a közlési nyelven. Tehát az a mondat, hogy »A „hazug” típusú mondat nem lehet eleme semelyik P_1-nek, azaz nem lehet igaz vagy hamis mondata L_1 nyelvnek.« nem része a tárgynyelvnek, így nem forrása újabb ellentmondásnak (paradoxonnak).

(T*)$\forall\rho\forall P\exists Q\forall s\ (s\in Q \equiv (s\in P\ \&\ \rho(s)))$ Ez a részhalmaz axióma sajátos felfogásban. P szándékolt jelentése az igaz vagy hamis mondat nevek, Q jelentése pedig az igaz mondat nevek halmaza.

(2) $\forall P\exists Q\forall s\ (s\in Q \equiv (s\in P\ \&\ f(s)))$ (T*)

ρ egy értéke olyan f függvény, melynek értéke 7 argumentumra az „$7\notin I_2$” mondat. 7 a 'hazug' mondat egy reprezentánsa.

(3) $\exists Q\forall s\ (s\in Q \equiv (s\in P_1\ \&\ f(s)))$ P egy értéke P_1

(4) $\forall s\ (s\in I_1 \equiv (s\in P_1\ \&\ f(s)))$Feltesszük, hogy I_1 egy ilyen halmaz.

(5) $7\in I_1 \equiv (7\in P_1\ \&\ 7\notin I_2)$ ahol $f(7)\equiv 7\notin I_2$

(6) $7\in P_1 \supset (7\in I_1 \equiv 7\notin I_2)$ (5)

Ha feltesszük, hogy $7\in P_1$ – azaz a 'hazug' igaz vagy ’hamis’ mondat, olyan mondat amelyik előfordulhat igazságfüggvények argumentumában – és nincsenek nyelvi szintek és ezért egyetlen igazság van – tehát $I_1=I_2$ – akkor ellentmondásra jutunk. Mivel P_1 tetszőleges volt, ezért a „hazug” típusú mondat nem lehet eleme semelyik P_1-nek, azaz nem lehet igaz vagy hamis mondata L_1 nyelvnek.[5] Nincs tehát olyan mondat amelyik megfelel a hazug struktúrájának és a propozíciót kifejező mondatok osztályába tartozik. Az antinómia a hazug esetén is és a Russell paradoxon esetén is arról dönt, hogy mi van.

jegyzetek:

---

[1] Cikkem első változatát 1985-ban írtam. Ez egy 2008-as verzió. Felhasználtam a Catherine Z. Elgin-től 1990-ban kapott kritikai megjegyzéseket.
[2] Az ábrán a szögeket jelképező betűk egy síkidomon belül helyezkednek el. A síkidom jelen esetben egy téglalap melynek a neve U. Ez a téglalap egy halmazt, a benne lévő betűk a halmaz elemeit ábrázolják, ám ez az ábrázolás kifogásolható, mert eddig nyilakkal ábrázoltam a halmazhoz való tartozást. Ettől most ezért tértem el, mert így szemléletesebb és jobban érthető. Ha következetes maradtam volna, akkor az 'U' betűből kiinduló nyilakkal ábrázoltam volna most is az eleme relációt és nem egy geometriai viszonnyal.
[3] A ZF halmazelméletben mint axióma séma szerepel a részhalmaz axióma, és a regularitási (jólfundáltsági) axióma következtében nincsenek benne önmagukat tartalmazó halmazok.
[4] Quine, *Ferege's way out*. in Mind, April 1955, p.145-159 Quine tanulmányára annak idején Ruzsa Imre hívta föl a figyelmemet.
[5] V.ö. Ruzsa Imre szerkesztői kommentárját in: Alfred Tarski, Bizonyítás és igazság. Gondolat. Bp. 1990. p.77. Olvasva Quine "Truth and Disquotation" c. írását ezt a részt jelenleg hibásnak, pontatlannak tartom. Tarski elmélete nem pontosan ez.