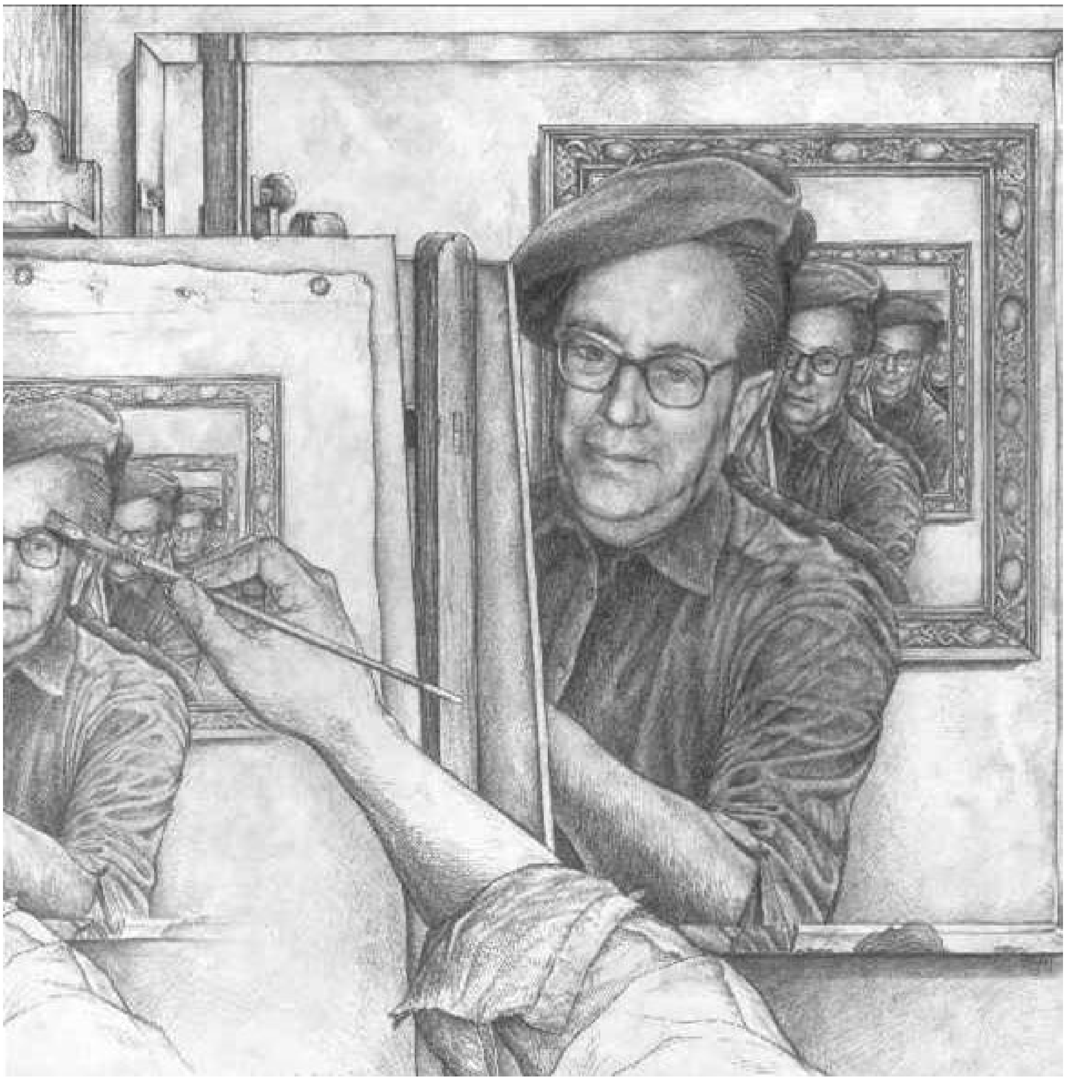
Logikai-filozófiai írások
kézirat

András Ferenc



Logikai-filozófiai írások

András Ferenc

2022. november 17.

A kézirat átnézéséért köszönettel tartozom Szurdoki Ferencnek.

Tartalomjegyzék

Előszó

A logikai empirizmusról szóló könyvében Tuboly Ádám Tamás idézi Carnap híres tolerancia elvét:

> *[A] tolerancia elve: Nem az a feladatunk, hogy tilalmakat vezessünk be, hanem az, hogy konvenciókat állítsunk fel.*[...] A logikában nincsenek lefektetett erkölcsök. Mindenki saját kívánsága szerint szabadon fölépítheti a saját logikáját, vagyis a saját nyelvformáját. Mindössze annyit várunk el, hogy amennyiben azt diszkusszió tárgyává kívánja tenni, akkor az eljárásait világosan meg kell fogalmaznia, és a filozófiai megfontolások [Erörterungen] helyett szintaktikai szabályokat kell adnia.(Logische Syntax der Sprache 1934) ...Ez a neutrális attitűd a nyelvek különböző filozófiai formái iránt, ami azon az elven alapult, hogy mindenki szabadon megválaszthatja a céljainak leginkább megfelelő nyelvet, mindvégig ugyanaz maradt az életem során. A *Logical Syntax*-ban [6]a tolerancia elveként fogalmaztam meg, és még ma is tartom, például a platonista vagy nominalista nyelveket érintő kortárs vitában. (Carnap Intellectual Autobiography 1963 in [29]) [31] p. 396 és 425

Carnap az „Empirizmus, szemantika és ontológia" c. tanulmánya végén is hasonló szellemben fogalmaz: „Legyünk óvatosak az állítások megtételében és kritikusak vizsgálatukban, de legyünk toleránsak a nyelvi formák megengedésében." [11] p.324

Nehéz ezzel vitatkozni, hiszen a nyelvi forma rögzítése egyfajta széles értelemben vett definíció, amiről pedig tudvalevő, hogy vitatkozni értelmetlenség. Ahogy azonban a definícióknak, épp úgy a formális nyelveknek, melyek a filozófiai érvelés céljára alkalmasak, meg kell felelniük bizonyos követelményeknek, hogy azok lehessenek amik. Nem lehet bármiféle nyelvhasználatot formális nyelvnek tekinteni – Carnapot nyilván a formális nyelvek érdeklik – és azon belül, csak bizonyos kritériumoknak megfelelő nyelveken fogalmazhatunk meg következtetéseket – kivéve, ha a 'következtetés' fogalmát teljesen parttalanná tesszük. E sorok írója többet is elvár. Követve Ruzsa Imre intencióit, egy formális nyelvet szemantikai interpretáció nélkül nem tekint logikának, sőt azon felül azt is elvárja, hogy minden fajta logika valamilyen értelemben magába foglalja a klasszikus logikát, akár csak mint egy alesetet. Az itt következő írások ezen a szemléleten alapulnak, és az utóbbi negyven évben keletkeztek. Az utolsó három írásom magyar verzióját nem találtam meg, addig amíg megtalálom, vagy lefordítom, az angol nyelvű verziót illesztettem be. A Russell paradoxonról és a szemantikai paradoxonokról még nyolcvanas években írtam, a Yablo paradoxonról a kettőezer-tíz körül. Amit a Russell paradoxonról mondok, az puszta illusztráció, azt próbálja szemléletessé tenni, hogy a ZF halmazelmélet miképpen eliminálja a Russell által fölfedezett ellentmondást. A halmazelmélet más konstrukciói másképp oldják meg a problémát, de a ZF halmazelmélet egyfajta kvázi szabványnak tekinthető. A szemantikai paradoxonok elektronikus modelljeit műszaki főiskolai tanulmányaim befolyásolták. Amikor megismerkedtem a matematikai logikával, a bevezető jellegű könyvek az igazságfüggvényeket bizonyos egyszerű digitális áramkörökkel illusztrálták. De a digitális áramkörök nagy része ennél jóval bonyolultabb, mert visszacsatolásokat tartalmaz. Az a kérdés foglalkoztatott, hogy ez utóbbiaknak is megfelel-e valami a filozófiai logikában vagy a logikával kapcsolatos problémák, kérdések körében? A Yablo paradoxonnal kapcsolatos írásaim bizonyos fejlődésen, átalakuláson mentek keresztül. Gondolatmenetem a vitázók azon csoportjához csatlakozik, akik szerint a paradoxon a látszat ellenére önreferenciális természetű. Ahogy én megfogalmazom a Yablo sorozatot az elsőrendű logika nyelvén, az lényegében azonos Thomas Forster megformulázásával.[9] A „miért"-ről fogalmazok meg egyéni álláspontot, arról, hogy miért hibás a Yablo sorozat meghatározása. Amit erről gondolok, az közel áll Laurence Goldstein diagnózisához [10]. A logikai levezetésekben Quine jelölését alkalmazom, ahogy az a "Logika módszerei" c. könyvében [26], [28] megjelenik. (Nem ismerek ennél jobbat.) A sorok nevei a bal oldalon található zárójelbe tett számok, az egyes lépések magyarázatai a sorok jobb oldalán találhatóak. A csillagok egy megkezdett új oszlopa, egy új premissza felvételét jelenti, a csillagok hiánya pedig értelemszerűen tételt jelent.

Az eredeti szövegek stílusán és szemléletén nem – vagy csak kisebb mértékben – változtattam, hiszen ez teljes újra fogalmazásukat, újra gondolásukat jelentette volna. Úgy gondolom, az alapgondolatok, a probléma felvetések most is érvényesek.

1. fejezet

I. magyar nyelvű szövegek

1.1. Modellek matematikán innen és túl

Anyagi modellek

Mint a legtöbb köznapi beszédben használt kifejezés, a 'modell' szó is a képlékeny, sokértelmű szavak közé tartozik.[1] Különféle dolgok különféle kapcsolatát fejezzük ki a 'modell' szó különféle használatával. A festő vagy szobrász és modellje közötti viszony ami rokon a mostani vizsgálódás irányával. Egy épülő városrész makettje és a majdan felépült város közötti kapcsolat, vagy egy hajómodell vagy modell vasút, és a hajó vagy mozdony közötti hasonlóság az a reláció ami kiindulópontul szolgál. A planetárium vagy a műanyag csontváz valamilyen szempontból hasonlít a Naprendszerhez illetve az emberi testhez, és az előbbiek vizsgálata sok szemponttól célszerűbb, vagy az egyedüli lehetőség, szemben az utóbbi dolgokéval. Például mielőtt a hajót megépítjük, a modellje segí tségével ellenőrizhetjük, hogy vajon úszni fog-e a vízen. Azon kívül megvizsgálhatjuk, hogy miképp módosítsuk kissé a hajótest formáját, hogy kisebb fogyasztással gyorsabban haladjon. A terepasztal segíthet megérteni a pályaudvar forgalomirányítását, a Planetárium pedig megmutathatja, hogy milyen égboltot láttak eleink kétezer évvel ezelőtt. A példákon látható, hogy miben és miért hasonlít a modell a valóságra. Vannak azonban nem szemléletes hasonlóságok is, melyek mégis fontosak. Ilyen például, hogy egy adott tömegű melegedő test viselkedése, vagy rugókból, tömegekből álló rezgő rendszer viselkedése hasonló, és ez alapján modellálható, ellenállások, kondenzátorok és induktivitások, valamint az elektromosságtan törvényeinek segítségével. Ennek a hasonlóságnak a belátása azon alapul, hogy a különféle fizikai jelenségeket leíró matematikai egyenletek struktúrája megegyezik. A megegyezés úgy látható be, hogy az elektromos és mechanikai vagy hőtani fizikai jellemzőket kölcsönösen egyértelműen megfeleltetünk egymásnak. Ilyen módon pusztán az elektromos jelenségek világán belül

[1] Eredeti megjelenés: Magyar Tudomány (2007. november): Modellek matematikán innen és túl

vizsgálódva előre látjuk a mechanikai vagy hőtani jelenségek lefolyását. Ez sokszor jóval olcsóbb és egyszerűbb, mint az eredeti mechanikai vagy melegedő rendszer tanulmányozása. Az utóbbi modellek már nem szemléletesek, és nem is érthetőek kellő matematikai műveltség nélkül.

Az eddigi példáknál a modellek, és azok amit modellálnak, egyaránt élőlények vagy élettelen tárgyak voltak. A 'modell' szónak van azonban fontos más értelmű használata is. Amikor arról tanulunk, hogy a klasszikus mechanika és a speciális relativitáselmélet egyaránt modellje az inercia rendszerekben történő mechanikai mozgásoknak, csak az utóbbi szélesebb sebességtartományban és pontosabban írja le az eseményeket, akkor itt fizikai elméleteket tekintenek modellnek, nem pedig kézzelfogható tárgyakat. Itt a modell egy szellemi alkotás, egy matematikai struktúra fizikai értelmezéssel ellátva, mint olyan eszköz, ami adott pontossággal segít előrelátni, hogy mi fog történni a valóságban. Itt tehát a modell és a modellezett közötti viszony, egy matematikai nyelven megfogalmazott elmélet – azaz jelek struktúrája – és a fizikai jelenségek egy köre – azaz a jeleken kívüli világ – közötti viszony. Ennek a viszonynak a fordítottját is használjuk. A számítógépekben és háztartási gépekben használt digitális automaták olyan áramköröket és kapcsoló rendszereket tartalmaznak, melyek közül némelyeket 'logikai áramkör'-nek neveznek. Az elnevezés alapja szintén egy hasonlóság. Ezek az áramkörök két kitüntetett állapot alapján működnek: magas és alacsony feszültségszint, illetve folyik vagy nem folyik áram. A kitüntetett állapotokat az igaz és hamis logikai értékeknek megfeleltetve működésük hű tükörképe a matematikai logikában használatos igazságfüggvényeknek, a bonyolultabbak pedig a matematika egyik ágának, a véges automaták elméletének. De nem csak a diszkrét állapotú áramkörök tekinthetők egyes matematikai struktúrák fizikai modelljeinek. Bonyolult differenciálegyenletek közelítő megoldását segítheti a matematikai egyenlet modellálása analóg számológépek segítségével. 2005 tavaszán nagy vita dúlt a HIX magyar nyelvű internetes fórumon arról, hogy az ilyen analóg eszközök számítógépnek tekinthetők-e? A mi szempontunkból ez most mindegy. Ami lényeges, hogy amikor analóg rendszereket matematikai problémák megoldásának a keresésére használunk, akkor fizikai rendszereket tekintünk úgy, mint elméleti problémák modelljeit. Ez a helyzet akkor is, ha valamely közgazdaságtani elméletet, vagy tanítási módszert kipróbálnak a gyakorlatban, mielőtt széleskörűen bevezetik. Foglaljuk össze egy táblázatban az eddigieket. A 1.1. táblázat vízszintes sorában szerepel a modell anyagi (fizikai) vagy szellemi jellege, míg a függőleges oszlopokban a modellálandó objektum anyagi vagy szellemi mivolta.

X modellje Y-nak	Anyagi (élő vagy élettelen)	Szellemi
Anyagi (élő vagy élettelen)	1	1
Szellemi	1	

1.1. táblázat. Modell típusok

Mint látható három esetet vettünk sorra eddig, egy hely üresen áll.

A táblázat nem tartalmazza a fejlett élőlények túlélést elősegítő idegrendszeri hálózatát, mert ezek nem tudatos emberi alkotások eredményei. Ugyanakkor ezek az idegrendszeri hálózatok is a környezet modelljeinek tekinthetők, mivel képesek a környezetben előforduló, az élőlény számára fontos tárgyak, jelenségek összefüggéseinek leképezésére.

Az élőlények, különösen az ember és az emberi gyakorlat alkotta teoretikus tudomány modellek segítségével ismeri meg a világot. Ezek a modellek a mindennapi élet és a tudományos gyakorlat rostáján hullanak ki vagy akadnak fenn további felhasználás végett, de soha nem azonosak a valósággal. Talán Kant volt az első filozófus, és utána sokáig senki, aki ha mégoly archaikus nyelven és csak homályosan, használható matematikai-logikai fogalmak és logikai formális nyelv nélkül, de megértette a modern elméleti tudományok modellalkotó gyakorlatát. Az ő *a priori szintetikus* ítélet fogalmának ez egy lehetséges értelmezése.

Modellek matematikán belül

Végül már csak egy lehetőség maradt hátra a modellek és tárgyaik kapcsolatát tekintve, az, amikor a modell is és annak tárgya is a matematika világán belül marad. Ez az amit most néhány egyszerű példa segítségével részletesebben is megvizsgálok.

Az egyszerűség kedvéért vegyünk egy mindössze háromelemű halmazt: $H = \{a, b, c\}$ Képezzük e halmaz összes részhalmazainak halmazát, melyet jelöljünk $P(H)$-val.
$P(H) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
Mint látható éppen 8 részhalmazunk van, ami nem meglepő, mert $2^3 = 8$. A részhalmazok halmazán meghatározunk három a halmazelméletből ismert műveletet, nevezetesen az egyesítést: $\cup$, a metszetet:$\cap$, és a H-ra vonatkoztatott komplementer halmazt: $\neg$. Utóbbi úgy is tekinthető, mintha H-ból kivonnánk $P(H)$ egy elemét. Az alábbi 1.2, 1.3, 1.4 táblázatok mutatják az összes lehetséges esetet.

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\neg x$	$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$

1.2. táblázat. Komplementer halmaz

Figyeljük meg a következő érdekes összefüggéseket, melyek bármely x eleme $P(H)$-ra igazak: $\emptyset \cap x = \emptyset$; $\emptyset \cup x = x$; $\{a, b, c\} \cap x = x$; $\{a, b, c\} \cup x = \{a, b, c\}$; $\neg\emptyset = \{a, b, c\}$; $\emptyset = \neg\{a, b, c\}$ A táblázatokkal ellenőrizhető a következők igazsága is: $\neg x \cap x = \emptyset$; $\neg x \cup x = \{a, b, c\}$

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\dots$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\dots$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\dots$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\dots$
$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\dots$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\dots$
$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\dots$
$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\dots$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\dots$

1.3. táblázat. Egyesítés

$\cap$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,c\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a\}$	$\{a,c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$
$\{b,c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$
$\{a,b,c\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$

1.4. táblázat. Metszet

Vessük össze az előző példát a logikából jól ismert VAGY (1.6. táblázat); ÉS (1.7. táblázat) valamint NEM (1.5. táblázat) igazságfüggvényekkel. Legyen I=igaz; H=hamis.

x	H	I
$\sim x$	I	H

1.5. táblázat. Negáció

Az előző példához hasonló összefüggéseket találunk most is:

$H \,\&\, x = H; H \vee x = x; I \,\&\, x = x; I \vee x = I; \sim H = I; H = \sim I$

Itt is érvényes egy a korábbihoz hasonló igazság: $\sim x \wedge x = H; \sim x \vee x = I$. Könnyen belátható, hogy az előző példában szereplő $\emptyset$ jelnek itt a H, a a, b, c halmaznak az I, a $\neg, \cup, \cap$ műveleteknek pedig rendre a $\sim, \vee, \,\&\,$ műveletek felelnek meg.

Nézzünk egy ehhez hasonló érdekes kapcsolatot az aritmetika és az igazságfüggvény logika között! Legyen Z az egész számok halmaza, A pedig atomi állítások egy halmaza. Ezek olyan tovább már nem elemzett kijelentő mondatok, melyek rendelkeznek egyértelmű igazságértékkel. Feltételezésük hasonló szerepet ját-

$\vee$	H	I
H	H	I
I	I	I

1.6. táblázat. Vagy kapcsolat

&	H	I
H	H	H
I	H	I

1.7. táblázat. És kapcsolat

szik a logikában, mint a pontok a geometriában. Legyen f egy A értelmezési tartományú és Z értékkészletű olyan függvény melyre három (A1, A2, A3) feltétel teljesül:

A1. minden atomi állításhoz egy egész számot rendel, de különböző atomi mondatokhoz különböző számokat rendel;

A2. ha egy p atomi állítás igaz, akkor és csak akkor a hozzá rendelt x szám kettőnél nagyobb prím szám;

A3. ha p atomi mondathoz x szám, a q atomi mondathoz y szám tartozik, és p-nek tagadása (negációja) q, akkor fennáll a következő egyenlőség: $x = 1 - y$.

Érték	Állítás	Érték	Az állítás tagadása
-12	$1 \neq 1$	11	$1 = 1$
7	A hó fehér.	-8	A hó nem fehér.
-4	Szókratész nem bölcs	3	Szókratész bölcs.
5	Minden ember halandó.	-6	Valamely ember halhatatlan.

1.8. táblázat. Mondatok értékelése érték $= f$(állítás)

Használni fogom az egész számok halmazán értelmezett 'páros' tulajdonságot, amit a 'modulo' függvénnyel fejezek ki. Ez a függvény az egész számok osztási maradékának abszolút értékét adja meg. Tehát valamely x számra $1 = mod(x, 2)$ ha az x szám páratlan, és $0 = mod(x, 2)$ ha x páros. Ezek szerint a 'három' szám és a 'mínusz három' szám is egyformán páratlan, tehát $1 = mod(3, 2)$ és $1 = mod(-3, 2)$. Páros számok esetén a kettővel való osztási maradék nulla, tehát $0 = mod(-12, 2)$ és $0 = mod(4, 2)$. A mindennapi életben gyakran találkozunk a 'modulo' függvény használatával. Ilyenek a hagyományos mutatós órák, vagy a hét napjai illetve az évek hónapjai. Az órák például az órákban mért eltelt idő tizenkettővel vagy huszonnéggyel való osztási maradékát mutatják, míg a hét napjai az időtartam napokban mért számának héttel való osztásának felelnek meg.

Az állításlogikában használatos igazságfüggvényeknek aritmetikai műveleteket feleltetek meg, és az ennek megfelelően lefordított formulák értékelésekor nem igazságértékeket hanem egész számokat használok. Az 'igaz' és 'hamis' logikai értékeknek az egész számok páratlan vagy páros tulajdonsága felel meg, igaz=páratlan, hamis=páros. Az igazságfüggvények aritmetikai fordításakor csak néhány elemi aritmetikai műveletet használok: összeadás, kivonás, szorzás és a 'modulo' függvényt. Az alábbi táblázat mutatja az igazságfüggvényeket (logikai funktorokat) egy sorban a nekik megfelelő aritmetikai kifejezéssel.

Igazságfüggvények, argumentumaik mondat paraméterekkel kitöltve	Magyarázat	Az igazságérték aritmetikai megfelelője, ahol p és q értékei egész számok lehetnek.
$\sim p$	Negáció (a tagadás jele)	$mod(-1 \times p - 1, 2)$
$p\&q$	És kapcsolat	$mod(p \times q, 2)$
$p \vee q$	Alternáció (megengedő értelmű vagy)	$mod(1 + (p + 1) \times (q + 1), 2)$
$p\nabla q$	Kizáró értelmű vagy (vagy … vagy …)	$mod(p + q, 2)$
$p \rightarrow q$	Kondicionális (ha … akkor …)	$mod(1 + p + p \times q, 2)$
$p \leftrightarrow q$	Bikondicionálisn (akkor és csak akkor)	$mod(-1 * (p + q) - 1, 2)$

1.9. táblázat. Aritmetikai fordítás példák

Ha jó ez a modell, akkor annak alapján bármely igazságfüggvény formulát lefordíthatunk aritmetikai kifejezéssé, és így a logikai igazságokból aritmetikai igazság válik. Lássunk egy példát. Annak a logikai igazságnak, hogy '$p\vee \sim p$' az az aritmetikai állítás felel meg, hogy bármely p egész számra $1 - p^2 - p$ páratlan szám. Ez átalakítva azt kapjuk, hogy $1 - p \times (p + 1)$ ami mindig páratlan szám.

Láttunk három példát három hasonló struktúrára. Miben áll ez a hasonlóság? A három struktúrában három egymásnak megfelelő műveletet találunk:

Unáris műveletek : $\neg, \sim, 1-p$ Aki ismeri a lambda operátor használatát, annak az utóbbit pontosabban így is kifejezhetjük: $\lambda p(-p - 1)$.

Bináris műveletek: $\cap$, $\&$, $\times$

Bináris műveletek : $\cup, \vee, 1 + (p + 1) \times (q + 1)$ Utóbbi műveletnél megfelelne $p + q + p \times q$ is.

Találunk hasonló elemeket is:

Egységelemek: $\{a, b, c\}, I, 1$

Zéruselemek: $\emptyset, H, 0$

Ezzel kölcsönösen egyértelműen megfeleltettük egymásnak a példákban szereplő alaphalmazokat és műveleteket. Jelöljük az egymásnak megfelelő unáris és bináris műveleteket rendre így: $', \wedge, \vee$ A zéruselemet és egységelemet pedig így: o, e. Ekkor azt mondhatjuk, hogy a Boole-féle algebrára adtunk meg három példát, ahol:

Boole algebra $= \langle \mathbf{B},', \wedge, \vee \rangle$

$B = \{o, e\}$ és bármely $x \in B$ re $x \wedge x' = o$ és $x \vee x' = e$

továbbá $x \wedge o = o$ és $x \vee e = e$

$\wedge, \vee$ kommutatív műveletek, azaz $x \wedge y = y \wedge x$ és $x \vee y = y \vee x$

azon kívül mindkét művelet disztributív a másikra nézve:

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ illetve $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

A korábbi három példa tehát egy-egy esete a Boole féle algebrának. A három példában szereplő műveletek egyforma eredményt adnak, ha eltekintünk az alaphalmazok egyedi sajátosságaitól. Az ilyen módon szoros hasonlóságot mutató struktúrákat egymással *izomorf* struktúrának nevezik.

Mire jó mindez?

A modellek lehetővé teszik, hogy különféle nyelven fogalmazzuk meg ugyanazt a gondolatot. Amit nem értünk az egyik nyelven, esetleg jobban megértjük a másikon. A bevezetésben említettem, hogy bizonyos áramkörök úgy tekinthetők mint egyes absztrakt matematikai struktúrák modelljei. Ilyenek a digitális elektronika logikai áramkörei. A következőkben ezeket fogom fölhasználni fizikai modell gyanánt. Két logikai rejtvényt vizsgálok meg. Mindegyikhez szerkesztek egy digitális elektronikai modellt, és fölhasználom az iménti aritmetikai fordítást is.

A maga korában nagyhatású középkori francia filozófustól, Jean (John) Buridantól (1300-1358) származik a következő rejtvény, melynek lényeg a következő.[2]

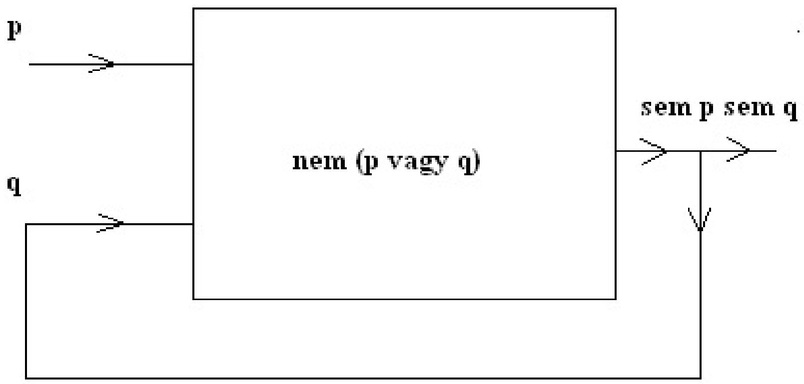
[2] "Twelfth sophism: GOD EXISTS AND SOME CONJUNCTION IS FALSE
The twelfth sophism is 'God exists and some conjunction is false'. Let us posit that this is written on the wall and that there exists no other proposition than it and its parts. And then it is asked whether it is true or false. We argue as before: for if it is true, then it follows that it is false; and if it is false, it seems to follow that it is true, for things are as it signifies, since its contradictory is false, namely this: 'God does not exist or no conjunction is false'. Solution: we should say that it is false, and the argument is solved as before. For although things are as it signifies according to its formal signification, yet, things are not as would be signified by the consequent implied by it and the case, and, assuming it to be named by the proper name A, its contradictory would be this: 'No God exists or no conjunction is false or A is not true'. Similar sophisms could be formed concerning disjunctive propositions, as 'A man

$p :=$ (p) Isten létezik.

$q :=$ (q) Sem (p) sem (q) mondat nem igaz.

Mit gondoljunk ennek a két mondatnak az igazságáról? Vajon melyik igaz közülük?

A q mondat 'vagy-nem' kapcsolatot állít, mivel a 'nem p és nem q' ekvivalens a 'nem (p vagy q)' logikai struktúrával. A vagy-kapcsolat egyik összetevője egy létezési állítás, a másik összetevője pedig a vagy-kapcsolat önmaga. Különös mondat ez, mert igazságértéke – ha egyáltalán van neki – önmagától is függ. Ezért biztosan nem fordítható le a szokásos logikai keretek között. A 'vagy' kapcsolat előbbi tagját képviselje 'p', az utóbit pedig 'q' formula. Tehát $p :=$ Isten létezik, $q :=$ Sem az első, sem a második mondat nem igaz. Tehát 'p' igaz ha Isten létezik, hamis más esetben, és 'q' igaz ha sem p sem q nem igaz. Szemléletesen ezt úgy fejezhetjük ki, hogy $|q| = |\text{nem}(p\text{vagy}q)|$, ahol az azonosság két oldalán formulák igazságértékei (faktuális értékei) szerepelnek. Az alábbi elektronikai modell fejezi ki p és q mondat logikai kapcsolatát (1.1). ábra.



1.1. ábra. Buridan Isten érve

Visszacsatolással modelláltam q igazságértékének önmagától való függését. A p bemenet magas szintű ha Isten létezik, a másikra pedig az automata kimeneti állapota kerül vissza. Ennek felel meg a 'sem egyik sem másik nem igaz' mondat. A vagy-nem igazságfüggvénynek a '$(p + 1) \times (q + 1)$' az aritmetikai

is a donkey or some disjunctive is false', positing that there is no other disjunctive; and the same goes for exceptive [propositions], as for example, 'Every proposition other than an exceptive is true', positing that there are no propositions except this exceptive and two others, namely, that God exists and that a man is an animal; and thus also with exclusives, as when Socrates says: 'God exists' and Plato says: 'Only Socrates says something true', and nobody says anything else. Other sophisms can also be formed about the fact that it is possible for a proposition to be doubtful or not doubtful, known, or not known, believed or not believed." John Buridan, Summulae de Dialectica (Summulae), an annotated translation with a philosophical introduction by Gyula Klima, [13], c. 8, p. 980.
Az alábbi helyeken további részletek olvashatók:
`http://www.seop.leeds.ac.uk/entries/buridan/`
`http://www.anoca.org/he/ass/john_buridan.html`

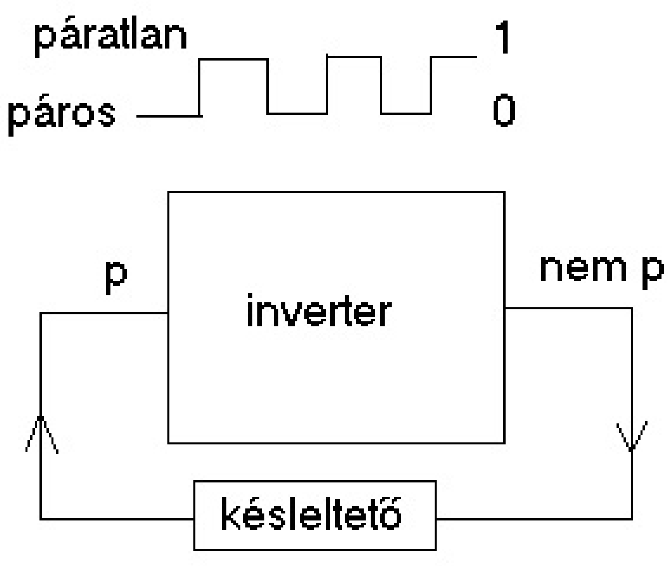
fordítása. Ekkor a visszacsatolást kifejezhetjük egy formulával. Legyen '$x \cong y$' kifejezés annak a jele, hogy $mod(x, 2) = mod(y, 2)$, azaz vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan. Ekkor az aritmetikai modell alapján lefordítva Buridan istenérvét az alábbi aritmetikai állítást kapjuk: $q \cong (p + 1) \times (q + 1)$. Ennek csak akkor van megoldása, ha p páratlan, de q páros. Visszafordítva ezt az eredményt azt kapjuk, hogy p igaz, viszont q hamis kell legyen, máskülönben ellentmondásba keveredünk. Pontosan ez derül ki az elektronikus modell kipróbálásával is. Ha p alacsony szintű, akkor nem kapunk stabil kimeneti jelet, a kimenet felváltva hol magas, hol alacsony szintű.

A közismert hazug paradoxonnak tekintsük az alábbi megfogalmazását:

A bekeretezett mondat hamis.

Vajon igaz-e amit a mondat állít? Ha igaz, akkor hamis, hiszen éppen ezt állítja, ha viszont hamis, akkor az ellenkezője felel meg a tényeknek, és mégis igaz. Ezzel azonban visszajutottunk a kiinduló ponthoz, és vég nélkül körbe forgunk. A bekeretezett mondat tehát ha igaz, akkor hamis – hiszen ezt állítja – ha viszont elfogadjuk az állítását, hogy hamis, akkor az ellenkezőjét kell vegyük, tehát igaz. Miképp modellálhatnánk ennek logikai szerkezetét? Vegyünk ismét egy fizikai modellt. A hagyományos villanycsengő a következő módon működik: ha a vezetéken átfolyik az áram, a csengő karja meghúz. Ha a csengő karja meghúz, megszakítja az áramkört, következésképpen nem folyik át áram a vezetéken. Ha nem folyik át áram a vezetéken, a csengő karja elenged, nem húz meg. Ha viszont nem húz meg, akkor záródik az áramkör, és az átfolyó áram hatására meghúz a relé. Ezek szerint ha a csengő karja meghúz, akkor nem húz meg, ám ha nem húz meg, akkor meghúz. Hasonlóan működnek az inverterből visszacsatolással fölépített generátorok is. Az inverter mindig az ellentettjét adja ki a bemenetére került jelnek. Ha magas szint kerül a bemenetére, akkor alacsony szintet ad ki, ha viszont fordítva a bemenete alacsony szintű, akkor magas szintű a kimenete. Mindez természetesen időben lejátszódó folyamat. Mi történik, ha az inverter kimenetét visszavezetjük – egy jelkésleltető tag közbeiktatásával – a bemenetére? Ekkor felváltva hol magas, hol alacsony szintű kimenőjelet kapunk, nem jön létre állandó stabil állapot. Az alacsony szintet a páros, a magas jelszintet a páratlan értéknek megfeleltetve, az inverter páros értékre páratlant ad ki a kimenetén, és fordítva, páratlan értékre párosat (1.2. ábra).

A korábbi példához hasonlóan itt is az igazságértéket meghatározó ténynek tekintik magát az igazságértéket, egy szintre emelve azt, amiről szól a mondat és a mondat értékelését. Úgy is szokták ezt mondani, hogy nincs elválasztva ezeknél a példáknál (paradoxonoknál) a tárgynyelvi és a metanyelvi szint. Vissza-



1.2. ábra. A hazug

csatoljuk a kimeneten lévő jelet a bemenetre, modellálva azt, hogy a bekeretezett mondat igazságértéke önmagától függ. Ezt az aritmetikai modellre fordítva láthatjuk, a 'hazug'-nak megfelelő automatának akkor lenne időben konstans kimeneti állapota, ha találnánk olyan egész számot amelyik páros is és páratlan. Csak ebben az esetben tudnánk megmondani, hogy a bekeretezett mondat igaz vagy hamis.

1.2. Véges automaták mint a leírás és realitás modelljei

Bevezetés

A következő filozófiai vizsgálódás azon alapul, hogy megkülönbözteti a jelenlét, a történeti idő, valamint az igazság létezési módjait. Ennek során az igazság korrespondencia elméletéről mutat be egy kibernetikai modellt. Ez a modell elektronikus formában működik is. Az elemzés során megemlítem, hogy milyen egyéb irányban fejleszthető tovább javaslatom. Gondolatmenetem Tarski alapgondolatait követi, Kripke vagy Barwise vonatkozó elméletére – illetve az ehhez kapcsolódó szituációs logikájára – az igazság revíziós elméletére (The Revision Theory of Truth) nem tér ki. Viszont fölhasználom az állításlogika egy aritmetikai fordítását, mint egy nyelv modelljét, egy másik nyelven a leírás, a magyarázat dimenziójában maradva, majd ezt a fordítást fölhasználva az állításlogika egy elektronikus modelljét is bemutatom. Ez egyszerűen egy táblázatkezelő program használatát jelenti. Ennek során ismertetem a (Mealy féle) véges automaták elméletének alapgondolatát, majd az igazság probléma megközelítését ebből a nézőpontból. Azért használom ezt az utat a kérdések elemzésére, mert egy filozófiai gondolatnak számolótáblázattal való ábrázolása példája annak, hogy mi számít a XXI. században közérthető magyarázatnak. A kibernetikai modell a maga valóságában nem része e szöveg nyomtatott változatának. A modell működésének magyarázata, leírása nem maga a modell. Utóbbi létmódja a felhasználóval való jelen idejű, élő, gyakorlati kapcsolat, és így a mindennapi életben múló idő. Letölthető az internetről:

`http://ferenc.andrasek.hu/modellek/dim07_hun.xls`

A világnézetet artikuláló minták közé tartozik minden esetben a világnézettel kapcsolatban lévő szaktudományos háttér és értékrendszer. Az ezt alkotó közösség által begyakorolt nyelv és gondolkozásmód meghatározza, hogy milyenek a megvilágosító erejű példák és magyarázataik, mely hasonlatokat (analógiákat) képes valaki megérteni, milyen gondolkodói stílus esetén érez szimpátiát és mikor ellenszenvet, és akkor még nem is említettem az eltérő pszichológiai beállítottságokat a képi vagy szöveg alapú gondolkodás tekintetében, illetve a gondolkodás lineáris vagy szerteágazó hajlamát. Egy magyarázatot akkor értünk, ha számunkra otthonos nyelven fogalmazzák meg. Tegyük fel, hogy az egyik jelenség csoport hasonlít egy másik jelenség csoporthoz, és a másikat leíró szaktudomány modelljei lefordíthatók az előbbi jelenségkört leíró szaktudomány nyelvébe. Ha most valaki az első nyelvében járatos, akkor számára egy másodikból való fordítás a magyarázat, ha viszont valaki a második nyelvében mozog otthonosan, akkor számára az elsőnek a másodikba való fordítása a magyarázat. Az, hogy „A világ egy nagy óramű." semmiképp sem azt jelenti, hogy éjszaka, ha kimegyünk a kertbe a nagy csöndben hallgatózva óra ketyegést hallunk, sokkal inkább arra utal, hogy az óra, ami egykoron a legbonyolultabb emberi alkotás volt amelynek működését értettük, célszerű modellje lehet a világnak. Jó magyarázat annak, aki szereti a mechanikát, és kellően találékony a mechanikai modellek készítésében és alkalmazásában, képes alkotó módon használni mechanikai modelleket, de nem magyarázat annak, akinek sokkal inkább egy mechanikus gép a probléma, és nem a csillagos ég. A bonyolult gép, ami egykoron az óramű volt, az mostanság a számítógép, a véges automata.[3]

Kai-Uwe Kühnberger a körbeforgás jelenségéről írt disszertációjában megvizsgálta a problémát a formális és természetes nyelvekben. Számos ismert és kevésbé ismert logikai rejtvény után a matematika, nyelvészet, számítástudomány, és a filozófiai érvelés területéről is bemutat példákat a körbenforgás jelenségére. E példák egy részét az általam javasolt megközelítésben is meg fogjuk vizsgálni. Kühnberger véleménye szerint nem minden paradox szituáció szükségszerűen körbeforgó, és nem minden körbefogó jelenség paradox. Éppen arra a kérdésre próbál meg választ keresni, hogy a körbenforgás jelensége miért vezet némelykor paradox eredményhez, némelykor meg nem. Szerinte egy entitás akkor körbeforgó, ha valamely szempontból nem alapozható meg a matematikai jólfundáltság követelménye szerint.[4] Úgy véli azonban, hogy önmagában azért mert egy gondolat körbeforgó, még nem kell szükségképpen elvetni. Csak akkor hibás szerinte egy körbeforgó gondolat, ha azt lehetetlen jól fundált formára átalakítani. Sorra bemutatja a probléma legújabb megközelítéseit, de a 'visszacsatolás' elvének a problémával kapcsolatos összefüggéseit nem vizsgálja.[5]

Idő és igazság

Amíg a tudományos magyarázatokban az idő csak egy a lehetséges paraméterek közül, speciális folyamat, állapotok sorozata, melyhez más állapotokat, eseményeket, folyamatokat hozzárendelünk, addig a mindennapi életet átéljük az időben. Ezen a papíron egy teória található, mely időtlen, de amikor valaki olvassa, az egy történés, az élet része. Minden leírás és magyarázat egyben realitás is, de a papíroson létező tudomány nem vállalkozhat másra, mint hogy magyarázat legyen. A jelek nem mozdulnak meg a papíron, a kör egyenlete nem kerek, a mozgás matematikai leírása nem mozog. Ez az, amit képtelenek voltak fölfogni a spekulatív filozófiák. Egy állítás igaz vagy hamis mivolta nem tett, csak kimondása teheti azzá, és egy helyesen kigondolt gondolat sem lesz kimondott kizárólag igazsága folytán.

[3] Tanulmányom korábbi változata megjelent az E-tudomány elektronikus folyóirat 2009/2 számában.

[4] Ez a követelmény a halmazelmélet széles körben használt Zermelo-Freankel féle fölépítésében azt garantálja, hogy egy halmaz nem eleme önmagának, vagy két halmaz nem eleme kölcsönösen egymásnak. A halmazelmélet ilyen fölépítését a továbbiakban 'ZF'-el jelölöm. Peter Aczel kidolgozott egy olyan halmazelméletet, amely nem tiltja a halmazok önmagára való körkörös hivatkozását.

[5] Kai-Uwe Kühnberger „Formal frameworks for circular phenomena" (Possibilities of Modeling Pathological Expressions in Formal and Natural Languages) Philosophische Dissertation, Universität Tübingen - 20.07.2001, Osnabrück - 2002. Letölthető az Internetről erről a címről:
`http://w210.ub.uni-tuebingen.de/dbt/volltexte/2002/477/pdf/Diss11.pdf`

Egy elavult tudományos magyarázat a szaktudós számára értéktelen, míg a történész számára értékes lehet. Ez azért van így, mert a történész figyelme nem az állításokra, hanem az állításkimondásokra, azok körülményeire, keletkezésük magyarázatára irányul. A tudományos könyvek szólhatnak az időről, de a teória, melyeket felállítanak ez esetben is időn kívüli. Egy kérdéskör története hasznos vagy egyenesen elengedhetetlen feltétele lehet a megértésnek, de a vita története sohasem érvényes érv a vita tárgyában. Az igazság nem történeti. A történeti és az igazság dimenziója összeolvasztásának egyik esete volt az a marxista historizmus, amelyik egy történeti magyarázat egyedüli igazságának feltételezésével, a kérdések és válaszok, az elméleti problémák és magyarázataik megismerési dimenzióját beolvasztotta a történeti dimenzióba. Ezek után levezette a történelemből azt a választ, ami igazolta ama történeti levezetés helyességét, önmaga igazságát. Ezért e teória, ha bármilyen elfajult formában is, de a valóságos és válságos történeti ágensek részévé vált, logikus következménye volt önmagának.

A körbeforgó gondolkodás nemcsak az igazság és történeti dimenzió összemosásának az esetén fordulhat elő, hanem a jelenlét (a mindennapi élet) és a igazság (megismerési) dimenzió összemosásakor is. A hazug paradoxonhoz hasonló mondatok látszólag olyanok, amikkel állítást tehetünk. Ha azonban ezt megkíséreljük, események olyan sorozatát kapjuk, ahol a mondat igazságértéke változó. Ugyanakkor a paradox mondatokat képesek vagyunk megérteni. Teljesen ellentmondásmentesen megértjük, hogy valahányszor igazságértéket tulajdonítunk ama nevezetes mondatnak, utána az ellenkezőjére kell következtessünk. Azért vagyunk erre képesek, és egyáltalán azért értjük meg a problémát, mert az időben kiterítve, az időben elmondva az antinómia leírható ellentmondásmentesen. Egy állítás megtételének a ténye is megváltoztathatja a világot, megváltoztathatja azt, amiről az állítás szól. Így akár ugyanaz a mondat többször elmondva más-más igazságfeltételekkel rendelkezhet pusztán csak attól, hogy már elhangzott. [6]Megértjük a talányos mondatot, ha viszont valaki teljes komolysággal azt mondaná nekünk a telefonba, hogy „meglátogatlak és nem látogatlak meg", akkor nem értenénk, hogy mit mond. A paradoxon viszont maga nem érthetetlen abban az értelemben, hogy arra szólít föl, oldd meg a problémát, keresd meg, hogy mi okozza az ellentmondást, és szüntesd meg a forrását! (Később kitérek arra, hogy nem a logikai ellentmondás a legfontosabb jellemzője a problémának.)

Az egyén három dimenzióban éli az életét: a jelenlét (a mindennapi élet), a történeti és az igazság (a leírás, magyarázat és elmélet) dimenzióiban. Ezek a dimenziók, miként a tér síkjai, metszik egymást, és létünk egy vonal ebben a térben.[7] A jelenlét (a mindennapi élet) ideje jelen idő, az átélt pillanat, a történelem

[6]Ezért a kiegészítésért köszönettel tartozom Máté Andrásnak.

[7]V.ö: Roman Witold Ingarden, Time and Modes of Being. (ford. Helen R. Michejda) [15] Amie Thomasson írja: „Most

ideje a jövő felé mutató múló idő, míg a megismerés, az igaz és hamis dimenziójának ideje egyfajta végtelenség, örökkévalóság. Az így kapott három dimenziónak, és az azok közötti relációnak három nagy filozófiai irányzat felel meg: életfilozófiák, történelemfilozófiák és tudományfilozófiák. A három dimenzió vetülete a megismerés dimenziójában mint sajátos nyelvfilozófia is megjelenik. A modern nyelvfilozófia egyik megalapítója írja iskolateremtő alapművében: „Először a mondás közben végrehajtott dolgok egy olyan csoportját különítettük el, amelyet összefoglalóan úgy jellemezhetünk, hogy lokúciós aktust végzünk. Ez nagyjából egyenértékű azzal, hogy valamely mondatot bizonyos értelemmel és jelölettel mondunk ki, ami viszont nagyjából egyenértékű a 'jelentés' hagyományos értelmével. Másodszor azt mondtuk, hogy illokúciós aktusokat is végzünk, így tájékoztatunk, utasítunk, figyelmeztetünk, felvállalunk stb., vagyis a megnyilatkozásoknak van bizonyos (konvencionális) ereje. Harmadrészt megvalósítunk perlokúciós aktusokat is: akkor, amikor valaminek a mondása révén valósítunk meg vagy érünk el valamit, amikor meggyőzünk, elrettentünk vagy akár meglepünk vagy félrevezetünk valakit. Itt a 'mondatok használatának' vagy a 'nyelvhasználatnak' három, sőt több különböző értelméről, vagy ha úgy tetszik, dimenziójáról van szó . . . ”.[8]

A megnyilatkozások lokúciós ereje, egyes mondatok ismeretközlő mivolta, az általuk kifejezett igaz vagy hamis propozíció, nem más, mint a megnyilatkozás vetülete a magyarázat, a megismerés dimenziójában; a megnyilatkozás cselekvő ereje, az illokúció nem más, mint a megnyilatkozások megjelenése a mindennapi lét dimenziójában; a perlokúciós aspektus, a megnyilatkozások hatása, következménye, pedig nem más, mint a megnyilatkozás lenyomata a történeti dimenzióban. (A hívő ember számára Isten is három vetületben, három dimenzióban jelenik meg: mint a jelen idő, a mindennapi lét része, mint az egyházak istene, amely történelem ágense, és legelvontabban mint a teológia-filozófia nehezen megragadható fogalma.) A nyelv alapvető célja nem az igazságok gyűjtögetése, hanem a cselekvés. Az ismeretérték a 'tedd ezt ha igaz, és amazt ha hamis' feltételes utasítás esetén bír jelentőséggel a való életben. Hasonló ez a programozási nyelvek feltételes utasításaihoz, melyek szintén egy megítélhető tartalmú mondat igazságától teszik függővé, hogy merre fusson tovább, mit tegyen a számítógép program. Ebből a nézőpontból a programozási nyelvek teljesebben tükrözik a ember és világa kapcsolatát mint a szimbolikus logikai nyelvek. Ezt a lehetőséget használják a ki a következőkben bemutatott automata modellek.

---

traditional category systems, such as Aristotle's, lay out a single dimension of categories supposed to be mutually exclusive and exhaustive. Ingarden, by contrast, develops a multi-dimensional category scheme by dividing ontology into three parts: formal, material and existential ontologies, corresponding to three distinct aspects that may be discerned in any entity (its formal structure, material nature, and mode of being respectively). . . . The ideal mode of being is a timeless mode of existence suitable for platonistically conceived numbers; the real mode of being is that of contingent spatio-temporal entities such as the realist assumes ordinary rocks and trees to be . . . " Amie L. Thomasson, „Roman Ingarden", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2004 Edition), Edward N. Zalta (ed.)
`http://plato.stanford.edu/archives/spr2004/entries/ingarden/`

[8] John L. Austin, Tetten ért szavak. [1] p.113.

Magyarázat és modell

> Szókratész: S mit gondolsz, Glaukón, ha valaki azt kérdezné tőlük: »Miféle számokról beszéltek ti, szerelmes barátaim, ahol az egy olyan, amilyennek ti állítjátok: egyik a másikkal teljesen egyenlő, köztük a legkisebb különbség sincs, s egyik sem osztható részekre?«, vajon mit válaszolnátok erre? Glaukón: Bizonyára azt, hogy ők arról beszélnek, amiről csak gondolkodni lehet, és amihez semmiféle más módon nem lehet hozzányúlni. Szókratész: Látod tehát, kedves barátom, valóban nagy szükségünk van erre a tudományra, ha egyszer a lelket arra szorítja, hogy magával a gondolkozással közeledjék a tiszta igazsághoz.[9]

A minket érdeklő kérdés azonban nem az, hogy az „egy”-nek vagy általában az eszméknek van-e önálló léte, hanem fordítva, hogy látható, érzékelhető dolgok lehetnek-e eszmék? Ha a király játék katonákkal ábrázolta az elképzelt, vagy már lezajlott csata lefolyását, akkor ez milyen viszonyban állt a csata írásba foglalt tervével, vagy egy történeti feljegyzéssel a csata lefolyásáról? Vizsgáljunk meg egy planetáriumot, egy régebbi mechanikus csillagászati modellt, egy emberi testet ábrázoló orvosi célokat szolgáló szobrot, régi és új térképeket, földgömböt vagy egy hajó modelljét! Segítenek-e választ adni ezek a tárgyak bizonyos elméleti kérdésekre? A hajó modellként való megépítése nem teszi fölöslegessé a számításokat, a kettő kiegészíti egymást és nem tagadása a másiknak. Bonyolult differenciálegyenletek megoldásai megtalálhatók analóg számítógépekkel, vagy rugókból és tömegekből álló komplikált mechanikai szerkezetek, vagy melegedéssel kapcsolatos jelenségek viselkedését is meg lehet jósolni elektronikus áramkörök viselkedésével. Minden műszaki egyetemen tanítják ezeket a hasonlóságon alapuló modelleket.[10] Ezek az anyagi modellek vajon magyarázatai-e a modellált jelenségnek? Lehet-e az egyik anyagi rendszer eszmei modellje egy másik anyagi rendszernek? Véges automatákkal illetve számítógépekkel különösen sok minden modellálható, a kémiai molekuláktól kezdve egészen a gazdasági folyamatokig.

Említettem korábban, hogy a jelek nem elevenednek meg a papíron. De igaz-e ez az állítás akkor, ha a jelek elektronikus formában jelennek meg egy Internet WEB oldalon? Nem igaz. Ezeknek a fizikai illetve számítógépes modelleknek előnyös tulajdonsága, hogy időbeli létezők, mozgásra, változásra képesek, ellentétben a holt betűkkel, sőt abban az értelemben is eleven létezők, hogy válaszolnak külső hatásokra. A formális diszciplínákban számos esetben alkalmaznak modelleket olyan módon, hogy egy bizonyos formális struktúrát egy másik modelljének tekintenek. Ennek célja sok esetben valaminek a bebizonyítása, más esetben hasznos gyakorlati alkalmazása vagy közérthetőbb nyelvre való lefordítása. Most hasonló feladatra vállalkozom. Egy véges automata modellel – ami jelen esetben egyszerűen egy számítógépes táblázat hasz-

[9] Platón, Az állam. ford. Szabó Miklós, in Platón összes művei II., Európa, 1984. pp. 474–480; 523a – 525b, [24]

[10] A kérdésről részletesebben lásd: Szűcs Ervin, Hasonlóság és modell [8]

nálatát jelenti – szeretném világosabbá tenni Tarski lapvető gondolatait az igazságról. Ugyanis filozófiailag fontos elvárás egy magyarázattól – jelen esetben az igazág korrespondencia modelljével kapcsolatban – hogy a kor minél szélesebb olvasói köre számára legyen érthető. Manapság a számítógépes táblázatok használata a legközönségesebb dolognak számít, így amit annak segítségével lehet megmagyarázni, az egy világos és közérthető magyarázat. Mindkettő alapvető a filozófia célját illetően.

Mi a véges automata?

Természetes nyelven, egy közös ismeretalapot elképzelve példákkal, és egzakt matematikai formulákkal is bemutatom a fogalmat. Utóbbira azért van szükség, hogy a filozófiában oly gyakori körbeforgó meghatározás csapdáját elkerüljem.

A determinisztikus véges automaták szemléletesen úgy képzelhetők el, mint olyan teljesen egyértelműen meghatározott működésű gépek, melyeknek csak véges sok belső és külső állapota van. Amennyiben az állapotok száma kettő, úgy kétállapotú (digitális) automatáról fogok beszélni. Ilyenek a digitális áramkörök, digitális hálózatok, vagy más néven logikai áramkörök. A teljes meghatározottság azt jelenti, hogy a mindenkori jelen időhöz tartozó bemeneti és belső állapotok egyértelműen meghatározzák a következő időponthoz tartozó kimeneti és belső állapotokat. Ebből látható, hogy diszkrét időben képzeljük el a működésüket, amit a valóságos automaták elég jól meg tudnak közelíteni. Az automaták ezen csoportjába tartoznak a digitális számítógépek vagy az automata mosógép, de vasalót, a hűtőszekrényt vagy a légkondicionálót célszerűbb analóg szabályozásnak tekinteni és nem véges automatának, mivel lehetséges állapotaik száma nem véges. Viszont a zsebszámológépek szintén véges automaták, és a véges memóriától eltekintve úgy is tekinthetők, mint aritmetikai műveletek fizikai modelljei. Az ilyen automaták absztrakt matematikai elméletét a műszaki gyakorlat igényei jelentősen befolyásolták. Ennek megfelelően egy fizikailag létező automata működése többféle szempontból is osztályozható, és többféle absztrakt automata fizikai megvalósításának, modelljének is tekinthető. „Az, hogy egy a gyakorlatban előforduló automata determinisztikus vagy sztochasztikus-e, nem annyira az automatán múlik, inkább attól függ, hogy, hogy milyen modellt használva, milyen nézőpontból, milyen fokú pontosságra törekedve, írjuk le az automata működését.”[11] A továbbiakban olyan automatákkal foglalkozom, amelyekről feltételezhető, hogy az első (kezdeti) állapotot követően teljesen determinisztikusan működnek, és bemeneti, kimeneti valamint belső állapot jellemzőik csak véges sok diszkrét állapotot vehetnek föl. Ezek az automaták diszkrét időpontok sorozatában változtatják meg állapotukat, és az automata bármely jelen időpontban adott állapotleírása – a bemenetek és belső állapotok értékei – két, az automatára jellemző függvény segítségével teljesen

[11] Bagyinszki János, Véges automaták (Ádám András és Katona Gyula előadásai alapján), (1972) Az MTA Matematikai Kutató Intézete „A számítástechnika alapjai” c. tanfolyamának jegyzete. Bp. bevezetés IX.o. A példa is ebből a könyvből való.

meghatározzák a kimenetek következő diszkrét időponthoz (ütemhez) tartozó állapotát. A bemenetek, kimenetek és belső állapotok egyazon időponthoz tartozó sorozatai helyett röviden 'bement'-ről, 'kimenet'-ről és 'belső állapot'-ról fogok beszélni. Szokás ezeket bemeneti, kimeneti valamint belső állapot vektornak is nevezni arra utalva, hogy értékek sorozatait vizsgáljuk. A műszaki gyakorlatban bemeneti és kimeneti 'jel' a szokásos elnevezés, mostani filozófiai céljainknak azonban jobban megfelelnek a 'jellemző' és 'állapot' terminusok. Mielőtt tovább haladnánk, fogalmazzuk meg az eddigieket pontosabb matematikai nyelven is.

Legyenek X, A és Y egy véges automata összes bemeneti, belső és kimeneti állapotainak halmazai. Ezek egy tetszőleges elemét rendre x, a, és y jelekkel jelölöm. Az $\langle A, X, Y, \delta, \gamma \rangle$ algebrai struktúrát Mealy-féle automatának nevezem, ahol X, A és Y nem üres halmazok. A '$\delta = A \times X \to A$' és a '$\gamma = A \times X \to Y$' függvények az A és X halmazok Descartes szorzatán definiált függvények, amelyeket rendre belső állapot-függvénynek, illetve kimeneti függvénynek nevezem. Az automata az x bemenő állapot (bemenő jel) hatására a jelenlegi a (belső) állapotból átmegy az $a' = \delta(a, x)$ állapotba és közben $y' = \gamma(a, x)$ kimenő jelet ad ki.

Felteszem, hogy a δ és γ függvények minden (a, x) párra értelmezve vannak. Megadom az automata kezdetei, iniciális állapotát. Mealy féle automaták esetén – mint amilyeneket most tárgyalunk – az automatának csak az iniciálist követő állapotában van kimeneti állapota. Feltételezzük, hogy valamilyen bemeneti állapot sorozatra az automata az összes belső és kimeneti állapotot legalább egyszer fölveheti. Röviden, nincsenek fölösleges elemei az A és Y halmazoknak. Az ilyen automatákat iniciálisan összefüggő automatáknak nevezik. Ezeknél bármely állapot elérhető a kezdő állapotból véges számú bemenő jel alkalmazásával. Ha X – a bemenetek halmaza – egyelemű, akkor az automatát 'generátor'-nak fogom nevezni. Ilyenkor X halmazt el is hagyhatjuk, mivel az automata viselkedését a $\delta = A \to A$ és a $\gamma = A \to Y$ függvények leírják. A generátornak tekinthető automaták bemeneti hatásoktól függetlenül hoznak létre kimeneti állapotokat (jelsorozatokat). Kombinációs hálózatnak (vagy automatának) nevezem az olyan automatát, amely egyedül a bemenet és kimenet közötti függvénnyel teljesen leírható. Ilyen esetben is alkalmazható a $\delta = A \times X \to A$ és a $\gamma = A \times X \to Y$ függvények alkotta leírás olyan módon, hogy a belső állapotok A halmaza egyelemű. Generátornak tekinthető mind a mechanikus mind az elektronikus óra, kombinációs hálózatnak tekinthető a villanykapcsoló és lámpa, első megközelítésben egy jól működő autó vezetése alacsony sebességgel, a televízió az antenna jelek felől nézve, a zongora a leütések és hangok összefüggésében, és általában a klasszikus mechanika tárgyait leíró formulák jó része. (Pl. egy súly hatására gyorsuló kocsi, ahol a bemenet a súly és a kocsi tömege, kimenet a kocsi gyorsulása.) Kombinációs hálózatot alkotnak az elemi logikai funktorok (függvények) működését szimuláló automaták is, amivel később részletesen foglalkozom. Azokat az automatákat amelyek nem kombinációs struktúrájúak, sorrendi hálózatoknak (néha sorrendi automatának) fogom nevezni. A legtöbb automata a mosogatógéptől kezdve a riasztó rendszerig, még az egyszerű hagyományos villanycsengő is a működését tekintve sorrendi hálózat. A sorrendi hálózatokat emlékező rendszereknek is nevezik, mert a külső hatásokra a korábban ért hatások függvényében válaszolnak. Egy egyszerű példa sorrendi hálózatra a következő. Legyen $A = \{a, b, c\}$, $X = \{x, x'\}$, $Y = \{y, y'\}$ és δ valamint γ az alábbi táblázattal megadott függvények. Az 1.10. táblázat első oszlopa a bemeneti állapotok, a legfelső sor a belső állapotok halmazát tartalmazza, a többi helyen lévő érték a következő diszkrét időpontban (ütemben) létrejövő belső állapotot mutatja. A 1.11. táblázatban az első oszlop a bemeneti állapotok, a legfelső sor a belső állapotok halmazát tartalmazza, a többi helyen lévő érték egyazon diszkrét időpontban (ütemben) létrejövő kimeneti állapotot mutatja. (Ennek az absztrakt automatának a működése tanulmányozható az elektronikus modellen is.)

Az olyan automatákat, amelyek bármely állapotukat akárhányszor fölvehetik, ciklikus automatáknak nevezik, azokat amelyeknek viszont van olyan állapota amiből csak kiindulni, vagy megérkezni lehet, nem ciklikus (aciklikus) automatáknak nevezik. A keletkező és elmúló tárgyak modelljei nyilván nem lehetnek ciklikus automaták, ha a véges létüket is ábrázolni akarjuk.

δ	a	b	c
x	c	c	b
x'	b	b	a

1.10. táblázat. Belső állapot táblázat

Az is nyilvánvaló, hogy minden kombinációs struktúrájú automata ciklikus, de ha egy automata nem ciklikus, akkor nem lehet kombinációs struktúrájú, hanem csak sorrendi hálózat. Pontosabb, mélyebb elemzésben a tárgyak mindig sorrendi struktúraként viselkednek, és a diszpozíciós tulajdonságok is inkább sorrendi hálózatként értelmezhetők és nem kombinációs automataként.

A véges automaták mostani felosztása egy lényeges ponton még további finomításra szorul. A kombinációs struktúrájú automaták viszonylag egyszerűen leírhatók lennének a bemenet és kimenet közötti függvénykapcsolat megadásával. A belső állapotok figyelembe vétele kombinációs automaták esetén pusztán azt a filozófiai szempontot hangsúlyozza, hogy ezek is időben működnek.

γ	a	b	c
x	y	y	y'
x'	y	y'	y'

1.11. táblázat. Kimeneti függvény

Ezzel szemben az automatáknak van egy másik csoportja, a sorrendi hálózatok, melyek működése leírásakor még technikai szempontból sem hagyható figyelmen kívül a belső állapotuk. Ezek ugyanis egy hatásra attól függően válaszolnak, hogy éppen milyen belső állapotban vannak. Vannak olyan sorrendi hálózatok is, melyek egy kiterjesztett értelemben szintén kombinációs struktúrát alkotnak. Ezek működése olyan, hogy a belső állapotuk csak rövid távon befolyásolja működésüket, hosszabb idő eltelte után mindig a bemenetek által egyértelműen meghatározott állapotba kerülnek. Ezért ezek működése ebben a későbbi állandósult állapotban a kombinációs struktúrákhoz hasonlóan leírható pusztán a bemenet és kimenet közötti függvény kapcsolattal.

Igazságfüggvények és automaták

Azok a véges automaták, amelyek az elemi logikai függvényeknek felelnek meg kombinációs struktúrák. Többek között ilyenek az ÉS kapu, VAGY kapu valamint az Inverter mint a tagadás megjelenítője. Vizsgáljuk meg részletesen az ÉS kaput. A mostani elemzés kis mértékben eltér attól, amit a logikai tankönyvek a modern logika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatban megemlítenek. Erre azért van szükség, hogy kiemeljem ezen automaták időben működő mivoltát.

δ	a
00	a
01	a
10	a
11	a

1.12. táblázat. Belső állapotok

Az ÉS kapu az alábbi módon írható le (0=hamis, 1=igaz). Legyen $A = \{a\}$, $X = \{00, 01, 10, 11\}$, $Y = \{0, 1\}$ és δ (belső állapot) valamint γ (kimenet) az alábbi táblázatokkal megadott függvények. Az első a belső állapotokat meghatározó 1.12. táblázat. A baloldali oszlop a bemeneti állapotok halmaza, a legfelső sorban lévő 'a' jel az egyetlen belső állapotot tartalmazza, a többi helyen lévő értékek a következő diszkrét időpontban létrejövő belső állapotot mutatják. Ez az automata mindig egyazon belső állapotban van, ezért az automata működése megadható lenne belső állapotokra való hivatkozás nélkül is. Az ÉS kapu kimeneti értékeit mutatja a 1.13. táblázat. Az első oszlop itt is a bemeneti állapotok halmaza, és a legfelső sorban csak egyetlen belső állapot van a, ezért a kimenet független a belső állapottól. A többi helyen lévő 0 vagy 1 érték a következő diszkrét időpontban (ütemben) létrejövő kimeneti állapotot mutatja.

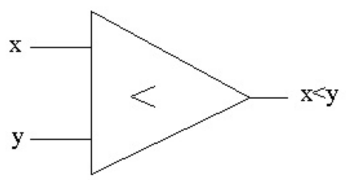
γ	a
00	0
01	0
10	0
11	1

1.13. táblázat. kimeneti állapotok

Mint a táblázatokból látható, ha az automata magas és alacsony szintű kimeneti állapotát rendre az 'igaz' és 'hamis' logikai értékeknek feleltetjük meg, akkor ezek a gépek fizikai modelljei egy logikai igazságfunktornak, az ÉS kapcsolatnak. Mivel a logikai tagadás és az 'és kapcsolat' modellálható véges automatákkal, és minden igazságfunktor kifejezhető ezzel a két logikai művelettel, ezért minden elemi logikai igazságfunktor modellálható véges automatákkal. (Mindaz, ami Wittgenstein Tractatusa szerint megfogalmazható formális logikai nyelven, véges automatákkal is modellálható, viszont fordítva nem igaz!) Ebből következik, hogy bármely állítás logikai szerkezetét az állításlogika szintjén kifejezi egy izomorf digitális áramkör, ahol a bemenetek a formula atomi állításainak igazságértékei, a kimenet az összetett formula igazságértéke, és a magas és alacsony jelszintnek az 'igaz' és 'hamis' logikai értékek felelnek meg. A digitális áramkör időbeli működése modellálja az állítás atomi összetevőinek egy-egy értékelését. Így egy logikai ellentmondást kifejező '$p\,\&\ \sim p$' struktúrájú állításnak egy olyan áramkör (véges automata) a modellje, amelyik kimenete mindig alacsony szintű. Ezzel szemben egy logikai igazságot kifejező '$\sim\ p \vee p$' struktúrájú állításnak megfelelő automata kimeneti állapota mindig magas szintű. A 'kondicionális' nevű igazságfunktornak is megfeleltethető egy automata, ezért automatákkal a következmény reláció is vizsgálható. Bonyolult esetekben ez indokolt lehet annak ellenére, hogy a papíron ceruzával történő levezetése egyszerűbb.

Szokásosan csak az igazságfunktorok elméletének szoktak megfeleltetni áramköröket, automatákat, de ez a megfeleltetés tovább is vihető. A funktorok – a hiányos nyelvi kifejezések – automatának is tekinthetők, ahol a bemenetek az argumentumok, míg a kimenet állapota a függvényérték.

Az 1.3. ábra egy olyan automatát ábrázol, amelyik kimenete 1 értékű, ha a bemenetei között fennáll egy reláció, és 0 értékű más esetben.

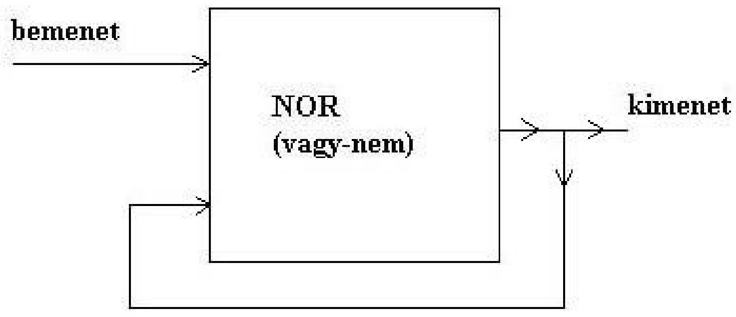


1.3. ábra. Funktor

A kimenet=1 ha az egyik bemenetre kisebb jel kerül mint a másikra ($x < y$), és a kimenet=0 más esetben. A bemenetek értékei számok. E kétargumentumú predikátum argumentumainak a neki megfelelő véges automata két bemenete, míg az argumentumok szabályos kitöltésével kapott formula igazságértékének az automata kimeneti állapota felel meg.[12]

Nem minden kétállapotú véges automata (logikai áramkör) tekinthető igazságfunktorok anyagi modelljének, ezzel foglalkozom a következőkben. Bemutattam, hogy az igazságfunktorok egyszerűen ábrázolhatók olyan véges automatákkal, amelyeket a digitális elektronikában és automatikában 'logikai kapu'-nak neveznek. Említettem, hogy amit az egyszerű állításlogika képes kifejezni az állítások logikai struktúrájából, azt a neki megfelelő anyagi modell, véges automata is kifejezi úgy, hogy az atomi állítások 'igaz' és 'hamis' szemantikai értékelésének az automata bemeneti állapotai felelnek meg, a kimeneti állapot pedig az összetett állítás igazságértékének. 1.4. ábrán látható, amihez később nyelvi példát is adok: Kérdés, hogy meddig érvényes ez a megfelelés, ez a

[12]Részletesen foglalkoztam ezzel „Szemantikai gépek" c. 1985-ben írt kéziratomban. Ilyen értelemben tekinti a funktorok argumentumait gépek bemenetének Ruzsa Imre is a Bevezetés a modern logikába c. könyvében. (2000) Osiris,Bp. p.22.



1.4. ábra. Buridan Isten érve

hasonlóság. Formulákat igazságfunktorokkal összekapcsolva ismét formulát kapunk. Bár ezekhez a nem atomi formulákhoz is mindig van megfelelő kombinációs automata, utóbbiakkal nem ilyen egyszerű a helyzet. Egy kombinációs automatát egy másikkal összekapcsolva nem mindig kapunk kombinációs automatát, még az is lehet, hogy semmiféle automatát – működőképes gépet, áramkört – nem kapunk.

δ	0	1
0	1	0
1	0	0

1.14. táblázat. Belső állapot táblázat

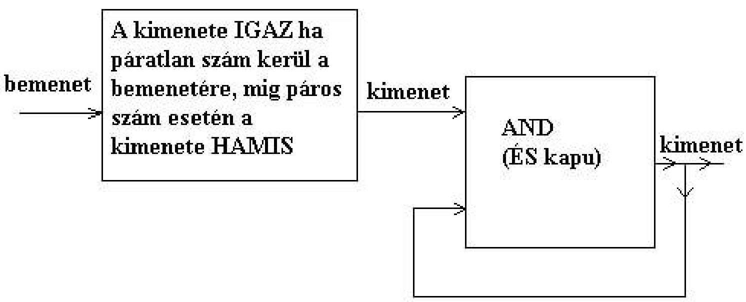
Vannak ugyanis olyan igazságfüggvény elemekből felépített automaták, melyek működése nem igazságfüggvény, nem kombinációs automata és kifejezhetetlen az állításlogika keretei között. (Ugyanakkor fejlettebb logikai apparátussal már esetleg leírhatók az ilyen struktúrák.) Egy ilyen véges automata a következő, amihez később nyelvi példát is adok. Amikor a 1.4. ábrán látható automatának a bemenete magas szintű, akkor a kimenete a következő ütemben mindig alacsony szintű lesz. Ha viszont a bemente alacsony szintű, akkor nincs állandó értéke a kimenetének. Ilyenkor a kimenete fölváltva hol magas, hol alacsony szintű.

γ	0	1
0	1	0
1	0	0

1.15. táblázat. Kimeneti függvény

Mint látható a belső állapot működését leíró 1.14., és a kimenetet megadó 1.15. táblázat azonos. Ez azért van, mert a kimenet azonos a belső állapottal. Ez az automata nem írható le a belső állapotok megadása nélkül. Alacsony szintű bemenet esetén nincs a kimenetnek állandósult értéke, viszont bármelyik állapotba van átmenet, ezért ez egy ciklikus rendszer. Eltér ettől a 1.5. ábrán látható nem ciklikus automata.

Táblázatok vagy függvények megadását mellőzve a működése a következő. Az automata bemeneti állapotai páros vagy páratlan számok lehetnek. Mindaddig, amíg páratlan számok kerülnek a bemenetére, addig a kimenete magas (1) szintű, ha viszont csak egyetlen egyszer is páros szám kerül a bemenetére, akkor a kimenete az ellenkezőjére vált (0), és úgy is marad az idők végezetéig. (Később erre is adok egy nyelvi példát.)



1.5. ábra. A király mindig igazat mond

Annak a pontos meghatározására, hogy mikor kapcsolhatók össze egymással szabályosan a véges automaták, mit jelent egy ilyen összekapcsolás során a visszacsatolás, továbbá, hogy mi az általános feltétele annak, hogy a kombinációs szerkezetű véges automatákból alkotott újabb automata maga is kombinációs struktúrájú legyen – vagy ha nem is kombinációs struktúrájú, de véges sok ütem után bármely megengedet bemeneti állapotra a belső állapottól függetlenül egyértelműen meghatározott kimeneti állapotot vegyen föl – nem térek ki. Ezek bonyolult matematikai apparátust igénylő kérdések, és mostani célunkhoz elegendő ha ezeket a fogalmakat intuitívan értelmezzük. A minket érdeklő kérdés az, hogy vannak-e olyan dolgok, jelenségek, megnyilatkozások vagy elméletek, amelyek logikai struktúráját a fizikai modell – véges automata, illetve egy digitális rendszer vagy számítógépen futó alkalmazás – ki tudja fejezni, miközben a klasszikus állításkalkulus nem? Miféle dolgoknak lehetnek a modelljei az ilyen sorrendi hálózatok?

Nyelvi szintek

Említettem korábban, hogy a mozgás leírása nem mozog. Tegyük föl azonban, hogy a leírás egy olyan elektronikus dokumentum része, amely rövid mozgókép betéteket tartalmaz. Vajon egy ilyen elektronikus dokumentum mozgást tartalmazó része tekinthető-e a mozgás magyarázatának? A papíron még sok más sem szerepelhet. Egy könyv lapjain nem eshet a hó. Ha meg akarjuk magyarázni egy elmélettel a hóesés és egy róla szóló leírás kapcsolatát, akkor valamiképp a hóesést is és a róla szóló leírást is meg kell jelenítsük a papíron, és meg kell adjuk a kettő közötti kapcsolatot is. A hóesést a papíron épp úgy mondatok fogják képviselni, mint a róla szóló beszámolót, bár a két fajta mondat más-más dimenzió polgára. Az első egy időben létező esemény képviselője a papíron, a második a magyarázatok és leírások – az igazság – időn kívüli világának (dimenziójának) a polgára. Ezt a különbséget fejezi ki a Tarski által bevezetett tárgynyelv-metanyelv megkülönböztetés. A metanyelvi szint jeleníti meg a papíron az eseményeket, folyamatokat – a jelenlét, a mindennapi élet dimenzióját – L_1 tárgynyelv pedig leírja az eseményeket, folyamatokat. Utóbbi atomi mondatai eseményekhez, folyamatokhoz való viszonyát a metanyelv szintjén írjuk le. Az eseményeket, folyamatokat megjelenítő metanyelvi részt L_0-nak nevezem, míg magát a metanyelvet L_2-nek. L_2-nek nyilván része L_0. Az 1.16. táblázat mutatja, hogy egy egyszerű véges világ és a róla szóló beszámoló miként ábrázolható nyelvi szintek segítségével:

<table>
<tr><td>L_1 nyelven – tárgynyelvi szinten – állításokat fogalmazunk meg W_1 világról, és egy függvény megadja a nyelv atomi mondat paramétereinek interpretációját, azaz a paraméterek faktuális értékét.</td><td>Metanyelvi szinten L_0 nyelven jelenítjük meg W_1 világot és annak történetét. Ezt a nyelvet nem interpretáljuk formálisan, csak szóbeli magyarázatot fűzünk hozzá. L_0 része L_2 nyelvnek.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Metanyelvi szinten (L_2 nyelv) kapcsolatokat (relációkat) adunk meg L_1 metanyelvi fordítása és L_0 elemei között, és L_1 mondatai neveinek segítségével meghatározzuk az igazság L_1-ben érvényes fogalmát.</td></tr>
</table>

1.16. táblázat. tárgynyelv – metanyelv

„A hó fehér.” mondat – Tarski egyik példamondata – kevéssé szerencsés, mert legalább annyira tudósít a nyelvhasználatról, mint egy tényről. Ennek belátásához elég ha felidézzük azt a mondatot, hogy „Hófehérke bőre olyan fehér volt mint a hó.” Mindenesetre e fizikai jelenséggel kapcsolatos mondat még mindig sokkal alkalmasabb az igazság filozófiai problémájának elemzése céljára, mint egy matematikai állítás. Utóbbi esetben fel sem vethető a nyelv és a nyelven kívüli fizikai világ kapcsolata, amely pedig alapköve egy adekvát igazság teóriának. De követve a hagyományokat, maradok a hónál. Az a mondat, hogy „A hó fehér.” logikai szerkezetét tekintve hasonló az „Esik a hó.” mondathoz, de az utóbbi sokkal inkább tudósít egy nyelven kívüli tényről, ezért ez utóbbi mondatot tekintem példának. Az a meghatározás, hogy:

Az ’Esik a hó.’ mondat igaz pontosan akkor, ha esik a hó.

mint metanyelvi mondat mindazt modellálja a nyelv és valóság kapcsolatából, amire a nyelv a holt betűk segítségével képes a papíron a magyarázat és leírás dimenziójában. A baloldalon egy tárgynyelvi mondat neve, míg a jobboldalon annak metanyelvi szintű fordítása található. (Jelen esetben a fordítás megegyezik a tárgynyelvi mondattal.) Utóbbi képviseli a valóságot a magyarázat dimenziójában. Ismét fölvetődik azonban az előző kérdés. Mi a helyzet, ha a hóesést egy mozgó ábra képviseli egy elméletben? Lehet-e az „Esik a hó.” mondat igazságának magyarázata az alábbi metanyelvi „mondat”? Mit állít ekkor a kép? A telet, a hóesést, a csukott ablakot vagy az ablakkeret geometriai formáját? (Interneten nézve hullanak is a hópelyhek (lásd 1.17. táblázat):

`http://ferenc.andrasek.hu/it-is-snowing.htm`)

Az „Esik a hó.” mondat igaz pontosan akkor, ha 

1.17. táblázat. Havazik

A hóesést attól függően hogy papírt, vagy elektronikus formátumot választunk közlendőnk megjelenítésére, ábrázolhatjuk rajzzal, fényképpel, szimbolikus ábrával, esetleg mozgó animációval, de a leggyakoribb a természetes nyelv használata erre a célra. Amikor azonban számot akarunk adni a nyelv és az általa leírt valóság kapcsolatáról, akkor a világosság és pontosság igényének jobban megfelel egy olyan közeg, ahol matematikai jellegű kapcsolatot adhatunk meg a magyarázat dimenziójában megjelenő realitás és nyelv kapcsolatáról. Az általánosság igényének is jobban megfelel egy formális nyelv vagy modell használata. Ezért nem helyes az iménti ábrát tartalmazó mondat. A mondat egy logikai kapcsolatot kéne kifejezzen, ahol egy említett mondat egy használt mondat által kifejezett igazság-függvénytől függően beletartozik egy halmazba (igaz), vagy nem tartozik bele (hamis), csakhogy itt egy kép szerepel egy nyelvi kifejezés alkotórészeként, ami értelmetlenség. Azonnal nyilvánvalóvá válik mindez, ha megpróbáljuk fölolvasni, amit látunk. Amit mint látványt itt megértünk, az a szó szoros értelmében kimondhatatlan. Lehetséges azonban más út is a hóesés megjelenítésére, a hóesést modellálhatjuk véges automatával, amit később mutatok be.

Tarski kimutatta, hogy egy olyan kellően erős nyelv, amely megengedi saját mondatainak korlátlan megnevezését, és a nyelven belüli ’igaz’ kifejezés használatát és meghatározását a mondat nevek segítségével, szükségképpen ellentmondásra vezet. Ez a veszély akkor is fenyeget, ha az ’igaz’ szó helyett olyan más szemantikai kifejezéseket használunk, mint a ’jelöl’. A kivezető út a nyelvek rendekbe sorolása, aminek következtében ezek a veszélyes kifejezések egy nyelvre csak kívülről, egy annál bővebb nyelven, metanyelven fogalmazhatóak meg. Ezzel Tarksi lényegében úgy döntött, hogy metanyelvi szinten – ahol rögzítjük az ’igaz’ szó jelentését – az igazság relációt fejez ki, egy adott nyelvre vonatkoztatható tulajdonság. Tehát a parttalan ’x - igaz’ tulajdonságot föl kell cseréljük az ’x - igaz L nyelvben’ relációval. Egy adott L_1 nyelvre vonatkoztatva természetesen megkapjuk a szokásos beszédmódot, amikor is az ’x - igaz L_1 nyelvben’ kifejezés már tulajdonsága L_1 nyelv x nevű mondatainak. Ilyen kifejezéseket azonban L_1 nyelvben magában nem használhatunk. Tekintsük az alábbi meghatározást.

x mondat L_1-igaz pontosan akkor,

(1.1) ha x L_1 egy mondatának a neve és $\Psi(x)$

A jobb oldalon álló ’$\Psi(x)$’ nyitott mondat az ’igaz’ terminus meghatározása L_2 metanyelvben, de az ’igaz’ terminus nem lehet alkotórésze Ψ-nek. Tarski kimutatta, hogy némelyik nyelvre definiálható az igazság. Legyen az L_1 nyelvre vonatkozó igazság jele ’$igaz_1$’ és azt, hogy egy x mondat neve eleme L_1 nyelvnek fejezzük úgy ki, hogy $x \in L_1$. Ekkor az erre a nyelvre vonatkozó igazság fogalma így határozható meg, feltéve hogy meghatározható:[13]

(1.2) $x \in igaz_1 := x \in L_1$ ÉS $\Psi(x)$

(Ez a formula nagyon hasonlít a ZF halmazelméletből ismeretes részhalmaz axiómához.)[14]

Tarski szerint a tartalmi adekvátság feltétele az, hogy ebből logikailag levezethető legyen L_1 nyelv bármely x nevű mondatára:

(1.3) $x \in igaz_1 \leftrightarrow \varphi(x)$

Ahol ’$\varphi(x)$’ az x név által megnevezett mondat maga.

Egy igazság definíció

Hogy a feladatot a célnak megfelelően minél egyszerűbbé tegyem és ne foglalkozzam fölösleges technikai részletekkel, fölteszem, hogy az általam vizsgált nyelv (L_1) – a tárgynyelv – nem tartalmaz kvantifikációt, legfeljebb csak mint rövidítést, azaz nem több mint az állításlogika egyszerű nyelve. Egy ilyen nyelv alkalmas egy véges világ leírására. Mivel a mai fizika tanítása szerint a mi világunk épp ilyen, ezért ez

[13]Lásd ezzel kapcsolatban angolul: Hodges, Wilfrid, „Tarski’s Truth Definitions”, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2001 Edition), Edward N. Zalta (ed.),
`http://plato.stanford.edu/archives/win2001/entries/tarski-truth/`
Magyar nyelven: Sós Vilmos: Modern igazságelméletek. [35]

[14]v.ö. ezzel kapcsolatban az „On the Paradox of the Adder” The Reasoner 5/3, March 2011 c. írásomat.

a nyelv alkalmas a világ leírására. Az L_1-hez hasonló egyszerű véges univerzumon értelmezett logikai nyelvek a logikusok és matematikusok számára érdektelenek, de a filozófia céljaira megfelelőek, sőt a legmegfelelőbbek. Lehetővé teszik, hogy az igazsággal kapcsolatos filozófiai problémákra, és ne technikai részletekre összpontosítsuk figyelmünket. A feladat ugyanis az 'igazság mint a tényeknek való megfelelés' filozófiai eszméjének pontos megfogalmazása.[15] Bemutatok egy igazság definíciót egy állításslogikára egyszerűsített L_1 nyelven. A megoldás hasonlít Rudolf Carnap állapotleírás elméletéhez.

Legyen L_1 nyelv atomi mondatainak száma véges, és ezek halmazát jelölje A_1. Carnap kutatásai alapján megadhatjuk az elemi tények leírásának szintén véges halmazát, melyet G_1 jelöl. A_1 minden atomi mondata vagy a tagadása – de csak az egyik – eleme G_1-nek, és semmi más nem eleme G_1-nek. Ha tehát 'p' eleme A_1-nak akkor vagy 'p' vagy '$\sim p$' eleme G_1-nek. Nyilvánvaló, hogy G_1 része L_1 nyelvnek. Legyen p formula neve x – azaz $p \leftrightarrow \varphi(x)$ – és ekkor a $\Psi(x)$ feltétel így is megadható: x szintaktikailag levezethető G_1 - ből. (Bonyolultabb nyelvek esetén ez nem lenne elfogadható, mert az axiómákból való levezethetőség nem meríti ki az igazság fogalmát.) Mivel L_1 nulladrendű nyelv, ezért igaz, hogy benne minden állítás elemi tényállítások igazságfüggvénye, és megadható olyan kalkulus, amellyel az igazak le is vezethetők tetszőleges G_1-ből (a 0-rendű elméletek negációteljesek).[16]

Most azonban más utat fogok követni. Vegyük szemügyre a hóesés példáját. Legyen W_1 egy véges világ, amely egyetlen jellemzőt tartalmaz. Ez a jellemző az, hogy 'havazik', illetve hogy 'tiszta idő van',

[15] Erre utalt Karl Popper is. „Legyünk merészek, és vegyük komolyan, hogy vannak állítások, melyek megfelelnek a tényeknek. Bármely elméletnek, amely erről szólni kíván, tudnia kell beszélni (1) valamely nyelv - amelyet a vizsgált nyelvnek vagy tárgynyelvnek mondunk - állításairól és a (2) tényekről és feltételezett tényekről.

Hogy állításokról beszélhessünk, rendelkeznünk kell nevekkel az állítások számára, pl. az állítások idézetneveivel vagy deskriptív neveivel. Ez azt jelenti, hogy bármely korrespondencia elméletet metanyelven kell megfogalmazni, vagyis egy olyan nyelven, amelyen beszélhetünk a kutatásunk tárgyát képező tárgynyelv kifejezéseiről.

Hogy az állítások és a tények közötti relációkról is beszélhessünk, tények leírására is szükségünk van; azaz a tárgynyelven leírható összes ténynek leírhatónak kell lennie metanyelvünkben is. Ily módon a metanyelvnek tartalmaznia kell a tárgynyelvi kifejezések fordításait, vagy a tárgynyelvet saját részként kell tartalmaznia (elkerülve ezáltal a hű fordítások létének kényes problematikáját). Így azt találjuk, hogy bármely elmélet, amely állítások és tények közötti korrespondenciával és ennélfogva állítások és tények közötti relációkkal foglalkozik, olyan metanyelven kell megfogalmazni, mely a szokásos logikai szavakon kívül három típusú kifejezéseket tartalmaz:

1. Állítások neveit, tehát valamely tárgynyelv nyelvi kifejezéseinek megnevezéseit: ezek részei a tárgynyelv 'morfológiájának' vagy 'szintaxisának'.
2. Tényeket (beleértve a nem tényeket) és körülményeket leíró állításokat: vagyis fordításokat a tárgynyelvből a metanyelvbe. (Hogy a fordítás buktatóit elkerüljük, a tárgynyelv, mint már utaltunk rá, beemelhető a metanyelvbe.)
3. Ezen a két alapvető kifejezéstípuson kívül van egy harmadik is: azon magasabb rendű kifejezések típusa, melyek e két alapvető kifejezéstípus predikátumait és a köztük lévő relációkat jelölik, pl. olyan predikátumok, mint 'X megfelel a tényeknek', vagy olyan relációk, mint 'X akkor és csak akkor felel meg a tényeknek, ha Y'.

Ez a három, csaknem nyilvánvaló minimálkövetelmény egy olyan nyelvvel szemben, amelyen egy korrespondenciaelméletet akarunk megfogalmazni." Karl R. Popper, Some Philosophical Comments on Tarski's Theory of Truth. In: Proceedings of the Tarski Symposium (ed. by L. Henkin and others), American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974, 397-409. Fordította: Pólos László. In: Alfred Tarki, Bizonyítás és igazság - válogatott tanulmányok [33] p.423.

[16] Máté András megjegyzése.

azaz nem havazik. Feltesszük, hogy egyazon időpontban vagy havazik, vagy tiszta idő van, de a kettő egyszerre nem lehetséges. Viszont előfordulhat, hogy nincs tiszta idő, de nem is havazik. A 'havazás' meglehetősen bonyolult jelenség. Egy pontosabb elemzésben meg kéne különböztessünk közbenső állapotokat, azt az állapotot amikor még csak szállingózik a hó, attól, amikor szakadó hóesés van. Akár mérőskálát is használhatnánk a hóesés leírásához a hóesés intenzitásának értékeihez különféle számokat rendelve. Mostani célunknak azonban az a legegyszerűbb modell is megfelel, amikor csak két állapotot használunk attól függően, hogy havazik vagy sem. W_1 világ egyetlen helyből (vagy megnevezhető objektumból) áll, és ennek a jellemzője a hóesés. Ebben a világban nem is történhet más, mint hogy a benne lévő egyetlen helyen esik a hó, vagy nem esik. Végezetül W_1 története mindössze négy diszkrét időpont, melyet az egyszerűség kedvéért az 't_1,t_2,t_3,t_4' (vastagon szedett alsó indexszel ellátott) betűk ábrázolnak. W_1 világ teljes története a következő: az első időpontban tiszta idő van, a következő két időpontban havazik, végül az utolsó, a negyedik időpontban ismét eláll a havazás és kitisztul az égbolt. W_1 világ tehát térben is időben is véges.

Formális nyelven négy elemi formulával írjuk le W_1 történetét. Legyen 'Δ' az egyedüli térrész jele – mivel egyedüli állapot, el is hagyható – az 't_1,t_2,t_3,t_4' jelek pedig e kicsi véges világ egymást követő időpontjai. Legyen egy 'j' egy kétargumentumú függvény, amely egy dolog és egy időpont összefüggésében azt az állapotot adja meg, hogy azon a helyen akkor havazás van-e vagy tiszta az idő. Ebben a világban szélsőséges az időjárás, átmeneti állapotok nem fordulnak elő. (Mint, említettem egy kicsivel részletesebb példa esetén 'j'-nek három vagy több értéke is lehetne: szakadó hóesés van, szállingózik a hó, nem havazik.) Ezek felhasználásával az W_1 történetét ábrázoló négy elemi esemény így fest:

tiszta-az-idő=$j(t_1, \Delta)$; havazik=$j(t_2, \Delta)$;
havazik=$j(t_3, \Delta)$; tiszta-az-idő=$j(t_4, \Delta)$

W_1 világban – bármilyen kicsi is az – többféle létező van: hely, idő, jellemző. Egy bonyolultabb, több helyből vagy objektumból és több jellemzőből álló véges világ (univerzum) esetén a jellemzők között ennél érdekesebb összefüggések is megadhatók. Ekkor megfogalmazhatnánk természeti törvényszerűségeket is, amelyet szintén W_1 részének, 'létező'-nek fogadnánk el. Azt a nyelvet, amelyen W_1 világot ábrázoljuk, L_0 - nak nevezem. L_0 nyelv fogja modellálni azt a nyelven kívüli világot, amelyről L_1 nyelven állításokat fogalmazunk meg. Később látni fogjuk, hogy L_0 szerepében időben működő véges automata modell – fizikai, anyagi valóság – is megjelenhet, még világosabban mutatva a nyelv és nyelven kívüli világ kapcsolatát. W_1 világba annak történetét is beleértem. A történelem ábrázolása L_0 nyelven csak véges sok kifejezést tartalmaz. Bevezetve azt a kézenfekvő rövidítést, hogy 0=tiszta az idő, 1=havazik, a négy mondat egyszerűbbé válik:

(1.4) $L_0 = \{0 = j(t_1, \Delta), 1 = j(t_2, \Delta), 1 = j(t_3, \Delta), 0 = j(t_4, \Delta)\}$

L_0 úgy is értelmezhető lenne mint egy függvény, egy véges matematikai struktúra, fogalmazás kérdése, hogy nyelvnek nevezem-e. Jelen esetben L_0 nyelv egyetlen kétargumentumú funktort tartalmaz, j-t. A funktor terjedelmébe függvények tartoznak, mely függvény értékei állapotok $(0, 1)$, argumentumába pedig időpont, hely párok kerülhetnek. L_0 esetében semelyik két állapot és időpont nem azonos. L_1 nyelv hat individuumnevet $(t_1, t_2, t_3, t_4, 0, 1)$ egy kétargumentumú predikátumot (H), és a jól ismert logikai konnektívumokat tartalmazza. A predikátum első argumentumába csak a 't_1, t_2, t_3, t_4' jelek, míg a második argumentumába csak a '0' vagy '1' jel kerülhet. L_1 atomi mondatainak halmazát jelölje A_1.

$$A_1 = \{H(t_1, 0), H(t_1, 1), H(t_2, 0), H(t_2, 1),$$
(1.5)
$$H(t_3, 0), H(t_3, 1), H(t_4, 0), H(t_4, 1)\}$$

A szokásos logikai konnektívumok segítségével képezhetünk L_1 atomi mondataiból molekuláris mondatokat. Az atomi mondatok száma véges, de L_1 összes lehetséges kifejezéseinek száma végtelen. A két nyelv, L_0 és L_1 közötti kapcsolatot a metanyelven, L_2-n fogalmazzuk meg. L_2 gazdagabb mindkettőnél, már atomi mondatainak a száma sem véges. Jelen esetben L_2 metanyelv a magyar nyelv egy töredéke, formális szimbólumokkal kiegészítve. $H(x, 0)$ jelentése az, hogy tiszta az idő x-kor, míg $H(x, 1)$ jelentése az, hogy havazik. Figyeljünk föl arra, hogy '$H(x, 0)\,\&\,H(x, 1)$' nem lehet igaz semelyik x-re, mivel egyazon időpontban vagy havazik, vagy tiszta idő van, de a kettő nem fordulhat elő egyszerre. Ezt azonban nem tartalmazza axiómaként L_1 nyelv, ez következménye kell legyen a metanyelven leírt világ azon tulajdonságának, hogy a jellemzők referenciái függvények, melyek értékei egyértelműek.

Legyen adott L_1 nyelv mondatainak az aritmetikai fordítása, a következők szerint: a fordítás L_1 minden mondatához egy egész számot rendel. Legyen Z az egész számok halmaza, A pedig L_1 atomi mondatai halmaza. Legyen f egy A értelmezési tartományú és Z értékkészletű olyan függvény, melyre három feltétel teljesül:

A1 f L_1 minden atomi mondatához egy egész számot rendel, de különböző atomi mondatokhoz különböző számokat rendel.

A2 Ha p atomi mondathoz x szám, a q atomi mondathoz y szám tartozik, és p-nek tagadása (negációja) q, akkor fennáll a következő egyenlőség: $x = -y - 1$

A3 A ’$H(x, y)$’ atomi mondathoz rendelt $f('H(x, y)')$ szám kettőnél nagyobb prím szám akkor és csak akkor, ha $y = j(x, \Delta)$, ahol x időpontot, y pedig időjárást képvisel.

Az igazságfunktoroknak aritmetikai műveleteket feleltetek meg, és az ennek megfelelően lefordított formulák értékelésekor egész számokat kapunk. Az igazságfunktorok aritmetikai fordításakor csak néhány elemi aritmetikai műveletet használok: összeadás, kivonás, szorzás és a ’modulo’ függvényt. Ha egy egész szám kettővel való osztási maradéka nulla, akkor a szám moduló értéke páros, míg minden más esetben a moduló értéke páratlan. Tehát a ’$mod(p, 2)$’ kifejezés p szám kettővel való osztási maradékát jelöli. A ’p’ változó helyén összetett kifejezés is állhat pl: $-1 \times p - 1$ Az alábbi táblázat mutatja az igazságfüggvényeket (logikai funktorokat) egy sorban a nekik megfelelő aritmetikai kifejezéssel.

Igazságfunktorok;az argumentumuk ’p, q’ mondatparaméterekkel kitöltve	Magyarázat	Az igazságérték aritmetikai megfelelője, ahol p és q értékei egész számok lehetnek.
$\sim p$	negáció (a tagadás jele)	$mod(-1 \times p - 1, 2)$
$p\&q$	ÉS kapcsolat	$mod(p \times q, 2)$
$p \vee q$	alternáció (megengedő értelmű vagy)	$mod(1 + (p + 1) \times (q + 1), 2)$

1.18. táblázat. Aritmetikai fordítás

Korábban rögzítettük, hogy W_1 világban az első ütemben nem havazik, majd a következő két ütemben havazik, míg az utolsó időpontban eláll a havazás. Ennek megfelelően egy f függvény – L_1 atomi mondatai egy interpretációja – az alábbi:

Formula	Értékelés	Jelentés
$H(t_1, 0)$	11	Tiszta az idő t_1-kor.
$H(t_1, 1)$	-14	Nem havazik t_1-kor.
$H(t_2, 0)$	-18	Nem tiszta az idő t_2-kor.
$H(t_2, 1)$	19	Havazik t_2-kor.
$H(t_3, 0)$	-24	Nem tiszta az idő t_3-kor.
$H(t_3, 1)$	27	Havazik t_3-kor.
$H(t_4, 0)$	29	Tiszta az idő t_4-kor.
$H(t_4, 1)$	-32	Nem havazik t_4-kor.

1.19. táblázat. Interpretáció

Az aritmetikai fordítás L_1 bármely összetett mondatához meghatároz egy egész számot. Ez alapján az igazság definíciója L_1-ben a következő:

L_1 bármely s mondata igaz pontosan akkor,

(1.6) ha az s-hez tartozó szám páratlan.

Az igazság elektronikus modellje

Most rátérek mostani vizsgálódásom fő céljára, hogy miképp modellálhatók L_1 mondatai, valamint az azok igazságát meghatározó világ véges automatákkal. Hogyan fordítható le Tarski szemantikai zártságot tiltó követelménye az automata modellek világába? Miképp jelenik meg ebben a modellben egy szemantikailag zárt nyelv lehetősége? Igazolhatja-e az elektronikus modell, hogy egy körben forgó gondolatot nem kell minden esetben elvetni. Ennek az automata modellnek meg kell jeleníteni időbeli eseményeket és az azokat leíró igaz mondatok időtlen – azaz időben állandó – igazságértékét. Ha jó a modell, akkor attól függően, hogy miként fest a valóságot reprezentáló modell, mi történik benne és mi nem, más és más L_1 - beli atomi mondatok lesznek igazak.

Az „Esik a hó." állítás kifejezte esemény érzékelésére valamiféle automata is készíthető, így az általa leírható valóság modellálható automatával. Mint korábban rögzítettem, az eseményeket, folyamatokat, tényeket reprezentáló bemenet nélküli automatákat generátornak nevezem.[17]

Jelen esetben egy generátor magas jelszintje azt ábrázolja, hogy esik a hó, alacsony szintje pedig azt, hogy nem havazik. Az, hogy az automata működése mástól nem függ, nincs bemenete, azt fejezi ki, hogy saját magától függnek a dolgok, maga modellálja ama tényt, hogy esik a hó. Ebben a megközelítésben a metanyelvi mondatok helyén a tényeket vagy dolgokat reprezentáló automaták szerepelnek, azon kívül a róluk szóló, tárgynyelvi állításokat képviselő automaták, és a kettő közötti kapcsolatok. A tényeket képviselő automatákat külön kell választani a róluk szóló állításokat reprezentáló automatáktól. Az utóbbiak igazságértékei, függvényei az előbbieknek. Pontosabban egy tárgynyelvi szinten megfogalmazott atomi állítás igazságát a neki megfeleltetett véges automata magas jelszintje képviseli. Ez a jelszint, a tárgynyelvi állítást reprezentáló automata kimeneti jelszintje, függvénye lesz a metanyelvi állítást reprezentáló véges automatának. Utóbbiak lesznek a tények, avagy a valóság modelljei a leírás világában. A leírás és realitás kapcsolatának filozófiai relációját tehát ábrázolhatjuk és magyarázhatjuk nyelvi szintek fölhasználásával, és véges automaták kapcsolatának bemutatásával is. Ez a két lehetőség azonban bizonyos értelemben csalóka. Csak akkor jelenik meg a maga valóságában, ha ezen magyarázat a kibernetikai tér világában is

[17] Valaminek függvényekkel való ábrázolása egy folyamat vagy esemény, míg mondatokkal való megfogalmazása egy tény. A tények lehetnek logikai operátorokkal – és, vagy, ha-akkor – összetettek, ezzel szemben az események, folyamatok nem lehetnek ilyen módon összetettek.

rendelkezésre áll, mint elektronikus dokumentum. Ugyanis csak az utóbbi képes eseményeket, történéseket, azaz az időt bemutatni, és nem csupán leírni. Egy elektronikus dokumentum megjeleníthet változásokat, míg egy papír alapú dokumentum nem. Az előbbi így bemutathatja a leírás és realitás kapcsolatának vetületét a mindennapi lét dimenziójában, míg az utóbbi, a statikus betűk világa ugyanennek az igazság, a magyarázat dimenziójában való vetületét ábrázolja. Ezért a mostani fejtegetés adekvát létmódja az elektronikus formátum és nem a nyomtatott szöveg. A papíron a véges automaták ugyanis nem mint időben működő dolgok, hanem mint ábrák vagy mint függvények és formulák jelentkeznek.

Az igazság, a magyarázatok dimenziójából kilépve a korábbiakat bemutató automata modell a mellékelt elektronikus dokumentum használatával a jelen időben tanulmányozható. A modellben a különböző nyelvi szinteket egy számolótáblázat egyes munkalapjai (worksheet) különböztetik meg. Ekkor a metanyelvi szint (L0 vagy MetaL) befolyásolhatja a tárgynyelvi szintnek megfelelő munkalap formuláinak értékét (kimenetét), de visszafelé nem megengedett a kapcsolat. A tárgynyelvi szintnek megfelelő munkalapon lévő formulák értékei (kimenetei) nem befolyásolhatják a metanyelvi szintet. Ennek a szabálynak a megsértése paradoxonhoz vezethet, mint azt az elektronikus modell további része be is mutatja. A modell a világos megfogalmazás érdekében fölhasználja az elemi logika korábban fölvázolt aritmetikai transzformációját. Az egyes logikai funktoroknak – melyek faktuális értékei ebben az egyszerű esetben csak a jól ismert igazságfüggvények – a számolótáblázat cellái közötti kapcsolatok felelnek meg. A funktorok argumentuma a számolótáblázat bementi értéke, míg a funktor értéke a kimenet, azaz a számítás eredménye. A modell könnyedén lehetővé teszi, hogy W_1 világ történetét különbözőképpen módosítva megfigyeljük, miképp változik ettől függően L_1 nyelv atomi mondatainak igazságértéke.[18]

Figyeljünk föl arra, hogy miközben a modell világában történnek események, a magyarázatok és leírások világában az igazságérték változatlan, állandó. A példa mutatja, hogy a leírások világának modellje kombinációs struktúra, ezzel szemben a tárgyi világ modellje nem az, hanem sorrendi struktúra. Kérdés azonban, hogy csak és kizárólag kombinációs automaták lehetnek-e a helyes magyarázatok és leírások, a logikailag korrekt elméletek modelljei.

Mostani vizsgálódásunk keretei között egyszerű logikai struktúrájú nyelveket használunk. Ezek formalizálhatók az elemi, kvantifikáció nélküli logika eszköztárával. Az ebben előforduló atomi formulákat

[18]A számolótáblázatban az 'Object L' munkalapon lévő '$H(x,y)$' formula kiszámítására szolgáló kifejezés több részből áll. Központi része a $H(x,y)$ relációt valósítja meg, ahol a függvény argumentumában csak a meghatározott négy időpont jele (t_1, t_2, t_3, t_4) állhat. Ez a rész az alábbi:
$HLOOKUP(\$A\$28,'ObjectL'!\$I\$10 : \$L\$11, 2, FALSE)$
majd megvizsgálja, hogy a függvény értéke azonos-e a reláció megfelelő tagjával:
$B28 = (HLOOKUP(\$A\$28,'ObjectL'!\$I\$10 : \$L\$11, 2, FALSE)$
végül azt is ellenőrzi, hogy a $H(x,y)$ reláció második argumentumában megengedett érték $(0,1)$ van e. Ilyen módon a $H(x,y)$ relációnak csak akkor lesz igazságértéke, ha argumentumaiba megengedett értéket írunk, ellenkező esetben hibajelzést kapunk.

igazságfunktorok kötik össze, és az összes igazságfunktor modellálható olyan véges automatákkal, melyeket kombinációs automatáknak neveztem. Ebből következik, hogy ezen szűk határok között megfogalmazható összes L_1 nyelvet használó elmélet és magyarázat is modellálható kombinációs automatákkal. Ezen kívül elfogadható-e bizonyos feltételekkel egy körben forgást tartalmazó elmélet? Ha igen, annak nem kombinációs automata lesz a modellje, hanem sorrendi hálózat. Ésszerű kikötés, hogy az automata legyen ciklikus, és bármely bemeneti állapota egyértelműen határozza meg a kimenet állandósult állapotát.

Tegyük fel, hogy van egy elméletünk melynek modellje egy sorrendi automata. Ez azt jelenti, hogy az elmélet igazságfeltételei nem kombinációs struktúra alapján függnek azoktól a tényektől, amiről az elmélet szól. Ebből az következi, hogy amitől az elmélet tárgyán kívül függ, az a modell, az automata belső állapota. Csakhogy egy elmélet esetén nem kézenfekvő, hogy mit jelenthet a belső állapot. Tárgyak esetén jelentheti a tárgy korábbi történetének lenyomatát, de van-e ennek értelme egy elmélet esetén? Elfogadva azt az automata elméleti föltevést, hogy minden sorrendi automata fölépíthető elemi kombinációs automaták visszacsatolt rendszereként, ha van jelentése az automata modell belső állapotának egy elmélet vonatkozásában, akkor az elmélet igazsága nem csak az elmélet tárgyától, hanem az elmélettől önmagától is függ. Elfogadható-e egy ilyen önigazoló elmélet? Legfeljebb akkor, ha az önigazoló jelleg nem játszik lényeges szerepet, bármennyire is homályos, hogy mi jelent itt a „lényeges szerep”. Ha azt jelenti, hogy az elmélet immunis a külső hatásokra, és némelyik esetben nem ad meg egyértelmű igazságértéket, akkor az az elmélet elfogadhatatlan. Ha nem ad meg egyértelmű igazságértéket, az automata modellben úgy jelenik meg, hogy kimenetének állapota (az elmélet igazságértéke) nem konstans függvény az időben. A nem lényeges szerep pedig azt jelentheti, hogy egy elmélet „végső soron” a tényektől függ, önmaga feltételezett igazságától csak átmenetileg. Az automaták nyelvén ez úgy jelenik meg, hogy az elméletnek megfelelő kétállapotú automata kimeneti állapota hosszú távon csak a bemeneti állapotoktól függ, és nem függ az automata belső állapotától. A modell megerősíti azt a filozófiai sejtést, hogy az igazság mindig valami rajta kívül állónak a függvénye, végső soron sohasem függhet önmagától.

Talányos mondatok

A mindennapi gondolkodásban gyakoriak az olyan önellentmondó logikai szerkezetű mondatok, hogy „minden általánosítás téves” vagy „minden ismeret bizonytalan”. Mivel maguk ezek a mondatok is általánosítások és ismeretek, így ebben a formában aláássák a saját hitelüket. Sok vallás és filozófia is ilyen körbeforgó igazságot állít, és némelykor a tudományos elméletek is magukba foglalják azt a szemléletmódot, igazolási eljárást, amelynek keretei között érvényesek. Polányi Mihály írja: „Az implicit hiedelemrendszerek azért képesek egyenként kivédeni az érvényes ellenvetéseket, mert körben forgók."[19] majd kifejti, hogy ebben az értelemben olykor a tudomány sem mentes az önigazoló jellegtől, a világnézetek pedig egészen nyilvánvalóan védik önmagukat a számukra elfogadhatatlan, az előítéleteiknek ellentmondó hírektől, ismeretektől. A világképek meghatároznak egy látásmódot, sémát a világ értelmezéséről, és megpróbálják csak azokat a benyomásokat, híreket, tudomásul venni, befogadni, amelyek erősítik, tovább építik a meglévő sémát, de legalábbis nem támadják annak alapjait.[20]

A tárgyak és környezetük viszonyához hasonlóan az eszmék világában is működik egyfajta visszacsatoláson alapuló szabályozás. Ezért egyet kell értsünk Polányival és a Duhem-Quine tézissel, hogy a gondolkodásnak van egy bizonyos összefüggő egész, holisztikus jellege. A nyelvi fordulat előtti filozófusok is érzékelték ezt a problémát a saját rendszerükön, amikor látták, hogy az egyes filozófiai problémákat nagyon nehéz, ha nem éppen lehetetlen elkülöníteni egymástól. A körben forgó érvelésnek és szemantikai önreferenciának – a kettő nem azonos – ez a problémája központi jelentőségű minden átfogó filozófiai gondolkodásmód esetén. Ezért ezek a logikai-szemantikai kérdések központi jelentőségűek a filozófia számára. Ezek központi problémája nem egy nehezen kiküszöbölhető ellentmondás. A körben forgó logikájú mondatoknak az a sajátossága, hogy az igazságértékük önmagától is függ, önmaga függvénye. Wittgenstein jól látta ezt a problémát: „Függvény azért nem lehet önmaga argumentuma, mert a függvény jele nem tartalmazza argumentumának prototípusát, márpedig saját magát nem tartalmazhatja. Tételezzük fel példának okáért, hogy az $F(fx)$ függvény önmagának argumentuma lehetne. Úgy lenne egy '$F(F(fx))$' kijelentés is és ebben az F külső függvény és az F belső függvény különböző jelentéssel bírnának, mivel a belső függvény $\varphi(fx)$, a külső függvény $\Psi(\varphi(fx))$ formájú."[21]

Mindazonáltal nem könnyű Wittgenstein érvét megérteni. Egy függvénynek lehet azonos értéke az argumentumában szereplő értékkel. Az a függvény, amely minden számhoz a szám négyzetét rendeli, az 'egy' számhoz az 'egy' számot rendeli, mivel $1^2 = 1$. Még inkább az a függvény, amely minden számhoz önmagát rendeli. Nem arról van tehát szó, hogy nem lehet azonos egy függvény értéke és argumentuma. Amit Wittgenstein állít, az tömören fogalmazva az, hogy a függvény argumentuma más típusú, mint a függvény. Ez arra a függvényre is igaz, amely bármely argumentumához a 'egy' számot rendeli. Vajon ismerte-e Wittgenstein a rekurzív sorozatokat, vagy az automatikában előforduló visszacsatolás problémáit? Ugyanis az eddigi és a további példák egy része épp annak bemutatására szolgál, hogy a 'visszacsatolás' kibernetikai fogalma szorosan kapcsolatos a körben forgás problémájával.

---

[19] Polányi Mihály, Személyes tudás (Personal knowledge). ford. Papp Mária [22] II. 77p.

[20] „. . . minden kritikai bölcsészettörténet írója a maga filozófiai álláspontjából meríti ama kiválogatás elvét, mely szerint némely tanítást fontosnak tart másokkal szemben s bizonyos megállapításokat haladás jeleinek tekint. Teljesen félreértené tehát a bölcsészettörténet mibenlétét, aki művünk történeti vázlataiban épp a 'filozófiai előítéletet' kifogásolná." írja Pauler Ákos, Bevezetés a filozófiába (reprint kiadás)[41] p.67.

[21] Ludwig Wittgenstein, Logikai filozófiai értekezés. Akadémiai, Ford. Márkus György, 3.332, 3.333 [36]

A hazug paradoxont gyakran két olyan mondat segítségével fogalmazzák meg, ahol az egyiket egyvonalas kerettel, a másikat kétvonalas kerettel azonosítják, és a két bekeretezett mondat kölcsönösen egymásra hivatkozik. Ha ez a hivatkozás a mondatok igazságát teszi egymástól függővé egy zárt körben, akkor ezek a mondatok semmit sem mondanak a kettejük alkotta körön kívüli világról. Ez alkotja a két különös mondat alkotta talány lényegét, és az teljesen mellékes, hogy a két mondat egymás igazságát vagy hamisságát állítja. (Az ilyen mondatokat nevezi Kripke nem megalapozottnak.) Alább egy olyan mondatpár szerepel, ahol a mondatok kölcsönösen igazolják egymást.

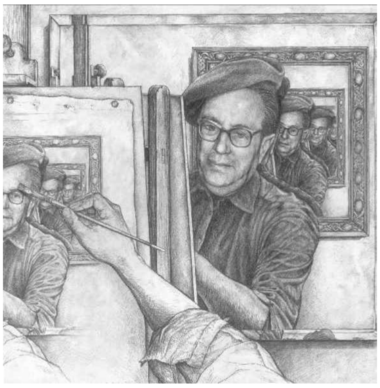
$\boxed{\text{A duplakeretes mondat igaz.}}$ $\boxed{\boxed{\text{A szimplakeretes mondat igaz.}}}$

Ha egy igaz mondatot a valóság hű tükörképének tekintünk, akkor a fenti két mondatnak két egymással szembefordított tükör felel meg, amit a mellékelt rajz szemléltet, egy fontos eltéréssel. A rajzon azért látható egyáltalán valami, mert a két tükör nincs pontosan egymással szembe fordítva. Ha a keretes mondatok logikájának megfelelően csak és kizárólag egymást tükrözné vissza a két tükör, és semmi sem szivárogna be a külső világból, akkor a két tükörben a sötétségen vagy a világosságon kívül semmi sem látszana. Az igazság mindig valami rajta kívülinek a függvénye, miképp a tükör is csak akkor tükröz, ha kifelé irányul. Ezzel szemben a fenti keretes mondatokat igaznak és hamisnak is tekinthetjük, semmi sem nyújt fogódzót, igazodási pontot. Ha igaznak tekintjük őket, annak megfelel az az eset, amikor a két pontosan egymást tükröző tükörben csak a fényesség látszik, amikor pedig a sötétség, az annak megfelel az, amikor a tükrök közé nem jut be a fény.

További példák

1. A hazug paradoxon.

Az elektronikus modellben két munkalap LiarObj. és LiarMeta. foglalkozik az ismert paradoxonnal. Az első a tárgynyelvi, a második a metanyelvi szintet jeleníti meg. A metanyelvi szinten lévő atomata Y_1 kimenete 1 értékű, ha esik a hó a modell piciny véges világában, és $Y_1 = 0$ ha éppen nem havazik. Y_3 a szimplakeretes mondatot, Y_4 a dupla keretes mondatot jelképező automata kimenete. Ezek értéke 1, ha a mondat igaz, 0 ha hamis. A számítógép gombnyomogatására múlik az idő. Hogy mikor havazik és mikor nem, az attól függ, miképp írjuk elő a modell véges világának történetét. Az 'Output Function' nevű táblázat időpontok (t_1, t_2, t_3, t_4) alatti helyekre beírt '0' vagy '1' jelek határozzák meg, hogy mikor havazik és mikor nem. Az alatta lévő sorokban rendre a 'hazug', a szimpla keretes, majd végül a dupla keretes mondat igazságértékének aritmetikai fordítása látható. A 'hazug' értéke $Y_2 = 17$ ha igaz, és $Y_2 = -18$ ha hamis. A szimplakeretes mondat értéke $Y_3 = 19$ ha igaz, és $Y_3 = -20$ ha hamis, a duplakeretes mondat értéke $Y_4 = 23$ ha igaz, $Y_4 = -24$, ha hamis. A tárgynyelvi szintet (a vizsgált nyelvi szintet) képviselő automaták bemeneti értékei a metanyelvi szint kimeneti értékeitől függnek. A 'hazug' tárgynyelvi fordítását képviselő automata kimenete a munkalap C_4 cellája, bemenete az A_4 cella, a szimplakeretes mondat tárgynyelvi fordítását képviselő automata kimenete a munkalap a C_6 cellája, bemenete az A_6 cella, a duplakeretes mondat tárgynyelvi fordítását képviselő automata kimenete a C_8 cella, bemenete az A_8 cella. A cellákba kattintva láthatjuk az összefüggéseket. Ezeket követve láthatjuk, a 'hazug'-nak megfelelő automatának akkor lenne időben konstans kimeneti állapota, ha találnánk olyan egész számot, amelyik páros is és páratlan.



1.6. ábra. Papp S. Balázs: Tükörben

2. Vegyünk szemügyre néhány másik hasonlóan körben forgó logikai struktúrájú mondatot. Vizsgáljuk meg a középkori francia filozófus, Buridan egyik nevezetes szofizmáját, melynek lényeg a következő.

(1) Isten létezik.

(3) Sem (1) sem (3) mondat nem igaz.

(3) 'vagy-nem' kapcsolatot állít, mivel a 'nem p és nem q' ekvivalens a 'nem (p vagy q)' logikai struktúrával. A vagy-kapcsolat egyik összetevője egy létezési állítás, a másik összetevője pedig a vagy-kapcsolat önmaga. Az előbbit képviselje 'p', az utóbit pedig 'q' formula. Tehát p =: Isten létezik, q =: Sem az első, sem a második mondat nem igaz. Ezért 'p' igaz ha Isten létezik, hamis más esetben, és 'q' igaz ha sem p sem q nem igaz. Úgy fejezhetjük ki, hogy $|q| = |\text{ nem } (p \text{ vagy } q)|$, ahol az azonosság két oldalán formulák igazságértékei (faktuális értékei) szerepelnek. A formula azonban nem fejezi ki eléggé az önmagára való vonatkozás, a körben forgás tényét. Ezt visszacsatolással modelláltam a 1.4. ábrán bemutatott automata segítségével. Ott az egyik bemenet magas szintű ha Isten létezik, a másikra pedig az automata kimeneti állapota kerül vissza. A vagy-nem logikai funktornak a '$(p + 1) \times (q + 1)$' aritmetikai formula felel meg, aminek helyességét az elektronikus modellben ellenőrizhetjük. A visszacsatolást úgy fogalmazhatjuk meg formulával, hogy a szorzat értéke moduló-ekvivalens a szorzat egyik összetevőjével. Legyen ugyanis '$p \equiv q$' kifejezés annak a jele, hogy $mod(p, 2) = mod(q, 2)$, azaz vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan. Ekkor az aritmetikai modell alapján lefordítva Buridan istenérvét az alábbi aritmetikai állítást kapjuk: $q \equiv (p + 1) \times (q + 1)$. Ennek csak akkor van megoldása, ha p páratlan, de q páros. Visszafordítva ezt az eredményt azt kapjuk, hogy

(1) igaz, viszont (3) hamis kell legyen, máskülönben ellentmondásba keveredünk. Pontosan ez derül ki az elektronikus modell kipróbálásával is. Az elektronikus modellben a BurdianObj. és a BurdianMeta. munkalapok tartalmazzák a megfelelő automata modellt. Utóbbiban ábrázoltam egy véges világot. Ebben a világban három jellemző van: az első minden időben állandó $y_1 = 10$ értéke fejezi ki Isten létét, a második $y_2 = TRUE$ ha a (3) nevű mondat igaz, és $y_3 = 1$ ha esik a hó. Ha tagadjuk Isten létét, amit úgy fejezhetünk ki ebben a modellben, hogy t_1, t_2, t_3, t_4 időpontok valamelyikében y_1 értéke nem 10, akkor y_2 jellemzőnek, (3) mondat igazságértékének nincs időben állandó értéke, miközben múlik az idő F9 gomb lenyomására.

3. Vizsgáljuk meg a következő négy mondat igazságértékét.(Kühnberger példái)[22]

János hamburgert eszik, és ez a mondat nem igaz.

János hamburgert eszik, vagy ez a mondat nem igaz.

Ha János hamburgert eszik, akkor ez a mondat nem igaz.

Ha ez a mondat nem igaz, akkor János hamburgert eszik.

A mondatokat zárójelbe tett betűkkel elnevezve az alábbiakat kapjuk:

(a) János hamburgert eszik, és az (a) nevű mondat nem igaz.

(b) János hamburgert eszik, vagy az (b) nevű mondat nem igaz.

(c) Ha János hamburgert eszik, akkor a (c) nevű mondat nem igaz.

(d) Ha a (d) nevű mondat nem igaz, akkor János hamburgert eszik.

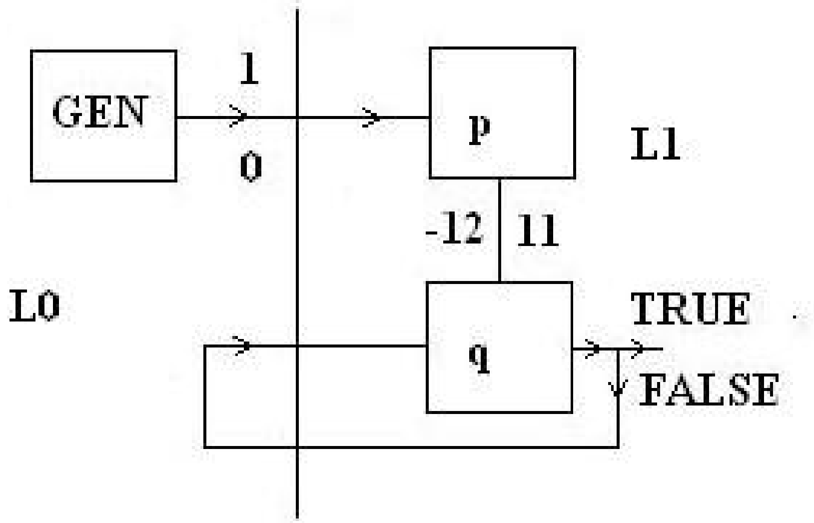
Vezessük be azt az interpretációt, hogy $p :=$ János hamburgert eszik, $q :=$ Ez a mondat nem igaz. A négy mondat háromféle kétváltozós igazságfunktort tartalmaz: ÉS, VAGY, Kondicionális. Eltekintve a négy mondatban előforduló igazságfunktorok egyedi sajátosságaitól, mind a négy esetben egy $p \otimes q$ szerkezetű mondat állít valamit saját magáról. Az első (a) esetben $\otimes := \&$ a másodikban $(b)\otimes := \vee$ a harmadikban $(c)\otimes :=\rightarrow$ a negyedikben $(d)\otimes :=\leftarrow$ Egy táblázattal megkísérelhetjük leírni az igazságfüggvényeket mind a négy esetben. Ez azonban nem fejezi ki 'q' mondat igazságértékének önmagától való függését. Egy $nem - q = p \otimes q$ szerkezetű formula szintén híján van az önmagára utalás képességének, viszont egy visszacsatolást tartalmazó digitális automata képes erre.

[22] Kühnberger i.m. 15.o.

p	q	(a)	(b)	(c)	(d)
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

1.20. táblázat. János Hamburgert eszik

Legyen egy generátor kimenete H értékű, ha János eszik, és más betű, ha nem eszik. A 'p' jelű automata 1 (igaz) szintet ad ki, ha a bemenetére 'H' jel érkezik, és 0 jelet (hamis) máskor. A $\otimes$ jelű automata rendre a fenti igazságfüggényeket valósítja meg úgy, ahogy azt a táblázat mutatja. A $\otimes$ jelű automata egyik bemenetére p-nek a kimenete, a másikra viszont a saját kimenetének tagadása kerül visszacsatolva. Lásd 1.7. ábra.



1.7. ábra. János hamburgert eszik

Az elektronikus modell John-0 munkalapja öt jellemző állapotát mutatja. A C_3 cella értéke $= H$ ha János hamburgert eszik, míg más betű, ha nem. Az ötödik, hetedik, kilencedik és tizenegyedik sor arról tájékoztat, hogy az 'ez a mondat nem igaz' mondatot igazra vagy hamisra értékelve, az ellenkezőjére következtetünk. A mondat csak akkor tekinthető állításnak, csak akkor van igazságértéke, ha ez az értékelés az időben konstans eredményt ad. Jelen esetben csak egyetlen tényt változtathatunk szabadon a modellben, a John-0 munkalapon, hogy eszik-e János. Eme tény összes következménye már adódik a feltételekből, amit a John-1 munkalapon ellenőrizhetünk. A következőt tapasztaljuk: (d) mondat mindig igaz, (b) mondat igaz, ha János hamburgert eszik, viszont ekkor (a) és (c) nem rendelkezik állandó értékkel, ha viszont János nem eszik, akkor (a) hamis és (c) igaz, de (b) meghatározatlan, paradox mondat.

4. A következő példa Kripkétől származik.[23]

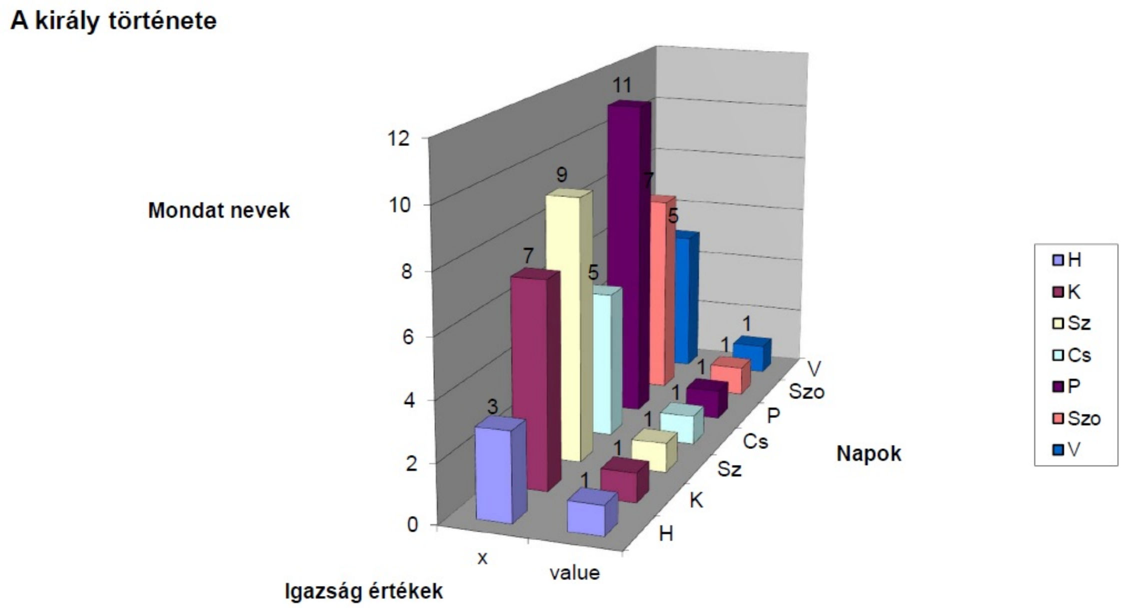
[23] Saul Kripke, „Outline of a Theory of Truth" in Martin, Robert L. eds. : Recent Essays on Truth and the Liar Paradox (1984) Oxford University Press, New York

Jones csak azt az (a) mondatot állította a Watergate ügyről, miszerint Nixon állításainak a többsége a Watergate ügyről hamis. Nixon viszont azt a (b) mondatot állította, hogy minden amit Jones mond igaz, és még négy másik állítást is tett az ügyről. Vizsgáljuk meg mi az igazságértéke Jones (a) nevű és Nixon (b) nevű mondatainak attól függően, hogy az egykori elnök hány állítása hamis vagy igaz. Az elektronikus táblázat Nixon-0 munkalapja tartalmazza a lehetséges tényeket. Feltételezzük, hogy Nixon 'sentence1, 2, 3 és 4' nevű mondatai igazságértékkel rendelkeznek, és ezek számától függően megvizsgáljuk a következményeket, melyek a Nixon-1 munkalapon láthatók. Ha Nixonnak csak egy vagy kevesebb mondata igaz a négyből, akkor a modell szerint mind (a) mind (b) igaz. Ha viszont Nixonnak csak egyetlen, vagy kevesebb hamis állítása volt, akkor viszont mind (a) és mind (b) hamis. Abban az esetben, amikor fele-fele arányban oszlanak meg Nixon igaz és hamis állításai, akkor sem (a) sem (b) nem bír állandó értékkel, így nem tekinthetők állításnak. Mindezeket bemutatja a modell, melynek az imént írtam le a működését egy alkalmas közlési nyelven. Ez a közlési nyelv az eredeti probléma nyelvi szintjéhez képest meta-metanyelvi szintű, cáfolata Kripke azon véleményének, miszerint a Tarski féle igazság koncepció nem buldogul az ismertetett példával.

5. Különösen érdekes a következő feladvány. Egy király, aki mindössze egy hétig uralkodott, és a hét minden napján csak egyszer, egyetlen állítás erejéig szólalt meg, az ötödik napon a következőt mondta:

A király mindig igazat mond.

A kérdés az, hogy igazat mondott-e vagy hamisat ezzel a mondattal? Tegyük fel, hogy pontosan ismerjük e-király történetét, és így azt is tudjuk, mikor mit mondott. Ebben az esetben időben kiterítve, mintegy négydimenziós térben ábrázolhatjuk az eseményeket. Események lesznek a megszólalások, de nem a megnyilatkozások által kifejezett állítások (propozíciók). Utóbbiak igazságértékei időtlenek. Akkor miképpen ábrázolható a kimondásuk? Nem egyértelmű az sem, miképp értette a király a mondatot. Ha a mondat csak a kimondása előtt és után elhangzott más mondatokra vonatkozik, akkor igazsága nem tartalmaz körbeforgást, és egyértelmű függvénye az eseményeknek. Amennyiben ettől eltérően a mondat önmagára is vonatkozik, akkor sajnálatos módon két választásunk van. Ha a király minden más mondata igaz volt, akkor ezt a mondatot is igaznak tekinthetjük. Vélekedhetünk azonban úgy is, hogy bármit is mondott a király más alkalmakkor, ez a mondata hamis, mert megsért bizonyos logikai elveket. Ha ebben igazunk van, akkor legalább egyszer hamisat mondott a király, és így ez a tény önmagát is alátámasztja. A megoldás vázlatát a korábbi 1.5. ábra, a további részleteket az elektronikus modell king0 és king1 munkalapja ábrázolja. A második a tárgynyelvi szintnek megfelelő automata, míg az első (king0 munkalap) a metanyelvi szint. Ennek az 'output function' nevű táblázat meséli el a király történetét, hogy melyik nap mit mondott. A táblázat nem magukat a mondatokat, hanem a mondatok neveit tartalmazza. A mondatok nevei az egyszerűség kedvéért számok. A számokat olyan módon választottam meg, hogy az igazaknak páratlan számok, míg a hamisaknak páros számok felelnek meg. A harmadik sorban lévő 'value' érték ezt ábrázolja. Ha a pénteki nap kivételével megváltoztatjuk a király valamelyik nap mondott mondatát, azaz egy más számot írunk a második sorba,



1.8. ábra. A király története

akkor megváltozhat az igazságérték is. Próbáljuk ki, de a pénteki nap értékét ne módosítsuk, mert a pénteken elhangzott mondat jelentése rögzített. Ez a mondat tárgynyelvi szinten, a king1 munkalapon található, és a pénteki megnyilatkozáshoz tartozó cella értéke ide mutat. Figyeljük meg, ha csak egyszer hamisságot adunk a király szájába, örökre megváltozik annak a mondatnak az igazságértéke, hogy 'A király mindig igazat mond.' Ezen mondat értéke 11, ha igaz, -12 ha hamis. A tárgynyelvi (king1 munkalap) szinten lévő E2 cella értéke mutatja 'A király mindig igazat mond' mondat igazságértékét. A cellába kattintva láthatjuk az összefüggéseket. A 'mindig' azt jelenti, hogy uralkodása hetének mind a hét napján. Figyeljük meg, hogy ha valamelyik nap hamisat mondott a király, akkor utána nem tudjuk meg nem történtté tenni ezen esemény hatását. Hiába változtatjuk vissza a modellben pl. a hétfőn mondott mondatot igazra, a metanyelvi szinten megjelenő automata kimenete többé nem lesz igaz. Egyedül az egész táblázat újra kinyitása segít, mintegy újra indítva a modellt. A 1.8. ábrán egy színes grafikont is találunk. Ennek egyik dimenziója ábrázolja a király napjainak idejét, és a napokon elhangzott mondatokat, míg a másik, vízszintes dimenzióban a mondatok időtlen igazságértékeit láthatjuk (1=igaz, 0=hamis).

Összefoglalás

Egy körben forgó logikai szerkezetű mondat esetén három feladatot kell megoldani:

(a) Leírni a jelenséget. Ez természetes nyelven könnyen sikerülhet, és számos megoldás van a probléma tárgyalására a fuzzy halmazoktól a kvantummechanikáig.[24] Én arra tettem javaslatot, hogy a problémát ne formulákkal, hanem működő modellekkel írjuk le. Ilyen modell lehet egy fizikailag létező digitális áramkör, vagy egy elektronikus dokumentum is.

(b) Feltárni, hogy mi a baj ezzel a mondattal.

(c) Javaslatot tenni a hasonló problémák elkerülésére.

A most vizsgált talányos mondatokat csak szemantikailag zárt nyelven lehet megfogalmazni. Ezért ha elkerüljük a szemantikailag zárt nyelvek használatát, akkor nem fenyeget az ilyen típusú paradoxonok réme.[25] Az a kérdés azonban nyitva marad, hogy miért nem. Megkíséreltem megmagyarázni a jelenséget a probléma átfogalmazásával a véges automata modellek segítségével. Azt állítottam, hogy a körbeforgó logikai szerkezetű mondat nem állítás, hanem egy jelenség, és ezért az időben modellálható olyan módon, amilyen módon sok más időbeli jelenség is modellálható. Erre alkalmasak a véges automaták vagy a nekik megfelelő digitális áramkörök, illetve az ezeket szimuláló számítógépes programok. Ezekkel:

(1) Le lehet adekvát módon írni egy körbeforgó logikai szerkezetű mondatot.

(2) Lehet egy magyarázatot adni arra, hogy miért hiba ha egy gondolat körbeforgó? A hiba a mindennapi és az igazság dimenzió egybemosása.

(3) Bármilyen véges bonyolult mondat halmazról, amelyik modellálható véges automatával, véges sok lépésben el lehet dönteni, hogy tartalmaz-e körbeforgó logikai szerkezetű mondatot.

[24] A paradoxon újabb megközelítéseit ismerteti Szabó Zoltán „Paradoxon vagy antinómia?" in. Tertium non datur (Válogatott logikai-metodológiai tanulmányok 1984-1990) (2000) Osiris, Bp. 212-230 o. Első megjelenés: Tertium non datur, 5 (1988), 77-88 o. ; angolul J. Barwise and J. Etchemendy, The Liar. An Essay on Truth and Circularity, Cambridge 1987, CSLI Lecture Notes.

[25] Nevezetes tanulmányában Tarski így fogalmaz: „ …nem létezhet olyan ellentmondásmentes nyelv, amelyre érvényesek a logika szokásos törvényei, és amely emellett kielégíti a következő feltételeket: (I) tetszőleges mondat mellett, amely a nyelvben előfordul, az illető mondatnak egy bizonyos egyedi neve is hozzátartozik a nyelvhez; (II) minden olyan kifejezést, amely úgy keletkezik, hogy »x igaz akkor és csak akkor ha p.«-ben a 'p' szimbólumot a nyelv tetszőleges mondatával, az 'x' szimbólumot pedig az illető mondat valamely egyedi nevével helyettesítjük, a nyelv igaz mondatának kell elfogadnunk; (III) a szóban forgó nyelvben megfogalmazható és igaznak elfogadható egy empirikusan megalapozott és α-val azonos jelentésű premissza." (Ahol α: 'c nem igaz mondat' azonos c-vel.) Tarski „Az igazság fogalma a formalizált nyelvekben" (ford. Máté András és Ruzsa Imre) in: Bizonyítás és igazság, Gondolat, Budapest. 1990. 73. o.

Ezzel nem a szemantikai paradoxonok univerzális elkerülésre tettem javaslatot. Elsődleges célom a leírás, modellálás, annak a megjelenítése, hogy gondolatok, mondatok egy véges halmaza körkörös logikai kapcsolatot tartalmaz. Ha a javasolt modell kimutatja, hogy a mondatok egy halmaza adott tulajdonságú, akkor a mondatok bizonyosan körben forgóak, de nem állítom, hogy minden hibát képes kimutatni. Meglehet, hogy adott esetben a mondatoknak az az elemzése, amire a véges automata modell képes, nem elégséges. Ugyanakkor a véges automata modellekkel világosan ki lehet mutatni, hogy a szemantikailag zárt nyelv lehetősége olyan automatáknak felel meg, amelyek nem kombinációs struktúrájúak, és adott esetben nincs állandó kimeneti állapotuk. Elképzelhető, hogy a szemantikai zártságot megengedő nyelvek vagy elméletek helyes mondatainak olyan sorrendi hálózatok felelnek meg, melyeknek kimeneti állapota az állandósult állapotban csak a bemeneti állapotoktól függ, a belső állapottól nem. Ezzel szemben a hibás mondatoknak megfelelő automatáknak nincs minden bemenetre állandósult állapota, vagy ha van, az nem mindig függvénye a bementi állapotoknak. Hasonlóan ahhoz, amit Kai-Uwe Kühnberger sejtet, miszerint egy elfogadhatatlan körbeforgó logikai szerkezetű mondat nem alakítható át jólfundált formára.[26]

[26]„Conjecture 2.6.1 A circular entity is pathological if it does not allow an appropriate representation that is well-founded in the mathematical sense of wellfoundedness.” Kühnberger i.m. 41. o.

1.3. Kripke ellenpéldája

Megjegyzés Tarski igazság koncepciója állítólagos korlátairól

Előhang

1977. október 25-én beküldtem egy pár oldalas írást a Magyar Filozófiai Szemlének, amelyik a hazug paradoxont tárgyalta új megközelítésben. Azt állította, hogy a paradoxon logikai szerkezete hasonlít az egyszerű villanycsengő működéséhez, leszámítva a fizikai eszköz működésének időbeli jellegét. A csengő karja akkor van meghúzva, ha előtte nem volt, és fordítva, ha nincs meghúzva, akkor a következő időpontban egyet kondul a csengő. Meglepő módon Kéri Elemér professzornak tetszett az ötletem, de azt javasolta, hogy egészítsem ki a probléma történetének bemutatásával és magyarázzam el jobban, akkor leközlik. Engem azonban kevéssé érdekelt a probléma története, és sajnos nem tudok – azóta sem tudok – jól magyarázni, olyanoknak beszélek érthetően, akik maguk is hasonlókat gondoltak. Írásomat megmutattam Ruzsa Imre professzornak is, aki figyelmesen elolvasta, de tévesnek, alapvetően elhibázottnak találta. Adott nekem egy mindössze egy oldalas tömör megjegyzést arról, hogy Tarski szellemében hogyan kellene helyesen kezelni az igazsággal kapcsolatos filozófiai-logikai problémákat. Megéreztem, hogy valamit nem értek kellő mélyen, és ezért egy ideig nem foglalkoztam tovább a problémával. De hiába olvastam el úja és újra Ruzsa megjegyzését, nem értettem. Pontosabban minden szavát értettem, csak a lényeget nem. Azóta számos felületes, sőt alapvetően elhibázott vagy egyenesen hajmeresztő értelmezését olvastam Tarski igazság elméletének, még jelentős, neves filozófusok részéről is. Csaknem húsz év múlva értettem meg a Tarski féle igazság felfogás logikai-filozófiai lényegét, és most már értem egykori tanárom megjegyzését, látom, hogy igaza volt. Ugyanakkor az évek során a probléma nem hagyott nyugodni, újra és újra megfogalmaztam az ötletemet, mindig egy kicsit másképp. Több írásom is tárgyalta a szemantikai paradoxonokat, olyan is volt, ami megjelent. Most újra nekifutok.

I. A probléma bemutatása

Saul Kripke említi nagy hatású tanulmányában a következő tanulságos ellenpéldát, melyen Kripke szerint Tarski igazság felfogása elbukik.[27] Hogyan értékeljük az igazságérték szempontjából az alábbi megnyilatkozásokat, ahol Jones (c2) és (c6) mondatot, Nixon pedig a (c3), (c4) és (c5) mondatokat állította: Jones

[27] "Most (i.e., a majority) of Nixon's assertions about Watergate are false. . . . Everything Jones says about Watergate is true." Saul Kripke, "Outline of a Theory of Truth" [18] Megtalálható a neten, de benne van a Robert L. Martin által szerkesztett "Recent Essays on Truth and the Liar Paradox" könyvben (1984) [21] pp. 53-81. Legújabb munkájában visszatér a kérdéshez: "Ungroundedness in Tarskian Languages" [19]. Tarski írásai "Bizonyítás és igazság" címmel jelentek meg 1990-ben [33]. Jon Barwise és John Etchemendy "Liar" [16]c. könyve szintén alapműve a témának. Anil Gupta és Nuel Belnap "The Revision Theory of Truth" [12] c. könyve sajátos felfogást mutat be. A klasszikus felfogással kapcsolatban érdemes elolvasni Quine The Ways of Paradox [27] c. könyvét is.

ezeket mondta:

(c2) Nixon Watergate-ügyről tett nyilatkozatainak többsége (több mint a fele) hamis.

Ezen kívül Jones a 'mondat6' mondatot mondta, melynek neve (c6), igazságértéke $b6$.

Nixon ezeket mondta:

(c3) Jones minden Watergate-ügyről tett állítása igaz.

Ezen kívül Nixon a 'mondat4' és 'mondat5' mondatokat állította, ezek nevei rendre (c4) és (c5), igazságértékei $b4$ és $b5$. A három független mondat (mondat4, 5 és 6) sem direkt sem közvetve nem vonatkozik a történet szereplői mondataira, azaz nem utal sem (c2)-re sem (c3) ra.

Tekintsük rögzítettnek, hogy melyik mondatot mondta Jones és melyiket Nixon. Így az is rögzített, hogy Nixon állította a 'mondat4' és 'mondat5' mondatokat, míg a 'mondat6' mondatot Jones mondta. Az 1.21. táblázattal így ábrázolhatjuk, hogy melyik mondatot ki mondta:

Mondat-személy reláció	Jones	Nixon
(c2) Nixon Watergate-ügyről tett nyilatkozatainak többsége hamis.	$d2 = 1$	$e2 = 0$
(c3) Jones minden Watergate-ügyről tett állítása igaz.	$d3 = 0$	$e3 = 1$
(c4) mondat4	$d4 = 0$	$e4 = 1$
(c5) mondat5	$d5 = 0$	$e5 = 1$
(c6) mondat6	$d6 = 1$	$e6 = 0$

1.21. táblázat. Jones és Nixon mondatai

II. Az értékelés alapgondolata

A (c4), (c5) és (c6) mondatoknak az értékelése független tény, nem függ sem Jones, sem Nixon semelyik mondatától. Figyeljük meg, mind (c2) mind (c3) mondat használja az 'igaz' vagy a 'hamis' predikátumot, és mindkét mondat igazságértéke valamilyen módon a másik igazságértékétől is függ. Ezek alapján a (c2) és (c3) mondatok igazságértéke csak és kizárólag a 'mondat4, mondat5 és mondat6' mondatok igazságértékétől, illetve a (c2) és (c3) mondat kölcsönösen egymásra való hivatkozásától függ. A mondatok közül azonban kizárólag a 'mondat4, mondat5 és mondat6' állításokat értékelhetjük szabadon, a (c2) és (c3) mondatokat nem. A (c2) és (c3) mondatok igazságértéke valahogy következik a mások három értékeléséből, bár még nincsen módszerünk annak pontos meghatározására. Annyi belátható, hogy (c4), (c5) és (c6) mondatok igazságértékei határozzák meg, hogy van-e, és mi az igazságértéke Jones (c2) és Nixon (c3) mondatának. Ez összesen nyolc variációt jelent, a következőkben valamennyi esetet megvizsgáljuk. A kérdés az, hogy milyen nyelven és milyen eszközökkel tehetjük meg ezt? Hogyan tudjuk Jones (c2) és Nixon (c3) mondata igazságértékét meghatározni? Vizsgáljuk ezt meg közelebbről.

Nixon szerint Jones minden mondata igaz. Mivel Jonesnak összesen két mondata van, ezért Nixon az alábbit állítja: Jones minden Watergate-ügyről tett állítása igaz pontosan akkor, ha Nixon Watergate-ügyről tett nyilatkozatainak többsége (több mint a fele) hamis és 'mondat6' igaz. A jelölések fölhasználásával jobban látjuk a logikai kapcsolatokat.

Nixon: (c3)-igaz pontosan akkor ha (c2)-igaz és (c6)-igaz

Jones komplikáltabb állítást tett Nixon mondatairól. Szerinte Nixon mondatainak többsége hamis. Nixon három mondatot mondott. Csak úgy lehet ezek többsége hamis, ha legfeljebb egyetlen igaz a háromból. De mi van akkor, ha nem csak a többsége, hanem Nixon valamennyi állítása hamis? Mi a helyzet, ha Jones (c6) mondata is hamis? Milyen módon lehet valamennyi lehetőséget kiszámítani? Milyen nyelven lehet a feladatot úgy megfogalmazni, hogy könnyen számba vehessük az összes eshetőséget? Az alábbi táblázat összefoglalja az eddigieket és bemutatja a következőkben alkalmazott mondat értékeléseket. A 1.22. táblázat jobb oldali oszlopában $e2 \times b2 = 1$ ha $b2$ igaz és Jones állította (c2) mondatot, $e3 \times b3 = 1$ ha $b3$ igaz, és Jones állította (c3) mondatot, stb.; a második sorban $b3 = 1$, pontosan akkor, ha a Jones által állított valamennyi mondat igaz. Nixon mondatainak száma $e9$.

Mondat	Értékelés
(c2) Nixon Watergate-ügyről tett nyilatkozatainak többsége hamis.	$b2 =$ Ha $((0,5 > (e2 \times b2 + e3 \times b3 + e4 \times b4 + e5 \times b5 + e6 \times b6)/e9);$ akkor $b2 = 1;$ más esetben $b2 = 0)$
(c3) Jones minden Watergate-ügyről tett állítása igaz.	$b3 =$ (Ha $d6 = 1;$ akkor $b6;$ más esetben $1) \times$ (Ha $d5 = 1;$ akkor $b5;$ más esetben $1) \times$ (Ha $d4 = 1;$ akkor $b4;$ más esetben $1) \times$ (Ha $d3 = 1;$ akkor $b3;$ más esetben $1) \times$ (Ha $d2 = 1;$ akkor $b2;$ más esetben $1)$
(c4) mondat4	$b4 = 0$ vagy 1
(c5) mondat5	$b5 = 0$ vagy 1
(c6) mondat6	$b6 = 0$ vagy 1

1.22. táblázat. Mondatok igazságértékei

III. A klasszikus felfogás korlátai

Alfred Tarski alapvető belátásait követve, nincsen vezérfonalunk abban az irányban, hogy a Jones által használt igazság fogalmat helyezzük el az első metanyelvi szinten, és a Nixon által használt igazság fogalmat eggyel feljebb, egy második metanyelvi szinten, vagy éppen fordítva. Az ugyanis nyilvánvaló, hogy mivel mindkét igazságfogalom terjedelmébe beletartozik a másik igazság predikátum egy alkalmazása, a két metanyelvi igazság predikátum nem lehet egyazon metanyelvi szinten. Ezt méltán hangsúlyozza Kripke ama nevezetes tanulmányában. A Tarksi által megrendszabályozott formális nyelven a fenti érvelés, a nyelv keretei között, annak részeként, valamilyen Tarskiánus igazságfogalmat alkalmazva meg sem fogalmazható. Ebben is igaza van Kripkének. (Az más kérdés, hogy ez a korlátja a klasszikus felfogásnak erény-e vagy hiba? Szerintem erény.) Abban viszont sem Kripkének, sem másoknak, akik alternatív igazság koncepciót dolgoztak ki, nincsen igaza, hogy a szokásos Tarskiánus logika felfogásában maga a jelenség, ahogy a szemantikai paradoxonok megjelennek, ne lenne leírható, modellálható. Ebben az esetben a paradoxont jelenségként, egyfajta esemény sorozatként fogjuk fel, és nem pedig egy helyesnek tekintett logikai nyelv keretei között megfogalmazott érvelésként. A következőkben többféle modellt is bemutatok, ahol a modellek viselkedése szimulálja azt a jelenséget, amikor szemantikai paradoxonokba ütközünk. Tehát nem egy újabb formális nyelvet konstruálok, hanem modelleket, melyekkel metanyelvi szinten, szemantikai értékelő függvényeket alkalmazva, de a klasszikus logika keretei között maradva írom le a jelenséget. A modellek szimulálják a szemantikai jelenséget. A modellek nem az ’igaz’ és ’hamis’ szavakat használják, hanem az ezeknek megfelelő ’1’ és ’0’ jelsorozatokat. Némelyik esetben az ’1’ és ’0’ számjelek puszta karakterek, más esetben számokat jelentenek. Utóbbi eset akkor áll fenn, amikor aritmetikai függvényekkel kapcsolatban használom azokat.

IV. Aritmetikai transzformáció

Tetszőleges s mondat igazságértékét $|s|$ jelöli. A ξ függvény az igazságértékekhez számokat rendel, az hamishoz a nullát, az igazhoz az egyet.

(4.1) $c2$ pontosan akkor ha $0,5 > (\xi|c3| + \xi|c4| + \xi|c5|)/3$

(4.2) $c3$ pontosan akkor ha $c2$ és $c6$

(4.3) $c2$ pontosan akkor ha $0,5 > (\xi|c2| \times \xi|c6| + \xi|c4| + \xi|c5|)/3$

Bevezetve a kézenfekvő definíciókat: $b2 := \xi|c2|; b3 := \xi|c3|; b4 := \xi|c4|; b5 := \xi|c|; b6 := \xi|c6|$; ezt kapjuk.

(4.4) $b2 = \xi|0,5 > (b2 \times b6 + b4 + b5)/3)|$

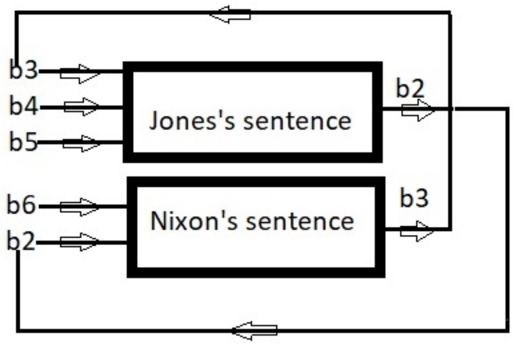
Az egyenlet legegyszerűbben táblázatkezelő programok alkalmazásával oldható meg, melynek segítségével az alábbi igazságtáblázatot kapjuk. Emlékeztetünk arra, hogy $b2$ Jones mondta értéke, és $b3$ Nixon mondata értéke, ahol $b2$ ismeretében $b3$ könnyen kiszámolható: $b3 = b2 \times b6$ Ahol nincsen megoldás – nincs fix pont – ottan a táblázatkezelő nem ad állandó értéket, hanem ingadozik a 0 és 1 értékek között.

mondat6	mondat5	mondat4	Jones mondata	Nixon mondata
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	Nincs fix pont	Nincs fix pont
1	1	0	Nincs fix pont	Nincs fix pont
1	1	1	0	0

1.23. táblázat. Mondatok értékelése

V. Véges automata modell

Az 1.9. ábra mutatja, hogy a mondatok összefüggéseit digitális áramkörök összefüggéseivel is szimulálhatjuk. Az ábra szerint az áramkörök kimeneti állapota önmagától is függ. A visszacsatolás az igazság értékek cirkularitását szimulálja. Az ilyen visszacsatolt áramköröket sorrendi hálózatoknak nevezik, mert működésük nem írható le egyszerűen a bemeneti jelek függvényeként. Leírásukra nem alkalmas az igazság függvények nyelve, más matematikai eszközre van szükségünk. A korábbiak alapján elkészítjük a



1.9. ábra. Elektronikus modell

probléma Mealy féle véges automata szimulációját. Az automata kimenete Jones és Nixon mondata értéke, bemenete a többi mondat értéke. Az automatának két belső állapota van, melyek a mondatok értékelése szituációit szimulálják.

(5.1) kimenet $=\lambda($bement, belső állapot$)$

(5.2) következő belső állapot $=\delta($bement, belső állapot$)$

(5.3) belső állapot (szituáció) $=0,1$

(5.4) bemenet $=< b6, b5, b4 >$ azaz a három mondat.

(5.5) kimenet $=< b2, b3 >$ azaz Jones és Nixon mondata

δ	0	1
000	0	1
001	0	1
010	0	1
011	0	1
100	0	0
101	1	0
110	1	0
111	0	1

1.24. táblázat. Belső állapot átmenet

λ	0	1
000	10	10
001	10	10
010	10	10
011	00	00
100	11	11
101	11	00
110	11	00
111	00	00

1.25. táblázat. Kimenet

Az automata működését – a δ és λ függvényeket – a 1.24. és 1.25. táblázat határozza meg.

V. Összefoglalás

Kripke ellenpéldája valóban nem írható le a Tarski kritériumának megfeletetett, megrendszabályozott nyelven, ahol élesen elválnak a nyelvi szintek. Nem írható le, de modellálható a klasszikus logika szellemében, ahol a modell időbeli viselkedése és összefüggései felelnek meg a nyelvi szintek összekeveréséből fakadó logikai-szemantikai összefüggéseknek. A modell maga, már ismét leírható a klasszikus logika keretelméletén belül. Tehát Kripke ellenpéldája nem, de az azt szimuláló véges automata modell igenis leírható Tarski igazságelmélete, azaz a klasszikus igazságfogalom segítségével. A megoldás, tehát egyfajta meta-metanyelv alkalmazása.

Az igazságértékek szemantikai ön-referenciáját tartalmazó mondatok logikai viselkedését véges automata modellekkel szimuláltuk. Nem alkottunk új nyelvet, nem vezettünk be új igazság fogalmat, a modell a klasszikus igazság felfogást szimulálja. A modell bemenetei képviselik a logikai értékelést, kimenete az összetett, ön-referenciális mondat igazságértékét.

A véges automata modell a kibertérben működik is, és bármely bemenetre megadja a kimeneti értéket. Amelyik bemenetre nincsen megoldása a problémának, azaz ahol ellentmondásba keveredünk (nincs fix pont), ottan az automatának nincsen stabil (állandósult) állapota és felváltva ingadozik az 1 (igaz) és 0 (hamis) állapot között. Ilyen módon pl. a hazug paradoxon többféle verziója is szimulálható véges automaták segítségével. A szemantikai értékek véges automata működéssel történő szimulálása azokban az esetekben alkalmazható, ahol a tárgyalási univerzum véges. A működő modellek innen letölthetőek:

`http://ferenc.andrasek.hu/models/kripke-s-counterexample.xls`

`http://ferenc.andrasek.hu/models/liar-models.xls`

1.4. Otávio Bueno a másodrendű logikáról

Otávio Bueno: Second-order Logic revisited

A nemlétezés problémájával foglalkozó dolgozatomban a másodrendű logikát használó javaslatok kapcsán megemlítettem Otávio Bueno egy írását: Second-order Logic Revisited Ennek az írásnak a továbbfejlesztet változata 2010-ben megjelent „A Defense of Second-order Logic” címmel.[28] Bár csak négy oldallal hosszabb a korábbi változatnál, mégis sokkal letisztultabb, világosabb, bár az olvasótól több matematikai-logikai tájékozottságot feltételez. Nem könnyű olvasmány, de fontos, mert számos ponton kapcsolódik az általunk vizsgált metafizikai-ontológiai kérdésekhez és részletesen taglalja a másodrendű logika lehetséges értelmezéseit is. Sajnos az ismertetése meghaladja ennek az írásnak a kereteit, most csak egyetlen kérdéskörre térek ki röviden.

Mi is az a másodrendű logika? Tekintsük a következő mondatot:

(1) Te rendelkezel olyan jó tulajdonsággal amivel én nem.

Ennek a mondatnak a lényegét így formalizálhatjuk a klasszikus másodrendű logika nyelvén:

(2) $\exists\alpha[$ jó-tulajdonság $(\alpha)\,\&\ \sim\alpha($én$)\,\&\ \sim\alpha(te)]$

Vajon mit jelent az 'α' változó használata, mik az értékei? Az α változó értékei predikátumok nem pedig egyedi dolgok, és a 'jó-tulajdonság' predikátum pedig másodrendű predikátum, mivel a terjedelmébe olyan elsőrendű predikátumok tartoznak, melyek terjedelmét személyek (egyedi dolgok) alkotják. A (2) mondat a szó logikai értelmében elkötelez bennünket a tulajdonságok létezésében való hitben. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy a tulajdonságok a személyekhez hasonlóan a tér valamilyen pontján önállóan léteznek, de valamiféle létezést mindenképpen jelent. Másodrendű logika helyett jelen esetben – korántsem mindig – valamilyen halmazelméleti nyelvet is használhatunk:

(3) $\exists\alpha[\alpha\in a-$ jó-tulajdonságok-halmaza $\&$ én $\in\alpha\,\&$ te $\sim\in\alpha]$

Ebben a megformulázásban halmazokat alkalmazunk, így valamilyen logikai-matematikai értelemben

[28] Otávio Bueno:A Defense of Second-Order Logic, [4]

azok létezésében is hiszünk. Quine ez utóbbi megfogalmazást preferálta.

Nézzünk egy másik mondatot. Ez utóbbi mondatnak az az érdekessége, hogy első ránézésre a formalizálása nem igényel másodrendű logikát. De gondoljuk végig alaposan, megtévesztő a felszíni nyelvi szerkezet.

(3) Néhány kritikus csak másvalakit csodál maguk közül, ha ugyan. (Geach-Kaplan példamondata nyomán.)

Hogy kell ezt érteni? A formulák ezt nagyon jól elmagyarázzák, jobban mint a természetes nyelv. A jobb áttekinthetőség végett a predikátumok argumentumait nem tettem zárójelbe, mert így könnyebben érthető.

(4) $\exists S(\exists u.Su \,\&\, \forall u(Su \to \text{kritikus} - u) \,\&\, \forall u \forall v((Su \,\&\, u - \text{csodálja} - v - t) \to (Sv \,\&\, u \neq v)))$

Figyeljük meg, ha senki nem csodál senkit, az is modellje a formulának, de senki nem csodálhat valakit a körön kívül, és a körön belül meg önmagával senki sem lehet eltelve, senki nem csodálhatja önmagát. Érdekes egy világ ez. Készítsünk modelleket egyszerű gráfokkal![29] Quine (4)-et is halmazokkal fogalmazta meg:

(5) $\exists S(\exists u.u \in S \,\&\, \forall u(u \in S \to u \in C) \,\&\, \forall u \forall v((u \in S \,\&\, uAv) \to (v \in S \,\&\, u \neq v)))$[30]

Quine úgy gondolta, hogy a másodrendű logika álruhába öltöztetett halmazelmélet. Otávio Bueno – véleményem szerint helyesen – azokkal ért egyet, akik elvetik ezt az azonosítást. Ugyanis a másodrendű logikában érvényes a '$\exists X \forall x X(x)$' formula, míg az ennek megfelelő '$\exists X \forall x(x \in X)$' formula nem érvényes pl. a ZF halmazelméletben. Egy másik lényeges különbség, hogy az azonosság fogalma definiálható a másodrendű logikában, míg az ennek megfelelő halmazelméleti formula önmagában nem elegendő az azonosság definíciója gyanánt. Ezt sajnos én is eltévesztettem egy régebbi az azonosságról szóló tanulmányomban. Érdemes kicsit alaposabban körüljárni a problémát, mert számos vonatkozását nem ismeri ennek sok analitikus filozófus.

[29] V.ö.: John MacFarlane: Plural Quantifiers, UC Berkeley, Philosophy 142, Spring 2016–Philosophy 142

[30] „How are we to formalize such sentences? The traditional view, defended for instance by Quine, is that all paraphrases must be given in classical first-order logic, if necessary supplemented with set theory. In particular, Quine suggests that (3) should be formalized as
$\exists S(\exists u.u \in S \sim \forall u(u \in S \to Cu) \,\&\, \forall u \forall v(u \in S \,\&\, Auv \to v \in S \,\&\, u \neq v))$"
Egy elírást kijavítottam a fenti formulában – Cu' formula helyett is halmazt '$u \in C$' alkalmaztam – és a prefix 'Auv' írásmódot infixre 'uAv' cseréltem a jobb érthetőség végett.
Linnebo, ∅ystein, „Plural Quantification", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL=<http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/plural-quant/>.

Az azonosság másodrendű logikai definíciója a következő:

(6) $x = y := \forall\alpha[\alpha x \to \alpha y]$

Ruzsa Imre fölhívja a figyelmet arra, hogy a definiensben szükségtelen volna a bikondicionális használata. Az ennek megfelelő halmazelméleti formulában viszont bikondicionálist kell alkalmazzunk, ha az alkalmazott halmazelméletben nincs univerzum és így a komplementer halmaz nem értelmezhető az univerzumra nézve. Ez már önmagában elég fontos különbség. Nézzük ezek alapján a halmazelméleti megfogalmazást:

(7) $x = y := \forall\alpha[x \in \alpha \leftrightarrow y \in \alpha]$

Látszólag ez egy jó definíciója az azonosságnak, hiszen azt mondja, hogy ha x minden olyan összességnek a tagja aminek y is a tagja, és megfordítva, akkor x és y azonosak, egybeesnek. Mi ezzel a baj? Az a baj vele, hogy intuitíve használja a halmaz fogalmát, pl. azt, hogy mikor azonos két halmaz. A levezetésben azonban semmi másra nem hivatkozhatunk, mint ami a premisszákban ki van mondva, vagy logikailag következik a premisszákból, a jelentésekre nem. A halmazok azonossága nem logikai igazság, azt külön rögzíteni kell, és azt sem tudjuk, mi köze van a halmazoknak a fogalmakhoz. Ezt is külön rögzíteni kell, és nem is olyan egyszerű ez. Ezért a (7) definíció önmagában nem elegendő, nem lehet belőle levezetni az azonosság szokásos sémáit. A másodrendű logikai formulából viszont igen. És ez az amit sok filozófus nem igazán ért. Arról van szó, hogy a (6) formula nem más mint a megkülönböztethetetlenek azonossága elve. Ez az elv ebben a precíz formában támadhatatlan. A filozófusok csak akkor vitathatják, ha legyöngítik, és pl. az összes predikátumok körét valamilyen módon leszűkítik. Ennek egyik nyilvánvaló módja, hogy kihagyják a predikátumok közül a 'valamivel azonosnak lenni' tulajdonságot. Ha ezt megtetszik, akkor valóban lehet filozofálni ezen az elven. A másik, aminek általában nincsenek tudatában, hogy a megkülönböztethetetlenek azonossága elvéből ebben a precíz megfogalmazásban logikailag következik az azonosak megkülönböztethetetlensége elve. Ezt jelenti ama tény, hogy (6) alkalmas definíciója az azonosságnak, mivel levezethető belőle, hogy 1. minden azonos önmagával, továbbá 2. ha x F tulajdonságú, és $x = y$, akkor y is F tulajdonságú. A két nevezetes elv tehát nem független egymástól, de ezt sokan nem látják át.

1.5. A paradoxon új ruhája

A Yablo paradoxonról

1.Bevezetés

A logikai paradoxonok iránti érdeklődés egyidős a filozófiával, ezért egy új típusának fölbukkanása természetes forrása új filozófiai vitáknak. Önmagában az a tény is különös, mondhatnám paradox jelenség, amiről most szó lesz. Miképp lehetséges matematikáról – logikáról olykor vég nélküli vitákat folytatni – kérdezheti a matematikafilozófával nem fertőzött olvasó? Miképpen lehetséges, hogy félreértik egymást a vitázó felek miközben matematikai nyelvezeten beszélnek? Logikai - matematikai viták kétségtelenül vannak, miképp lehetségesek? Erre a kérdésre nem fogok itt válaszolni. De hogy egy picit oszlassam a homályt, mindenekelőtt tisztázom, hogy én mit értek logikai paradoxonon.[31]

Más filozófiai összefüggésben beszélhetünk paradox helyzetről vagy feladatról, természeti jelenségről, értekezhetünk az idő vagy a mozgás állítólagos paradoxonairól, mondhatjuk hogy az emberi lét vagy a lét a maga általánosságában paradoxiális, most azonban egy szűkebb, ugyanakkor jobban körülhatárolt területen, az igazságértékkel kapcsolatos logikai paradoxonokról vizsgálódunk. Sajnos még ez sem nélkülöz minden bizonytalanságot, nem világos hogy miről beszélünk. Vajon a logikai paradoxon egy mondat (formális nyelven egy formula), vagy az általa megfogalmazott kijelentés önmagában, vagy a használt nyelvi környezettel együtt értendő; esetleg egy érvelés, egy helyesnek tűnő, ám elfogadhatatlan eredményt adó levezetés a paradoxon? A filozófusok alapvetően kétfajta megközelítésben értelmezik a logikai paradoxonokat. Az első gyógyírt keres a kórra, a második mintegy tudomásul véve a bajt, minél pontosabban leírni, modellezni szeretné azt. Az utóbbi szelíd megközelítés is gyakran eredményezi a beteg jobbulását, sőt némelykor hatékony gyógyszerek forrása is lehet. A logikai-matematikai paradoxonok haszna az, hogy rámutatnak téves, a bár igaznak tűnő előfeltevéseinkre. A Russell paradoxon esetén az volt a hibás föltevés, hogy minden egy-argumentumú (más szóval egyváltozós) nyitott mondatnak (minden jól meghatározott egy-argumentumú predikátumnak) megfelel egy halmaz, melynek pontosan azok a dolgok az elemei, amire a nyitott mondat igaz; a 'hazug krétai' paradoxon segítségével pedig Alfred Tarski azt bizonyította be, hogy az igazság formálisan szabatos és tartalmilag korrekt meghatározása nem lehet nyelvtől független univerzális fogalom, másképp fogalmazva, nincs olyan halmaz, amely az összes nyelven megfogalmazható összes igaz mondatot és csak azt tartalmazza. [32] Pontosan ez a jelentősége a mostanában széles körűen vitatott Yablo paradoxonnak is. A viták, mint más paradoxonok esetén, most is arról szólnak, hogy mi a

[31] A téma locus classicusa Quine: The Ways of Paradox c. írása in. [23]

[32] Mind halmazelméletből, mind igazságelméletből többféle van. Ezek az alternatív elméletek a szokásostól eltérően értelmezik a halmaz, illetve az igazság fogalmát. Amit írok, az a fogalmak intuitív, naiv, értelmezésére vonatkozik, az alternatív halmazelméletekre vagy igazság elméletekre nem, vagy csak részben.

forrása az ellentmondásnak? Némelyek úgy vélik, a Yablo paradoxon hasonló a már jól ismert szemantikai paradoxonokhoz, melyek az igazságértékkel kapcsolatos körbenforgó állításból keletkeznek. Mások úgy vélik, hogy a Yablo paradoxon nem tartalmaz körbenforgást, hanem egy új típusú paradoxon. Maga Stephen Yablo is úgy véli, hogy az általa fölfedezett ellentmondás arra int, hogy nyelvi szintek alkalmazása nem oldja meg a problémát.

A nehezen megoldható vagy megoldhatatlannak vélt logikai ellentmondásoknak óriási irodalma van a filozófiában, mert ezek a kérdések a logika alapjainak az újra gondolásához vezetnek, ami pedig a filozófia egyik tartóoszlopa. Ezért volt nagy visszhangja egy rövid ám annál velősebb írásnak, amely nem kevesebbet állított, mint azt, hogy a hazug paradoxon egy eddig ismeretlen új variánsát találta meg. Talán mindenki aki manapság komolyan foglalkozott ezzel a kétezer éves problémával úgy vélte, hogy a rejtély megoldásának a kulcsa a szemantikai önreferencia, az állítást kifejező mondatok igazsága önmagától való függésének a megértése. Stephen Yablo írása azzal robbant be ebbe a vitába, hogy mindez tévedés, a paradoxon akkor is előáll, ha önmagára való utalásról sem rejtetten sem nyíltan nincs szó. Ha így van rossz helyen kerestük eddig az igazságértékkel kapcsolatos talányos mondatok útvesztőjéből a kijáratot. Meglepő állítás, de vajon igaz-e? Először röviden ismertetem a paradoxonnal kapcsolatos vitákat, majd utána bemutatom a saját álláspontomat. A vita jelentős matematikai apparátust vonultat föl, az ezzel kapcsolatos fogalmakat elmagyarázom.

2. Történeti vázlat

2.1.

Stephen Yablo egészen rövid, de nagyhatású írása 1993-ban jelent meg „Paradoxon önmagára való hivatkozás nélkül” címmel. [39] A szerző bevezetésképpen emlékeztet arra, hogy a szemantikai önreferencia önmagában nem feltétlen okoz bonyodalmat. Az a magyar nyelvű kifejezés, hogy „ez egy négyszavas kifejezés” önmagára is igaz, mégsem szükségszerű forrása valamilyen ellentmondásnak. Nem említi meg, hogy a klasszikus felfogás szerint a veszélyes mondatok azok, ahol a mondatok *igazságértéke* függ közvetve vagy közvetlenül önmagától. Az ilyen talányos mondatok minden esetben tartalmazzák az ‘igaz’ vagy ‘hamis’ metanyelvi predikátumot és a hatókörükbe tartozó mondatok neveit. Vajon megvéd-e bennünket a zavarba ejtő ellentmondások keletkezésétől, ha kerüljük az ilyen mondatok használatát? Megvéd-e bennünket, ha Alfred Tarski intencióit követve, elvetjük a szemantikailag zárt nyelvek használatát, nyelvi szinteket alkalmazunk, és ilyen módon küszöböljük ki pl. a ’Hazug’ paradoxont? Yablo határozott válasza: nem. Íme a bizonyíték, amely szerinte sem nyíltan sem rejtetten nem tartalmazza az igazságérték önmagától való függését, azaz nem tartalmaz körkörösséget vagy önmagára való hivatkozást. [33]

Legyen az $S_1, \dots S_n$ mondatsorozat értelmezve minden n természetes számra az alábbiak szerint[34]:

Yablo sorozat A sorban n-ik helyen álló S_n mondat akkor és csak akkor igaz, ha a rákövetkező összes többi mondat nem igaz.

Nagyon elvont ez az állítás, nehéz elképzeli, hogy milyen valódi mondat felelhetne meg a fenti sémának. Valójában itt nem mondatokról, hanem jelentés nélküli formulák sorozatáról van szó. Figyeljünk föl arra, hogy Stephen Yablo valaminek a létezését is állítja, azaz valójában ezt mondja:

A Yablo paradoxon egzisztencia állítása természetes nyelven: Van olyan igaz vagy hamis mondatokból álló (megszámlálható) végtelen sorozat, hogy a sorban n-ik helyen álló álló S_n mondat akkor és csak akkor igaz, ha a mögötte álló összes többi mondat nem igaz.

A nevezetes sorozat első színre lépésekor az alábbi öltözetben lépett elénk (1. sorozat):

(S1) minden $k > 1$ –ra, S_k nem igaz

(S2) minden $k > 2$ –ra, S_k nem igaz

(S3) minden $k > 3$ –ra, S_k nem igaz

.

.

(A sorozat folytatására utaló pontok is így fordulnak elő az eredeti cikkben. Kritizálható a 'nem igaz' szemantikai predikátum használata is, hiszen az előtte álló mondat típusú kifejezésből valahogy nevet kéne képezni, pl. Gödel számozással vagy Quine féle kvázi idézőjelekkel, de ez nem súlyos hiba. Megoldható olyan módon, hogy a 'nem igaz' metanyelvi predikátum helyett a 'nem igaz, hogy' mondat operátort használjuk.

A paradoxon (az ellentmondás) informális levezetése:

[33] A paradoxont több változatban is megfogalmazta. Először 1985-ben egy logikai szaklapban [37], majd később, részletesebb, pontosabb formában [40] 2004-ben.

[34] A formális nyelvek 'mondat' típusú kifejezéseit 'formula'-nak nevezik. A formulák interpretáció nélkül jelentés nélküliek, ennek ellenére a továbbiakban gyakran mondatot írok, amikor valójában formuláról van szó.

A feladatunk az, hogy eldöntsük a fenti mondatsorozat tagjairól, hogy igazak-e vagy hamisak. [35] Tegyük föl, hogy a sorozat n-ik tagja – S_n – igaz. Ekkor – alkalmazva Tarski T sémáját – úgy állnak a dolgok ahogy S_n mondat állítja, azaz minden $k > n$ –re S_k hamis. Következésképpen (a) S_{n+1} mondat is hamis, és (b) minden $k > n + 1$ –re S_k is hamis. Vegyük észre, hogy amit (b) állít, pontosan az amit S_{n+1} állít, tehát S_{n+1} igaz kell legyen! Ezzel ellentmondásba keveredtünk, mivel korábban azt állítottuk, hogy S_{n+1} mondat hamis. S_{n+1} mondat nem lehet igaz is meg hamis is, ezért a „reductio abszurdum" következtetési elvet alkalmazva arra kell következtessünk, hogy kiinduló feltevésünk, miszerint S_n igaz, tévedés, következésképpen S_n hamis. Ezt a következtetést a sorozat tetszőleges tagjára elvégezhetjük, tehát minden S_n hamis. Ebből viszont az következik, hogy a sorozat minden tagja igaz, hiszen mindegyik igazsága az utána következő mondatok hamisságától függ, és éppen ez a helyzet. Oda jutottunk, hogy a sorozat valamely tetszőleges S_n tagja sem igaz sem hamis nem lehet. Ez azért paradoxon – mint Laurence Goldstein rámutat – mert a mondatok teljesen értelmesnek tűnnek, megalapozottan feltételezhetjük róluk, hogy értelmes gondolatok, állítások kifejezői, melyek vagy igazak, vagy hamisak. Valóban ez a helyzet, valóban megalapozott ez a feltevésünk? Laurence Goldstein maga is körül járja a kérdést, melyre visszatérek. [10] A lényeges kérdés azonban most is az, hogy mit cáfol az ellentmondás, milyen téves előfeltevésünket kell elvessük, mi a forrása a paradoxonnak?

Stephen Yablo eredeti írásának [39] van három kifogásolható jellemzője:

(a.) A sorozat bemutatásakor a sorok jobb oldalán lévő zárójeles jelek (S_1, S_2, S_3 stb.), a mellettük lévő mondatok megnevezésére szolgálnak, másrészt ezek a jelek részei az általuk megjelölt mondatnak, ilyen értelemben:

(S_1) = $\ulcorner$minden $k > 1$ –ra, nem igaz, hogy $S_k\urcorner$

(S_2) = $\ulcorner$minden $k > 2$ –ra, nem igaz, hogy $S_k\urcorner$

(S_3) = $\ulcorner$minden $k > 3$ –ra, nem igaz, hogy $S_k\urcorner$

.

.

Itt kiviláglik, hogy a sorozat eredeti megfogalmazása összemossa a nyelvi szinteket, hiszen az $S_1, S_2 \ldots$ nevek egyszerre megneveznek valamit metanyelvi szinten, de ugyanakkor részei a tárgynyelvnek. A sorozat

[35] Figyeljünk föl arra, hallgatólagos kikötésre, előfeltevésre, hogy nem költészetet olvasunk, ezeknek a mondatoknak igaznak vagy hamisnak kell lenniük minden esetben, nem fordulhat elő, hogy sem nem igazak sem nem hamisak, és az sem lehetséges, hogy egyszerre igaz és hamis valamelyik mondat a sorozatban.

sorainak nevei bújtatva magában a sorozatban is előfordulnak. Pl. S_2 szerepel az első sorban $k = 2$ érték esetén.

(b) A paradoxon eredeti megfogalmazása mondat változókat használ, ami kívül esik az elsőrendű logikán, és így a klasszikus elsőrendű logikának szegezett támadás célt téveszt. Azonban a paradoxon átalakítható úgy, hogy ez a kifogás elesik, és akkor a probléma élessé válik az elsőrendű logikán belül is. Feleltessük meg az első, S_1 formulának az $S(1)$, formulát abban az értelemben, hogy 'S' tulajdonság (predikátum) igaz '1'-re, a második, S_2 formulának az $S(2)$, formulát abban az értelemben, hogy 'S' tulajdonság (predikátum) igaz '2'-re, ... feleltessük meg az n-edik, S_n formulának az $S(n)$, formulát abban az értelemben, hogy 'S' tulajdonság (predikátum) igaz 'n'-re. Sorszámok helyett bármi szóba jöhet, amik teljesen rendezve vannak, elég sok van belőlük, és van minimális eleme a sorozatnak, hogy el tudjunk indulni.

(c) A cikk nem bizonyítást mutat be olyan értelemben, hogy vannak világos premisszáink, amiből következik valami, amiről a cikk szól. A cikk ettől némileg eltérően bemutat egy végtelen formula sorozatot, amelyik úgy tűnik, hogy logikailag korrekt formulák, formális nyelvi mondatok sorozata, majd felszólít, hogy határozzuk meg, hogy a végtelen sok formulából álló sorozat tagjai milyen igazságértékkel rendelkeznek. Amennyiben a klasszikus logika rendben van, és ezek a formulák megfelelnek a logika előírásainak, akkor kell legyen válasz a kérdésre. A paradoxon azért zavarba ejtő, mert nem tudunk válaszolni a kérdésre. Épp úgy nem tudunk válaszolni, ahogy a hazug krétai paradoxon esetén sem tudjuk eldönteni, hogy az un. „hazug mondat” igaz-e vagy hamis. Eddig bíztunk abban, hogy a Tarski által kínált gyógyír megóv az ellentmondásoktól, a Yablo paradoxon arra mutat rá, hogy (talán) illúzió ez a reményünk, szemantikai önreferencia nélkül is ellentmondásos lehet az elméletünk.

2.2.

Hogy jobban megértsük a probléma lényegét, figyeljük meg, hogy a Yablo sorozat alábbi módosítása nem vezet ellentmondásra (2. sorozat):

(1) minden $k > 1$ –ra, nem igaz, hogy S_k

(2) minden $k > 2$ –ra, nem igaz, hogy S_k

(3) minden $k > 3$ –ra, nem igaz, hogy S_k

.

.

.

Ez valójában nem sorozat, hanem egy sorozat forma, melyet akkor töltünk meg tartalommal, ha az S_k predikátumot interpretáljuk, konkrét értéket adunk neki. Ki tudunk gondolni olyan interpretációt, hogy a sorozat minden tagja igaz lesz, másképp mondva lesz modellje a sorozatnak. Legyen ugyanis S_k olyan módon meghatározva a természetes számok tartományán, hogy $S_k := k = 1$ (szavakkal, valami S tulajodnságú, ha az a valami azonos eggyel.) Ekkor ezt kapjuk:

(1) minden $k > 1$ –ra, nem igaz, hogy $k = 1$

(2) minden $k > 2$ –ra, nem igaz, hogy $k = 1$

(3) minden $k > 3$ –ra, nem igaz, hogy $k = 1$

.

.

.

Ekkor (1) igaz, (2) igaz, (3) igaz, $\ldots S(n)$ igaz.
Ez a definíció nem körbenforgó, és ez a sorozat nem paradoxon, hiszen miden tagjának van igazságértéke és még az is teljesül, hogy van olyan választásunk, hogy a sorozat minden tagja igaz.

Szintén nem okoz gondot az alábbi változat(3.sorozat):

(1) a következő mondat hamis

(2) a következő mondat hamis

(3) a következő mondat hamis

.

.

A definíció így fest formális nyelven: $S(n) := \text{nem} S(n+1)$

Ennek nem tudjuk az összes tagját igazra értékelni – tehát nincs modellje – de az alábbi értékelés nem szül ellentmondást:
$\text{igaz} = |(1)|, \text{hamis} = |(2)|, \text{igaz} = |(3)|, \text{hamis} = |(4)|, \ldots$

Mi a közös az első és harmadik példában? Az hogy a sorozat tagjainak igazságértéke nem független egymástól. Valójában a 3. sorozat is sorozat forma, és nem konkrét mondat sorozat. Az 'S' predikátum helyére pl. ilyen értéket helyettesíthetünk: n-kalapot visel. Ekkor az első kalapot visel, a második nem, a harmadik ismét kalapos, a negyedik nem, stb. Formális nyelven világosan látszik, hogy a meghatározás körbenforgó. Ennek ellenére menekülni tudunk a csapdából. Amennyiben a sorozat véges, akkor el tudjuk dönteni, hogy a mondatok igazak-e vagy hamisak, azaz megfelelnek-e a valóságnak. Az a lényeg, hogy a sorozat utolsó tagjának legyen igazságértéke.
Mi a közös a második és a harmadik példában? Az, hogy mindegyik olyan mondatsorozatból áll, hogy van olyan értékelés melyre meg tudjuk meghatározni a sorozat tagjainak igazságértékét. Az első esetben nem, mert ellentmondásba keveredünk. Az ellentmondás valamilyen hibának a jele, mivel nem szándékosan állítottunk logikai képtelenséget. Hol a hiba? Vajon a Yablo sorozat konkrét sorozat-e vagy sorozat forma? Vajon körbenforgó-e az első sorozat meghatározása is, hasonlóan a harmadik sorozathoz?

2.2.

James Hardy [14] három alapvető különbséget lát hazug és a Yablo paradoxon között.

1. Nyilvánvaló különbség a Yablo paradoxon és a hazug paradoxon szokásos megfogalmazásai között, hogy előbbi végtelen sok mondat által generált paradoxon, az utóbbi viszont nem. Ha véges sok Yablo mondatra korlátozzuk vizsgálódásunkat, nem keletkezik paradoxon. Végeredményben ez azt jelenti, hogy nincs elsőrendű levezetése az ellentmondásnak a Yablo premisszák és Tarski T sémák halmazából, állítja Hardy. Látni fogjuk, egyetlen másodrendű logikai formulával is megfogalmazható a sorozat létezését állító mondat, és azt is, hogy ez a másodrendű formula hamis.

2. A második különbség szerinte, hogy a Yablo paradoxon a Tarski féle T igazság séma végtelen sok egyedi alkalmazását kívánja meg. Jegyzetben ehhez hozzáfűzi: itt bizonyítás alatt végtelen hosszú bizonyítást ért. Szerinte nincs véges bizonyítás az ellentmondás levezetésére Yablo premisszáiból. Meg fogom mutatni, hogy Tarski nevezetes T sémájának sem véges sem végtelen sok alkalmazására nincs szükség, a paradoxon az 'igaz' szemantikai predikátum nélkül is rekonstruálható, és a levezetés sehol nem hivatkozik a T sémára.

3. Hardy szerint a T séma valamennyi szükséges alkalmazása esetén is a Yablo mondat sorozat csak omega inkonzisztens, de nem tagadás inkonzisztens. Mert ha tagadás inkonzisztens volna, akkor a kompaktsági elv következtében már véges sok mondatból is levezethető volna, de a Yablo sorozat semelyik véges részhalmaza nem generál ellentmondást. Jegyzetben hozzáfűzi, belátható hogy

> a hazug paradoxon magából a T séma valamely inkonzisztenciájából származik, ezzel szemben a Yablo paradoxon nem. Végül úgy összegzi álláspontját, hogy bizonyos szempontból hasonlít, más megközelítésben különbözik a két paradoxon.

Jó és fontos megfigyelés, hogy ha a Yablo paradoxont generáló mondatsorozatot befejezzük egy véges természetes számnál, akkor a sorozat minden tagja egyértelműen értékelhető, azaz eltűnik az úgynevezett paradoxon. Azt azonban nem veszi észre, hogy nem a végesség eliminálja a paradoxont, hanem a maximális elem léte. Akkor is megszűnik a paradoxon, modosítjuk 'S_n' értelmezési tartományát, és a természetes számok halmazához hozzávesszünk egy transzfinit sorszámot, mondjuk ω_0-át, amelyik nagyobb bármely természetes számnál.

2.3.

Egy évvel később Thomas Forster [36] fölveti azt a gondolatot, hogy végtelen sok mondat konnektívum ('és', 'vagy') segítségével is megfogalmazható a Yablo sorozat, de az ellentmondás levezetéséhez – szerinte – végtelen bizonyítás szükséges. „The first thing to notice is that the proof of the paradox is infinetly long." Erre a meglátásra később Priest is hivatkozik akinek az írása a további érvek és ellenérvek céltáblájává vált. Forster veszi észre elsőnek, hogy nincs szükség metanyelvi szemantikai predikátumra (*igaz* vagy *hamis*) a Yablo paradoxon megfogalmazásához, abban azonban téved, hogy ennek következtében nem vezethető le az ellentmondás véges sok lépésben.

2.4.

A vita középpontjába később az a kérdés került, hogy tartalmaz-e hibás kört a Yablo paradoxon, avagy ellenkezőleg egy új típusú paradoxonnal állunk szemben? Stephen Yablo [39](1993), Neil Tennant [34](1995), Roy Sorensen [30](1998), és Otávio Bueno and Mark Colyvan [5] (2003) amellett érvelt, hogy a Yablo sorozat önmagára való hivatkozás nélkül hasonlít a hazug paradoxonra. A másik oldalon Graham Priest [25](1997) és Jc Beall [2](2001) ezzel szemben úgy látja, hogy a paradoxon fix-pont konstrukciót tartalmaz, következésképpen épp úgy körbenforgó mint a hazug paradoxon. Mindkét oldal jelentős matematikai apparátust vetett be érvei igazolására, de nem sikerült egymást meggyőzniük. Mielőtt Priest érveinek ismertetésébe belekezdek, érdemes egy pillanatra megállnunk és egy alapkérdést föltennünk magunknak. Vajon indokolt-e bonyolult matematikai-logikai fogalmi apparátus alkalmazása a Yablo paradoxon vizsgálatakor? Az egyik vitázó személyes közléséből tudom, hogy szerinte indokolatlan, mert mivel az eredeti probléma

[36] Thomas Forster (1996) The significance of Yablo's paradox without Self-Reference. `http://www.dpmms.cam.ac.uk/~tf`

megfogalmazható köznapi nyelven minimális logikai-matematikai segédeszközökkel, ezért a Yablo paradoxon magyarázatnak is ezen a szinten kéne maradnia. Én pont az ellenkezőjét gondolom. A Yablo paradoxon ékes bizonyítéka a modern szabatos matematikai nyelvet használó logika nélkülözhetetlenségére.

2.4.1.A fix pont fogalma

Röviden elmagyarázok egy a továbbiakban használt matematikai fogalmat. A négyzet függvény minden számhoz egyértelműen hozzárendeli annak négyzetét, a kettőhöz a négyet, a háromhoz a kilencet. Ennek a függvénynek két fix pontja is van, a nulla és az egy, mert ezek négyzete megegyezik önmagával. Nem csak a számok világában beszélhetünk a függvények fix pontjáról. Legyen f függvény értelmezési tartománya azon alkalmazottak köre, akik egy és csak egy egyszemélyes cég alkalmazásában állnak. Ezek olyan cégek, ahol mindenkinek van egy és csak egy főnöke. Legyen f függvény értékkészlete az egyszemélyes cégtulajdonosok köre. Ezt formálisan így fejezhetjük ki: $y = f(x) =:$ x-alkalmazója-y. Előfordulhat-e, hogy valamely α személy esetén α alkalmazója α legyen? Igen, ha valaki saját magát is alkalmazza cégében. Ekkor azt mondjuk f függvénynek van fix pontja, nevezetesen α, mert $\alpha = f(\alpha)$. Az iménti két példából nem látszik az a nagyon fontos tény, hogy ezek a függvények mindig egy adott nyelv alkotórészei és nem magányos kifejezések. Ezeken a nyelveken belül semmiféle ellentmondás nem következik a példában szereplő fix pontok létezéséből. Más nyelveken belül, ahol másfajta objektumok közötti relációt határoz meg az f függvény, a fix pont föltételezése ellenmondásra vezethet, ezért vagy az f függvényt vagy a nyelvet meg kell változtassuk, hogy elkerüljük az ellentmondást. Lássuk ezek után hogyan használja ezt a fogalmat Priest. Példaként említi a hazug paradoxon alábbi megformulázását: $t =' \neg t'$. Szavakkal kifejezve: *ez a mondat nem igaz.*

A lábjegyzetben fölhívja e figyelmet arra, hogy szigorúan szólva ez nem jó példa, mert az azonosságjel bal oldalán szereplő betű a jobb oldalon idézőjelek között fordul elő, tehát átlátszatlan kontextusban szerepel az igazságfüggvény argumentumában. Ebben teljesen igaza van, ezért vagy idézet függvényt kéne használni, vagy az idézet függvény egy inverzét, pl. Gödel számozást, vagy valami hasonlót. Ennek ellenére ezt a pongyola megfogalmazást használja a későbbiekben.

Priest később fölteszi a kérdést, hogy vajon létezik-e egyáltalán a Yablo sorozat. „How can one be sure that there is such a squence? (We can imegine all sort of things that do not exist.)" Válasza egyértelmű igen, ami azért nagy hiba, mert nem világos mire vonatkozik az igen: jelsorozatok végtelen halmazára, vagy propozíciót kifejező mondatatok, azaz jelentéssel bíró igaz vagy hamis jelsorozatok végtelen halmazára? Az hogy jelentéssel nem bíró jelsorozatok, interpretáció nélküli formulák végtelen halmaza létezik könnyen garantálható egy függvény megadásával. Ilyen interpretálatlan formulák végtelen halmaza nem vezet ellentmondásra. Az ellentmondás csak akkor keletkezik, ha a pl. a '$<$' jelenek a 'kisebb mint' relációhoz hasonló jelentést adunk. A Yablo paradoxon esetén mondatok, adott jelentéssel bíró formulák sorozatáról van szó, és nem tetszőlegesen interpretálható formulák halmazáról. Amit változtathatunk az legfeljebb a sorozat értelmezési tartományának variálása. Hozzátehetünk a természetes számok halmazához, elvehetünk belőle, vagy akár a negatív egész számok halmazával is vizsgálódhatunk. Priest sem figyelt fölt arra, hogy a Yablo mondat sorozat létezéséből egy másodrendű logikai formula igazsága következik, és fordítva, ha ez a másodrendű logikai formula hamis, a mondat sorozat nem létezik. A sorozat létezését alátámasztó érve fix-pont konstrukción alapul, gondolatmenetének végcélja, hogy a Yablo paradoxont becsomagolja abba az általa kifejlesztett sémába, amibe a Russell és hazug paradoxont már korábban sikerrel becsomagolta. Ehhez be kell bizonyítania, hogy a látszat ellenére a Yablo paradoxon épp úgy önmagára való hivatkozást tartalmaz az igazságérték szempontjából, mint a hazug paradoxon. Ehhez átfogalmazza a paradoxont olyan módon, hogy explicit meghatározását adja a sorozat mondatai igazságfeltételének. Ezt a szokásos módon teszi, azt vizsgálja, hogy valamely n szám mikor elégíti ki az $\hat{s}$ predikátumot, amit így jelöl: $S(n, \hat{s})$. Tehát az 'S' reláció a szemantikai kielégítés fogalmát jelöli. Az '$\hat{s}$' predikátumot pedig cseles módon így definiálja: $\hat{s} =' \forall k > x, \neg S(k, \hat{s})'$ Szavakban $\hat{s}$ predikátum a következőt jelenti: nincs olyan x-nél nagyobb szám amelyik kielégíti ezt a predikátumot'. Ez a predikátum Priest szerint önmagára vonatkozik és ebben a 'hazug' mondat szerkezetére hasonlít. A predikátum alkalmazásával újrafogalmazva a Yablo sorozat elemeit az ellentmondás – mind '$\forall k > x, \neg S(k, \hat{s})$', mind a tagadása – levezethető. Priest azonban nem tudja megválaszolni a Bueno és Colyvan által megfogalmazott kézenfekvő ellenvetést: miképpen lehetséges, hogy a kielégítés fogalma nélkül is levezethető az ellentmondás, sőt úgy is, hogy az 'igaz' szemantikai predikátumot – vagy valamely szinonimáját – nem is használjuk? (Utóbbit én teszem hozzá.)

2.5.

Jeffrey Ketland védelmére kel Priestnek mondván ilyen bizonyítás nem lehetséges. Ketland szerint az ellentmondás levezetése fix-pont konstrukciót kíván, azon kívül a T séma kellően általános alkalmas megfogalmazása is nélkülözhetetlen. „The derivation of an inconsistency requires a uniform fixed-point construction. Moreover, the truth-theoretic disquotational principle required is also uniform, rather than the local disquotational T-scheme. The theory with the local disquotation T-scheme applied to individual sentences from the Yablo list is also consistent." [17] (J. Ketland, 2005) Bueno és Colyvan nem publikált – de azért az interneten elérhető: *Yablo's paradox rides again:a reply to Ketland* – viszontválaszában azt állítja Ketland érvei elhibázottak, mivel többek között összekeveri a kielégíthetetlenséget a paradox jelleggel. [17] Az utóbbiból következik az előbbi, de fordítva nem, hangsúlyozzák a szerzők. A dolog úgy áll, hogy mindketten tévednek. A kielégíthetetlenség a hamissággal függ össze, és nem a paradox jelleggel, Ketland ebben valóban téved, de Bueno és Colyvan is elhamarkodottan ítél. Ha ugyanis a paradox jellegből következik a kielégíthetetlenség, akkor Buridan Isten létét logikailag bizonyító érve nem paradoxon, mert kielégíti a föltevés, hogy van Isten.

2.6.

Jc Beall [2](Beall 2001) a következő módon védelmezi Priest álláspontját. Fölteszi a kérdést, pontosan rögzítettük egyáltalán a Yabló paradoxon referenciáját akár rámutatással akár leírással? „Have we fixed the reference of »Yablo's paradox«by the first method (demonstration) or the second (description, attributive)?" Gondolatmenete oda konkludál, hogy csak az utóbbi módszer lehetséges. Szerinte Priset kimutatta, hogy bármilyen módon próbáljuk rögzíteni a nevezetes sorozat referenciáját, az leírás a körkörös meghatározás lesz. Itt azonban fontos ismét emlékeztetni arra, hogy nem minden önmagára való referálás okoz gubancot, hanem csak az, amelyik az igazságértékkel kapcsolatos.

2.7.

Laurence Goldstein [10](Goldstein 2006) szerint a Yablo sorozat a rekurzív sorozatokhoz hasonlít, nevezetesen a Fibonacci sorozathoz. A paradoxon forrása az, hogy a paradox sorozat nem megalapozott, ezért tulajdonképpen nem is beszélhetünk igazságot kifejező mondatok sorozatáról, mivel ezek a mondatok nem bírnak az igazság kifejezésének képességével. A hiba tehát nem a körkörösség, hanem a megalapozottság hiánya.

2.8.

Laureano Luna [20](Luna, 2009) egyetért Goldsteinnel: „...Goldstein ...blames underspecification due ungroundedness not to circularity. I shall argue that Priest is wrong while Goldstein's suggestion points int he correct directions." Luna a Yablo sorozatot időbeli sorozattá transzformálja, mivel a múltbeli eseményekre vonatkozó állításoknak bizonyosan egyértelmű igazságértéke van. Így akarja biztosítani a sorozat megalapozottságát. Majd ezek után rámutat az ezzel kapcsolatos logikai és ontológiai intuícióink közötti ellentmondásra. Roy T. Cook utóbb könyvet írt a Yablo Paradoxonról [7], és más munkáiban általánosabb összefüggésben foglalkozik a paradoxonokkal.

3. Minek a létezését feltételezi a Yablo paradoxon?

Más paradoxonokhoz hasonlóan a Yablo paradoxon is abból keletkezik, hogy hallgatólagosan igaznak vélünk egy téves előfeltevést, jelen esetben hogy egy bizonyos végtelen sorozat létezik. Az ilyen problémák elemzésekor jó szolgálatot tesz a matematikai (más néven szimbolikus) logika, amely mintegy mikroszkóp alá helyezi a köznyelv pongyolán megfogalmazott gondolatait. A klasszikus logika nyelvi keretei között a hazug vagy Buridan paradoxon megfogalmazhatatlan, ezzel szemben a Yablo sorozat megfogalmazható mint egy másodrendű logikai formula. A hazug vagy Buridan paradoxon levezetéséhez egy hibás szemantikailag zárt nyelvet kell alkalmazzunk, ami egyáltalán nem szükséges a Yablo paradoxon esetén. Tehát a két paradoxon megformulázásához más-más nyelvi környezetet tartozik. A Yablo sorozat megfogalmazható első vagy másodrendű logikai környezetben is. Ha a körbenforgás kérdése az elsőrendű mondat sorozat igazságfeltételeire vonatkozik, akkor a válasz nemleges, ha a sorozatot generáló másodrendű formula igazságfeltételeire, akkor a válasz igen. Elsőrendű nyelvet alkalmazva, a Yablo sorozatnak megfelelő premissza halmaznak végtelen sok tagja lesz a tárgyalási univerzumot a természetes számok halmazával azonosnak véve. A Yablo paradoxon megfogalmazható elsőrendű nyelven szemantikai predikátumok vagy fix pont konstrukció nélkül, és a végtelen mondathalmazból levezethető az ellentmondás véges sok lépésben. Megváltoztatva a tárgyalási univerzumot – azaz megváltoztatva a sorozat értelmezési tartományát – olyan módon, hogy a halmaznak van maximális eleme, a végtelen mondatsorozat kielégíthető. Tehát a Stephen Yablo által megfogalmazott mondatsorozat a Buridan paradoxonhoz hasonlít, mert mindkettőhöz létezik parciális értékelő függvény.

4. A Yablo paradoxon formálisan korrekt megfogalmazásai

Elsőrendű nyelven

Amint erre Thomas Forster rámutatott [9], a paradoxon megfogalmazásához nincsen szükség szemantikai predikátumokra. Nincs szükség mondat változókra vagy végtelen sok tagú konjunkcióra sem, elegendő a klasszikus elsőrendű logika. A halmazelmélet használata is nélkülözhető, hiszen a rendezésre és a minimális vagy maximális elemek létezésére vonatkozó kritériumok is megfogalmazhatóak ezen a nyelven. Pusztán a könnyebb érthetőség kedvéért használok halmazelméleti jeleket. Az elemi aritmetikából is csak pár tételt használunk föl, valójában nincsen szükség a természetes szám fogalmára sem. A paradoxon megfogalmazásában az értelmezési tartomány a természetes számok halmaza, de ennek csak néhány tulajdonsága játszik szerepet. (Annak nincsen jelentősége, hogy a nullától, vagy az egytől kezdődnek a természetes számok.) Az alábbi megfogalmazás nem használja a formulák neveit magukban a formulákban, nem használ mondat változókat sem szemantikai predikátumokat.

A sorozat értelmezési tartománya szándékolt interpretációban a természetes számok halmaza: $D = \mathbb{N}$

Yablo sorozat $\forall n \in D(S(n) \leftrightarrow \forall k(n < k \rightarrow\sim S(k)))$

Kifejtve a formulát, a formula ezt a végtelen sorozatot (Yablo sorozat) jelenti:

Y_0 $S(0) \leftrightarrow \forall k(0 < k \rightarrow\sim S(k))$

Y_1 $S(1) \leftrightarrow \forall k(1 < k \rightarrow\sim S(k))$

Y_2 $S(2) \leftrightarrow \forall k(2 < k \rightarrow\sim S(k))$

$\ldots$

Y_n $S(n) \leftrightarrow \forall k(n < k \rightarrow\sim S_k)$

Y_{n+1} $S(n+1) \leftrightarrow \forall k(n+1 < k \rightarrow\sim S_k)$

A D halmazon értelmezünk egy teljes rendezést ($<$) az alábbiak szerint:

1. $\forall x \in D \sim (x < x)$
2. $\forall (x, y) \in D(x < y \vee y < x \vee x = y)$
3. $\forall x \in D \exists y \in D(x < y)$
4. $\forall x(x \in D \rightarrow (x + 1) \in D$
5. $\forall x \in D(x < x + 1)$
6. $0 \in D$
7. $\sim \exists x \in D(x < 0)$

Figyeljünk föl arra, hogy D halmaznak van minimális eleme, de nincsen maximális eleme. A ’0’ számjel jelöli a ’D’ halmaz minimális elemét. Az $\langle <, D \rangle$ bináris reláció egy modellje a természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza a rajta értelmezett ’kisebb’ relációval. Ezek utána az ellentmondás (a paradoxon) így keletkezik (A csillaggal megkezdett új sor, egy új premissza használatát jelenti.):

Ezt fedezte föl Stephen Yablo. Mint látható, véges sok lépésben prezentálható volt az antinómia.

*(1)	$S(n)$	Feltesszük, hogy $S(n)$ igaz.
*(2)	$\forall k(n < k \to \sim S(k))$	Y_n
*(3)	$n < n+1 \to \sim S(n+1))$	(2)
*(4)	$n < n+1$	aritmetikai igazság
*(5)	$\sim S(n+1)$	(3)(4)
*(6)	$\forall k(n < k \to \sim S(k)) \to \forall k(n+1 < k \to \sim S(k))$	Y_{n+1}
*(7)	$\forall k(n+1 < k \to \sim S(k))$	(2)(6)
*(8)	$S(n+1)$	(7) (Y_{n+1})
(9)	$S(n) \to (\sim S(n+1) \& S(n+1))$	(1)(5)(8)
(10)	$\sim S(n)$	(9)
(11)	$\forall n \sim S(n)$	(10) n tetszőleges volt
(12)	$\forall k(n < k \to \sim S(k))$	(11) aritmetikai igazság
(13)	$S(n)$	(12)(Y_n)
(Q.E.D.)	$\sim S(n) \& S(n)$	(10)(13)

1.26. táblázat. Yablo paradoxon formális nyelven

Meghatározzuk a D halmaz egy D^* bővítését egy transzcendens sorszámmal: $D^* = D \cup \{\omega_0\}$ ahol kikötjük, hogy $\forall x((x \in D^* \ \& \ x \neq \omega_0) \to x < \omega_0)$ A D^* halmaz maximális eleme $\{\omega_0\}$. A maximális elem léte következtében az ellentmondás megszűnik, ha a sorozatot a kibővített D^* halmazon értelmezzük. Ekkor '$S(\omega_0)$' igaz, az összes többi '$S(n)$' formula viszont hamis, ahol n természetes szám. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy van egy sorozatunk, ahol az összes, végtelen sok természetes számnak a hamisság felel meg, de a végtelen utáni transzcendens számnak az igaz. Akkor is eltűnik a paradoxon, ha az alábbi módon megfordítjuk a relációt:

Az inverz sorozat értelmezési tartománya a természetes számok halmaza: $D = \mathbb{N}$

Inverz Yablo sorozat $\forall n \in D(S(n) \leftrightarrow \forall k(n > k \to \sim S(k)))$

Ez a sorozat nem paradox, ugyanis van a sorozatnak minimális eleme. Kifejtve a formulát, a megfordított (inverz) reláció ezt a végtelen sorozatot jelenti:

$Yi_0 \ \ S(0) \leftrightarrow \forall k(0 > k \to \sim S(k))$

$Yi_1 \ \ S(1) \leftrightarrow \forall k(1 > k \to \sim S(k))$

$Yi_2 \ \ S(2) \leftrightarrow \forall k(2 > k \to \sim S(k))$

$\ldots$

$Yi_n \ \ S(n) \leftrightarrow \forall k(n > k \to \sim S_k)$

$Yi_{n+1} \ \ S(n+1) \leftrightarrow \forall k(n+1 > k \to \sim S_k)$

Ekkor a sorozat első tagja, Yi_0 igaz, mivel nincsenek nullánál kisebb természetes számok, viszont az összes többi formula hamisra értékelődik, mert nincsen olyan természetes szám, aminél minden más természetes szám kisebb. Érdekes módon ez a tükörképe annak, amit korábban láttunk.

A Yablo paradoxon formálisan korrekt megfogalmazása másodrendű logikai nyelven

Másodrendű logikai nyelven megfogalmazható a Yablo sorozat egzisztencia feltevése.

(Y_c) $\exists s \forall n : n \in \mathbb{N} \rightarrow (s(n) \leftrightarrow \forall k(n < k \rightarrow \sim s(k)))$

Szavakkal kifejezve: van olyan s tulajdonság, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, $(s(n)$ pontosan akkor ha minden k-ra (ha $n < k$ akkor nem-$s(k)$))

A paradoxon a bizonyíték arra, hogy (Y_c) hamis, mert ellentmondás vezethető le belőle.

5. Interpretációk

A paradoxon szimmetrikus abban az értelemben, hogy a fogalom negáltjára és ponáltjára is fennáll. Az eredeti megfogalmazás ez volt:

Yablo sorozat A sorban n-ik helyen álló S_n mondat akkor és csak akkor igaz, ha a rákövetkező összes többi mondat nem igaz.

Azonban úgy is ellentmondásra jutunk, hogy a fogalom tagadásából indulunk ki:

negált Yablo sorozat A sorban n-ik helyen álló S_n mondat akkor és csak akkor hamis, ha a rákövetkező összes többi mondat igaz.

Ez arra utal, hogy valójában egy kétértékű (bináris) függvénnyel van dolgunk, amelyik a természetes számok egy leképezését keresi a nullából és egyből álló halmazba. (Mellékes, hogy a nullát vagy az egyet feleltetjük meg az igaz vagy hamis logikai értéknek.)

Legyen egy f_i bináris függvény meghatározva a következő leképezéssel: $f_i := D \longmapsto \{0, 1\}$
Az 'S' predikátum és az f_i függvény között fennáll az alábbi összefüggés:

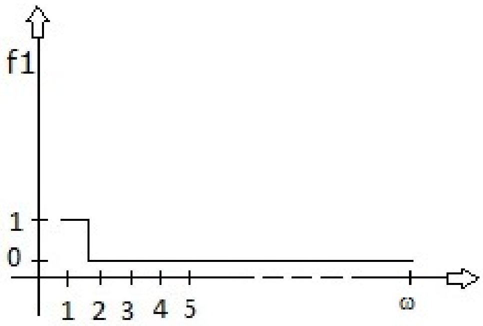
$1 = f_i①:= S①$ és

$0 = f_i① := \sim S①$

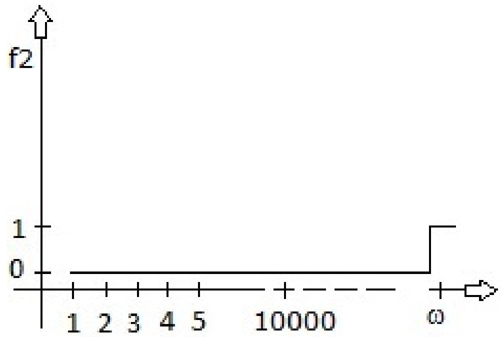
Ekkor a Yablo sorozat következő megfogalmazását kapjuk:

$$\forall n, k \in D(1 = f_i(n) \leftrightarrow (n < k \rightarrow 0 = f_i(k)))$$

Amennyiben a sorozat értelmezési tartománya a természetes számok halmaza kibővítve egy transzfinit sorszámmal – $D = \mathbb{N} \cup \{\omega_0\}$ – akkor a D teljesen rendezett halmaznak van maximális eleme, és f_2 függvény egy modellje a $\forall n, k \in D(1 = f_2(n) \leftrightarrow (n < k \rightarrow 0 = f_2(k)))$ formulának.



1.10. ábra. f_1 függvény



1.11. ábra. f_2 függvény

Bebizonyítható, hogy ha a sorozat értelmezési tartománya a természetes számok halmazára korlátozódik – $D = \mathbb{N}$ – akkor, nincs olyan f_i függvény, amelyre fennáll, hogy :
$\forall n, k \in \mathbb{N}(1 = f_i(n) \leftrightarrow (n < k \rightarrow 0 = f_i(k)))$

Ez a Yablo paradoxon egy más megfogalmazásban. A paradoxon ebben a megfogalmazásban is eltűnik, ha inverz relációt alkalmazunk, mert akkor a D halmaznak van minimális eleme. Ekkor az f_1 függvény egy modellje az alábbi formulának:
$\forall n, k \in D(1 = f_1(n) \leftrightarrow (n > k \rightarrow 0 = f_1(k)))$

Figyeljük meg, hogy (Y_c) nyilvánvalóan hamis ha s predikátum változót az ‘önmagával azonosnak lenni’ predikátumként interpretáljuk és D a természetes számok halmaza:

*(1)	$\forall n : n \in \omega \rightarrow (n = n \leftrightarrow \forall k(n < k \rightarrow\sim n = n))$	
*(2)	$1 \in H \rightarrow (1 = 1 \leftrightarrow \forall k(1 < k \rightarrow\sim 1 = 1))$	(1)
*(3)	$1 \in H \rightarrow (1 = 1 \leftrightarrow (1 < 2 \rightarrow\sim 1 = 1))$	(2)
*(4)	$T \rightarrow (T \leftrightarrow (T \rightarrow F))$	(3) (aritmetikai törvények)
*(5)	F	(4)
(Q.E.D.)	$(1) \Rightarrow F$	(5)

1.27. táblázat. Yablo sorozat azonosság fogalommal

Valamivel komplikáltabb bebizonyítani, hogy semmilyen predikátum nem elégíti ki Y_c formulát, pl. a ‘van kalap a fején’ sem. (A kalapos példa ötlete Roy A. Sorensentől és Graham Priesttől származik.) Íme a korábbról már ismerős levezetés:

*(1)	$S(n)$	Tegyük fel, hogy $S(n)$ igaz
*(2)	$\forall k.n < k \rightarrow \sim S(k)$	(1) (Y_n
*(3)	$n < n+1 \rightarrow \sim S(n+1)$	(2
*(4)	$n < n+1$	(aritmetikai igazság
*(5)	$\sim S(n+1)$	(3) (4
*(6)	$(\forall k.n < k \rightarrow \sim S(k)) \rightarrow (\forall k.n+1 < k \rightarrow \sim S(k))$	(aritmetikai igazság
*(7)	$\forall k.n+1 < k \rightarrow \sim S(k)$	(2) (6
*(8)	$S(n+1)$	(7) (Y_{n+1}
(9)	$S(n) \rightarrow . \sim S(n+1) \& S(n+1)$	(1) (5) (8
(10)	$\sim S(n)$	(9
(11)	$\forall n. \sim S(n)$	(10) mivel n tetszőleges vol
(12)	$\forall k.n < k \rightarrow \sim S(k)$	(11) (aritmetikai igazság
(13)	$S(n)$	(Y_n) (12
(14)	$\sim S(n) \& S(n)$	(10) (13
(15)	If $\exists s \forall n : n \in H \rightarrow (s(n) \leftrightarrow \forall k(n < k \rightarrow \sim (k)))$ then $\sim S(n) \& S(n) (Y_c)$	(14
(Q.E.D.)	$\sim \exists s \forall n : n \in H \rightarrow (s(n) \leftrightarrow \forall k(n < k \rightarrow \sim (k)))$	(15

1.28. táblázat. Az egzisztencia feltevés formális cáfolata

A bizonyítás szerint, a Yablo sorozat, mint propozíciók, azaz igaz vagy hamis mondatok halmaza, nem létezik. Az ellentmondás elillan, és a sorozat létezik, ha:

a. $D =$ negatív egészek, mert ekkor a maximális elem a nulla;

b. $D =$ természetes számok $\cup$ {első transzfinit sorszám}, mert akkor a maximális elem ω_0;

c. $D =$ egész számok $\cup$ {első transzfinit sorszám}, mert akkor a maximális elem ω_0;

d. a '<' reláció inverzét alkalmazzuk a természetes számok halmazán, mert ekkor a maximális elem a nulla.

6. A definíciókról

Vezessük be az alábbi egyszerűsítő jelölést:[37]

$G(s, n) =:$ minden k–ra(ha $n < k$ akkor nem $s(k)$)

Ezek alapján ezt a sémát kapjuk:

(YPG) van olyan s, hogy minden n-re: ha $n \in H$ akkor $(s(n)$pontosan akkor ha $G(s, n)))$

A fenti séma, mint valamely $s(n)$ definíciója, tartalmaz egyfajta körkörösséget – Priestnek tehát ebben igaza volt – mivel a definiens – $G(s, n)$ – tartalmazza a definiendum – $s(n)$ – egy elemét, 's'-et. Tehát a Yablo sorozatot egy hibás körbenforgó definíció határozza meg, melynek egzisztencia föltevése hamis a tárgyalási univerzumot a természetes számok halmazára korlátozva.

Egy definíció számos hibában szenvedhet, jelen esetben annak van perdöntő szerepe, hogy egy definícióból nem szabad következzen logikai ellentmondás. Jól értsük ezt meg. Legyen egy definíciónk a következő:

$Fx :=$ nem Gx és Gx

Ebben az esetben a definiens logikai ellentmondás, következésképpen 'F' predikátum terjedelme üres, azaz nincs olyan x, hogy Fx. Egy ilyen definíció gyakorlati szemponttól – pragmatikailag – hibás, de logikailag nem az, semmiféle bajt okoz, ha egy elmélet részeként alkalmazzuk. Egy ilyen definíció nem logikai ellentmondás és nem is vezethető le belőle logikai ellentmondás. (Jelen esetben a 'levezethetőség' szintaktikai és 'következmény' logikai fogalmak különbségének nincs jelentősége.) Más a helyzet a következő esetben:

$Fx :=$ nem-Fx

[37] A definíciók fogalmával kapcsolatban lásd Eszes Boldizsár tanulmányát: `http://www.szv.hu/files/eszes_boldizsar_a_definicio.pdf` Stephen Yablonak is van egy tanulmánya a definíciókról: Definitions - consistent and inconsistent [38]. Nem térek ki rá mert alapjaiban eltérő a felfogásunk.

Ezzel a definícióval logikai ellentmondást vezetünk be, melynek következtében – a klasszikus logika keretei között – elméletünkben bármi levezethető lesz. Ebben az esetben könnyű fölismerni a definícióban lévő ellentmondást, csakhogy vannak rafináltabb esetek is. Amennyiben egy $F(x) := \ldots$ formájú definícióból ellentmondás vezethető le, akkor az hibás cirkuláris definíció. Pontosan ez a helyzet Yablo paradoxonnal csak ott ravaszul elrejtették az ellentmondást.

7.Összefoglalás

A Yablo paradoxon megfogalmazásához nincsen szükség szemantikai predikátumokra, a paradoxon nem a logika alapjait érinti, hanem a sorozatok fogalmát. A Yablo paradoxon által megfogalmazott sorozat, a természetes számok végtelen tartományán keletkezik, mint jelek, jelentés nélküli formulák végtelen halmaza, de nem létezik, mint igaz vagy hamis mondatok végtelen sorozata. A paradoxon megszűnik, ha a sorozatnak van maximális eleme.

E sorok írója nem hisz a paradoxonok valamilyen teljesen átfogó fogalmában, ellenkezőleg úgy véli, hogy az egy családba tartozó paradoxonok rokonsági, némelykor leszármazási viszonyban állnak egymással, és a közeli rokonok jobban, a távoliak kevésbé hasonlítanak egymásra. Nem hiszem hogy vannak megoldhatatlan paradoxonok, melyeket csak egyre mélyebben újrafogalmazni lehet. Nem ismerek semmi olyan bizonyos állítást amiből megoldhatatlan paradoxok léte következne, bár azt sem tudom bebizonyítani, hogy ilyenek nem lehetségesek, azaz nem fordulhat elő hogy egyszer megoldhatatlan logikai-matematikai paradoxonokba ütközünk. Ha hívő volnék azt mondanám végső érv gyanánt, hogy Isten nem rosszindulatú.

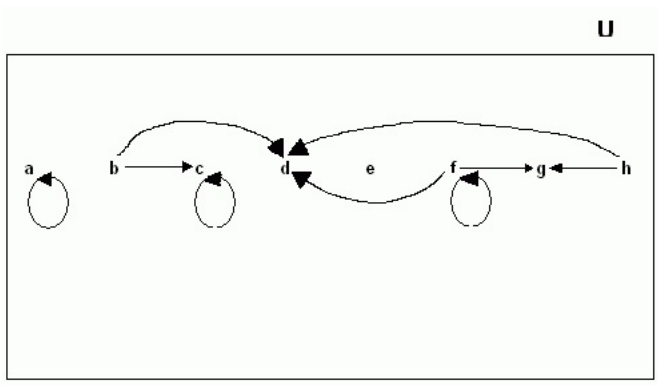
2. fejezet

II. angol nyelvű szövegek

2.1. On Russell's Paradox with Nails and Strings

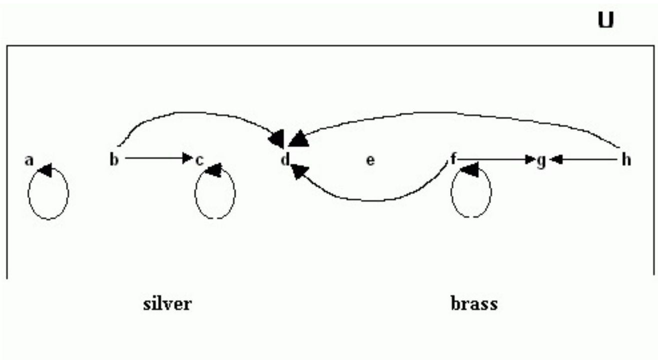
In 1901, Bertrand Russell refuted the following assumption: for every αattribute there is a set whose members are those and only those elements for which αattribute is true. In order to refute the assumption, he employed the attribute 'not a member of itself'. In order to fully grasp the assumption and the essence of the proof, I present a rather obvious example. I have slightly changed the original proof, but only to the extent that its kernel remains untouched.

It is possible to explain sets (or hypersets) in different ways, depending on the purpose of the explanation. Some formalisations of set theory can be illustrated using plane figures. Here, I reject the simple plane figure illustration, as it cannot be used to demonstrate that a set is a member of another set or of itself. Instead, I have tried to look for an illustration that sheds more light on the nature of the problem. Let us assume a room in which there are steel nails driven into the floor. Some of the nails are connected in the following way: two nails can be connected in one direction in a maximum of one way; and any string connecting two nails has its beginning and end marked. (Figure 1)



2.1. ábra

As can be seen, some of the nails are tied with a loop, others are not. We then have the following task. We are given a silver nail and a brass nail and, and we are expected to connect the former with every nail in the room without a loop around it but with a string starting from it, and the latter with every nail in the room with a loop around it and with a string starting from it. The connection must always start from the brass or the silver nail. Our task is complete only if we find the unique correct solution. Here is a picture of the room again, together with the two new nails, in order to solve the task. (Figure 2)
The silver nail does not need to be connected with nails g, d and e, because they do not have a string starting from them; nor does it need to be connected with nails a, c and f, because they have a loop around them. It must, however, be connected with nails b and h, because they have strings starting from them but no loop. The question now arises: Should the silver nail be connected with itself or not? Since it has a string starting from it towards nails b and h, and has no loop around it, it should be, but as soon as we do so, we are no longer allowed to do so, because it has a loop around it. Thus, the task is unsolvable for the silver nail.



2.2. ábra

In the case of the brass nail, we find two solutions. This again is a problem, because we are at a loss as to which one to choose.

If we consider the nails as sets (hypersets) or their members, and the strings as the relation ’member of’, we can formulate the task using the following two interpreted formulas:

(1) $x \in \text{silver} \leftrightarrow (\exists y\, y \in x \& x \notin x)$

$x \in \text{brass} \leftrightarrow (\exists y\, y \in x \& x \in x)$

(2) In view of figure 1 it is true that: $b \in \text{silver}$.

The task is unsolvable for the silver nail because (1) leads to a contradiction:

(3) $\exists y(y \in \text{silver})$ (2)

(4) $\exists y(y \in \text{silver} \rightarrow (\text{silver} \in \text{silver} \leftrightarrow \text{silver} \notin \text{silver}))$ (1)(3)

(5) $\text{silver} \in \text{silver} \leftrightarrow \text{silver} \notin \text{silver}$ (3)(4)

If there were no steel nails in the room, the task could be solved for the silver nail in the following way: $\sim \exists y(y \in \text{silver})$. But even in this case, the definition of the brass nail – and the equivalent set – would be ambiguous, since a set is defined with no ambiguity by its elements. In this case, neither the statement 'brass $\in$ brass' nor the statement 'brass $\notin$ brass' contradicts premise (1).

There are three ways of eluding the paradox.

I. In the first case, the silver and brass nails must be driven into the floor outside the room. In Russell's view, this should be done on the floor above, while in Zermelo's view it is sufficient to go as far as the hall. In this case, the solution to the task would be the same as if definition (1) were true only for the steel nails. Taking the steel nails to be sets, it is clear from the following that we must leave the room. Let 'U' be the set of the nails in the room:

(6) $\forall x(x \in \text{silver} \leftrightarrow (x \in U \& \exists y\, y \in x \& x \notin x))$

(7) $\text{silver} \in \text{silver} \leftrightarrow (\text{silver} \in U \& \text{silver} \notin \text{silver})$ (6)(3)

(8) $\text{silver} \in U(\text{silver} \in \text{silver} \leftrightarrow \text{silver} \notin \text{silver})$ (7)

(9) $\text{silver} \notin U$ (8)

Thus, neither the silver nail nor the brass nail will have a loop around it.

II. In the second case, we can impose the restriction that the silver and brass nails are not tied with a loop. This solution, however, cannot be applied to sets: W.V. Quine (1955: "On Frege's way out", *Mind*, 145-159) pointed out that the axiom equivalent to this solution (10) leads to a contradiction.

(10) $\forall F \exists y \forall x(y \notin y \& (x \neq y \rightarrow (F(x) \leftrightarrow x \in y)))$

III.The essence of the third solution is that the nails are not sets but signs; and definitions are always actions that take place in time. Introducing a definition means giving instructions, and to apply a definition is to fulfil the instructions. The mysterious nature of the task lies in the fact that the nails that are to be linked

to the new ones are not defined by a list. If there are too many nails, this is not very practical, or may even be impossible. In such cases, we can use definitions, or rules. We formulate unambiguous conditions, and if they hold for a thing, then the rules must be applied; if they do not, the rules must not be applied. However, the rules are applicable only to those entities that are entirely determined by the conditions at the beginning. Thus, the solution to the task cannot be applied to the task itself, before one has finished solving it. That is to say, if an attribute of a thing is dependent on the solution of the task, then this attribute cannot be a part of the conditions given at the beginning. Thus, at the beginning, we have to take a photograph of the original state of the room, with no silver or brass nails. In this way, we can verify the solution subsequently.
As the nails are being considered as an illustration of sets, the following axioms concerning time and symbol usage must be fulfilled:

(11) Time is an infinite sequence of discrete moments.

(12) For every γ attribute, at any time t_1, there is a symbol, and at the following point in time t_2, the symbol at t_2 denotes those and only those things that have γ attribute at t_1. e.g. $\gamma(x) := \exists y\, y \in_1 x \& x \notin_1 x$

$x \in_2$ silver $\leftrightarrow (\exists y\, y \in_1 x \& x \notin_1 x)$

(13) Sets are symbols that denote or do not denote things, irrespective of time.

In this weakened, nominalist conception, the assumption refuted by Russell is nevertheless true.

2.2. On paradox of adder

Nuel Belnap formulated his paradox in the following manner:

> Let δ symbolize the denotation function, and let us baptize the symbol „ '$\delta a + 1$' ", using the letter „a" for its name; that is, we declare that a='$\delta a + 1$'. So by applying the denotation-function, δ, to both sides, we readily obtain $\delta a = \delta$('$\delta a + 1$'). But δ('$\delta a + 1$')=$\delta a + 1$ (because δ is denotation), so $\delta a = \delta a + 1$. As a result, there is a paradox. Ordinary Peano arithmetic says that the adding-one function has no fixed point: $n + 1 \neq n$, all n. But this stands in contradiction to what we have just shown, that $\delta a = \delta a + 1$, i.e., that δa is a fixed point of adding one. [1]

It is clear that in the formula '$\delta a + 1$', the term 'δa' denotes a number and not a numeral, because in this context the addition is a mathematical operation that is defined on numbers and not signs, thus the reasoning is grammatically correct. From a semantic point of view, Belnap emphasized the similarity between his paradox and another circular paradox: »We may also „solve" the Adder in analogy to the three-valued „solution" to the Liar paradox. That is, we may let u be „the ungrounded number," following Kleene arithmetic by declaring that u is a fixed point for the adding-one function: $u + 1 = u$. Then we can let the denotation of a be u, which „solves" the paradox. ... the Adder is exactly the same as the Liar, *mutatis mutandis*: Given the Liar and no hierarchy, either negation has a fixed point, in which case we are not doing (ordinary two-valued) semantics, or else, if negation has no fixed point, we have a contradiction in our semantic theory.«

Let me shed some light on the connection to the Liar paradox following Belnap's argumentation in another way. Let '$\sim$' be Kleene's three-valued negation, where 's' is a sentence: 1=True, 0=False, 2=not True and not False, and $|s|$ is the logical value of s sentence.

The truth table:

s	$\sim s$
1	0
0	1
2	2

2.1. táblázat. Truth table

This means:

[1] Nuel Belnap: *Prosentence, Revision, Truth, and Paradox*, http://www.pitt.edu/ belnap/143prosentence.pdf [3]

(A1)	If $1 = \lvert s \rvert$ then $0 = \lvert \sim s \rvert$
(A2)	If $0 = \lvert s \rvert$ then $1 = \lvert \sim s \rvert$
(A3)	If $2 = \lvert s \rvert$ then $2 = \lvert \sim s \rvert$
(A4)	$0 \neq 1$ and $1 \neq 2$

Let L be the Liar sentence formulated by (1):

*(1)	$L \leftrightarrow_{df} \sim L$	(This is a circular definition.)
*(2)	$L \leftrightarrow \sim L$	(1)
*(3)	$2 = \lvert L \rvert \leftrightarrow 2 = \lvert \sim L \rvert$	(2) (A3)
(4)	If $L \leftrightarrow_{df} \sim L$ then $2 = \lvert L \rvert$	(3)

In other words, the Liar sentence does not express a proposition, because it is neither true nor false. Consider, then, the following inference of the Adder paradox:

(A1)	For all x, if x is a finite number then $x \neq x + 1$	
(A2)	$\forall x, x = \delta(\lceil x \rceil)$	
*(1)	$a =$ '$\delta a + 1$'	
*(2)	$\delta(a) = \delta($'$\delta a + 1$'$)$	(1) (A2)
*(3)	$\delta($'$\delta a + 1$'$) = \delta a + 1$	(A2)
*(4)	$\delta a = \delta a + 1$	(1) (3)
(5)	If $a =$'$\delta a + 1$'. Then $\delta a = \delta a + 1$	(1)(4)
(6)	If δa is a finite number then $\delta a \neq \delta a + 1$	(A1)
(7)	δa is not a finite number but something else, e.g. a infinite cardinal number.	(1)(5)(6)

In both cases there is a fixed point.

The above solution does not work if we insist that the Liar sentence is true or false or that δa is a finite number. Solving the Liar paradox in the framework of classical logic or semantic and definition theory, we must use language levels and different truth predicates. The following brief outline of Tarski's solution is based on an interpretation of the Axiom of Specification: To every set of sentence names P and to every one-to-one map from sentence names to sentences $S(x)$ there corresponds a set of sentence names T whose elements are exactly those elements x of P for which $S(x)$ holds.

„Axiom of specification: To every set A and to every condition $S(x)$ there corresponds a set B whose elements are exactly those elements x of A for which $S(x)$ holds." Paul R. Halmos (1960: *Naive Set Theory*, http://www.questia.com/read/10345494, Van Nostrand., Princeton, NJ., p.6)

Let P, P_1, S be sets of sentence names; T, T_1, T_2 sets of true sentence names; and $S(x), \delta_1(x)$ one-to-one maps (bijective functions) from sentence names to sentences.

(1)	$\forall P \forall S \exists T \forall x(x \in T \leftrightarrow (x \in P(S(x)))$	Axiom of Specification
(2)	$\forall S \exists T \forall x(x \in T \leftrightarrow (x \in P_1(S(x)))$	(1)
(3)	$\exists T \forall x(x \in T \leftrightarrow (x \in P_1(\delta_1(x)))$	(2) δ_1 where $\delta_1(\lambda) \leftrightarrow_{df} \lambda \notin T_1$
(4)	$\forall x(x \in T_2 \leftrightarrow (x \in P_1(\delta_1(x)))$	(3)T_2
(5)	$\lambda \in T_2 \leftrightarrow (\lambda \in P_1(\delta_1(\lambda))$	(4)
(6)	$\lambda \in T_2 \leftrightarrow (\lambda \in P_1(\lambda \notin T_1)$	(5)
(7)	$\lambda \in P_1 \rightarrow (\lambda \in T_2 \leftrightarrow \lambda \notin T_1)$	(6)

Assuming that we have only a unique set of Truth ($T_2 = T_1$), the consequence is logical fallacy, thus if $\lambda \in P_1$, that is, if λ is a true or false sentence ($x \in P_1 =: x$ expresses a proposition), then we must use different sets of true sentences that are extensions of different truth predicates at different language levels.

Belnap claims: »We may „solve" the Adder paradox in the Tarski way, by classifying it as due to bad grammar (a ='$\delta a + 1$' both uses „a" on the left, and mentions it on the right).«Belnap is right regarding the similarity, but he fails to localize the root of the disease. He should not degrade Tarski's solution of semantic paradoxes by using quotation marks, but should apply Tarski's theory properly. For Tarski, every semantic functor, such as the denote' function or true' predicate,has a certain level that is connected to a given language. This means that we have a denote$_1$' function (δ_1) in language$_1$ and denote$_2$' function (δ_2) in language$_2$. Let us suppose that: (D2) $\forall x \in$ terms of language$_2$, $x = \delta_2(\lceil x \rceil) =:$ For every x terms of language$_2$, $\lceil x \rceil$ denotes$_2$ x that is »'a' «denotes »a «, »'b' «denotes »b «, etc. »Julius Caesar «denotes a Roman general but »'Julius Caesar'«denotes a name of a Roman general. (Where $\lceil\ \rceil$ is the symbol for the citation function or quasi-quotation in terms of Quine.) Note that, by using quotation marks, we mention rather than use the first two letters of the alphabet. Applying the considerations above we arrive at the following formulation of the Adder paradox.

Let δ_1 symbolize the denotation function in language L_1 defined for all the terms of L_1, and let us baptize the symbol „ '$\delta_1(a) + 1$' ", using the letter „a" for its name; that is, we declare that a = '$\delta_1(a) + 1$', where »a = '$\delta_1(a) + 1$' « is an object language sentence. Following Tarski, we can talk about this sentence on a metalanguage level. We can talk about truth, or about what terms denote on both sides of identity relations, only at the level of metalanguage. We can claim at the metalanguage level that $\delta_2(a)$ = δ_2('$\delta_1(a) + 1$'), where δ_2 means the denote' function in L_2 defined for all the terms of L_2. (For the sake of simplicity we suppose that the metalanguage contains the object language as a part.) It follows from D2 that δ_2('$\delta_1(a) + 1$') = $\delta_1(a) + 1$, hence $\delta_2(a) = \delta_1(a) + 1$, but this sentence of L_2 does not contradict Peano's axioms. In this way the contradiction immediately disappears, thus—not surprisingly—we have eliminated the paradox. Sometimes it is worth using Tarski's solution rather than merely mentioning it.[2]

[2]Original appearance: The Reasoner 5/3, March 2011

2.3. The inherent risks in using a name-forming function at object language level

The truth problem is one of the central problems of philosophy. Nowadays, every major theory of truth that applies to formal languages utilizes devices referring to formulae. Such devices include name-forming functions.[3] The theory of truth discussed in this paper applies to strict formal logic languages, the critique of which must, therefore, also obey mathematical rigour. This is why I have used formal logic derivations below rather than the argumentation of ordinary language.

The first derivation below demonstrates that some name-forming functions produce an antinomy. However, in the first instance we can straightforwardly escape from the trap by denying the existence of that given function. In the second derivation, however, I prove that the citation function can also produce antinomy. Furthermore, in this case we cannot easily escape from the trap, because denying the existence of the citation function is counterintuitive.

In mathematics it is often difficult to understand that two formulae are equivalent, although it is evident that a formula is always equivalent to itself. The axiom that follows (Axiom A) makes a similar claim in the domain of logical formulae.

Let L be a first-order logic language, including the one-to-one name-forming function ξ, which is a mapping from formulae to names. Let ξ^{-1} be the inverse of ξ. The iteration of the operator ξ is acceptable. If z is a formula name of L, then $\xi^{-1}(z)$ is a formula of L. There are no restrictions for ξ, and hence, Axiom A, which is a version of Tarski's β, is intuitive:

(A) $\exists\xi(($$\xi$ is a one-to-one function of L in the domain of L WFFs) & $\forall x \forall y$(if x and y are L sentence names and $x = y$, then ($\xi^{-1}(x) \leftrightarrow \xi^{-1}(y)$))))

The following derivations are based on Quine's deduction technique outlined in his book„Methods of Logic". What follows is a proof by contradiction: the asterisk indicates the original premise which is assumed, and all subsequent consequences of that premise. The absence of an asterisk prefix to (7) indicates that that line not depend on previous premises, but instead holds absolutely. The absence of an asterisk

[3] Original appearance: The Reasoner 9/5, May 2015

thus indicates a claim to validity. The argument, and specifically premise (2), is a formulation of Tarski's derivation of an antinomy from the unrestricted use of quasi-quotation. (For further clarification of this point and its relation to Tarksi see the discussion that follows this derivation.)

There are no specific restrictions for ξ; so, we apply premise (2):

*(2)	$\exists x(x$ is a sentence name of L &	
	$x = \gamma(\forall y(x = y \to \sim \gamma^{-1}(y))))$	(A)
	γ is such a bijective function	
*(3)	$z = \gamma(\forall y(z = y \to \sim \gamma^{-1}(y)))$	(2) z
*(4)	$\gamma^{-1}(z) \leftrightarrow \forall y(z = y \to \sim \gamma^{-1}(y))$	(A) (3)
*(5)	$\gamma^{-1}(z) \leftrightarrow (z = z \to \sim \gamma^{-1}(z))$	(4) $y = z$
*(6)	$\gamma^{-1}(z) \leftrightarrow \sim \gamma^{-1}(z)$	(5)
(7)	If (A) and (2) are true, then $\gamma^{-1}(z) \leftrightarrow \sim \gamma^{-1}(z)$	(A) (2)
(8)	If (A) is true, then there is no such γ function.	(7)

Since axiom (A) is a plausible assumption, it is preferable to deny the existence of function γ and preserve (A). Nonetheless, it is clear that this argument is readily transformable to another inference based on another name-forming function. What if we substitute function γ with the so-called citation function?

Tarski designated the „ $(\lambda x)\ulcorner x \urcorner$ " function as the „citation function" or „quasi-quotation," distinguishing the usage of the citation function from the normal usage of quotation marks. The quasi-quotation is only one possible name-forming function among many others, like Gödel numbering.

In the domain of well-formed formulas (WFFs), the quasi-quotation function is not a partial function; however, other name-forming functions can be partial functions. This means that one can form an individual constant of any WFF or term by applying quasi-quotation, and can quote quote-names; however, other name-forming functions leave one's hands tied: in other cases, it is not permitted to iterate the use of name-forming functions. It must be noted that there is no problem in using quasi-quotation at the metalanguage level in the domain of formulas of the object language. In this case, $\ulcorner p \urcorner$ is not a name of object language names, but a name of metalanguage names. In another case, if one applies a formal logic language including quasi-quotation at the object language level, then one has to handle this device very carefully. We know from Tarski that quasi-quotation itself is a very risky device which can produce antinomy. Tarski only sketched the argument:

> Let the symbol c' be a typographical abbreviation of the expression the sentence printed on this page, line 6 from the top'. We consider the following statement: for all p, if c is identical with the sentence 'p', then not p ... We establish empirically:
> (α) the sentence 'for all p, if c is identical with the sentence 'p', then not p' is identical with c.
> In addition we make only a single supplementary assumption which concerns the quotation-function and seems to raise no doubts:
> (β) for all p and q, if sentence 'p' is identical with sentence 'q', then p if and only if q.
> By means of elementary logical laws we easily derive a contradiction from the premises (α) and (β) (Alfred Tarski, 1936: The concept of truth in formalized languages. In [32], p.162).
> Although Tarski's argument has been reconstructed before, the reconstruction below appears to be novel.

Let „$(\lambda x)\ulcorner x\urcorner^{-1}$" symbolize the denotation function: if x is a formula name of L, then $\ulcorner x\urcorner^{-1}$ is a formula of L. Let us then consider the following inference:

(B) $(((\lambda x)\ulcorner x\urcorner$ is a one-to-one citation function of L in the domain of L WFFs) & $\forall x\forall y$(if x and y are L sentence names and $x = y$, then $\ulcorner x\urcorner^{-1} \leftrightarrow \ulcorner y\urcorner^{-1}$))

There are no specific restrictions for $(\lambda x)\ulcorner x\urcorner$ name-forming function, so we apply premise (2):

*(2)	$\exists x$(x is a sentence name of L &	
	$x = \ulcorner\, \forall y(x = y \rightarrow \sim \ulcorner y\urcorner^{-1})\urcorner)$	(B)
*(3)	$z = \ulcorner(\forall y(z = y \rightarrow \sim \ulcorner y\urcorner^{-1})\urcorner$	(2) z
*(4)	$\ulcorner z\urcorner^{-1} \leftrightarrow \forall y(z = y \rightarrow \sim \ulcorner y\urcorner^{-1})$	(B) (3)
*(5)	$\ulcorner z\urcorner^{-1} \leftrightarrow (z = z \rightarrow \sim \ulcorner z\urcorner^{-1})$	(4) $y = z$
*(6)	$\ulcorner z\urcorner^{-1} \leftrightarrow \sim \ulcorner z\urcorner^{-1}$	(5)
(7)	If (B) and (2) are true, then $\ulcorner z\urcorner^{-1} \leftrightarrow \sim \ulcorner z\urcorner^{-1}$	(B) (2)
(8)	If (B) is true, then there is no	
	such $(\lambda x)\ulcorner x\urcorner$ name forming function.	(7)

Thus, applying the citation function as a name-forming device at the object language level does indeed result in an antinomy. It follows from the above-mentioned inference that any theory including (B) – similar to the Revision Theory of Truth – is inconsistent. Gupta and Belnap declare in their seminal work: „...L contains for each sentence A a quotational name 'A'. The interpretation I assigns to the name 'A' the sentence A." (Anil Gupta and Nuel Belnap: The Revision Theory of Truth [12] p.75). Philip Kremer says:

„L^- will have a quote name 'A' for every sentence A of L^-." (2014: The Revision Theory of Truth, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Summer 2014 Edition).

The conclusion is that it is advisable to use name-forming devices at the metalanguage level; otherwise, at the object language level, one must carefully restrict the domain of the name-forming function to avoid its iterated usage. (I thankfully acknowledge the helpful assistance received from Peter Fekete.)

2.4. Logikai szimbólumok, ábrák jegyzéke

Formális jel	Magyarázat	Megnevezés
$\sim$	Nem igaz, hogy ...	tagadás, negáció
$\&$	... és ...	és, konjunkció
$\vee$	... vagy ... (megengedő értelemben)	vagy, alternáció, diszjunkció
∇	vagy ... vagy ...	kizáró vagy
$\rightarrow$	Ha ... akkor ...	kondicionális, materiális implikáció
$\leftrightarrow$	akkor és csak akkor, pontosan akkor ha	bikondicionális, materiális ekvivalencia
$\vdash$	... ból megengedett átalakításokkal levezethető ...	logikai levezethetőség
$\Rightarrow$	Az előtag igazsága minden megengedett értelmezésben maga után vonja az utótag igazságát	logikai következmény
$\Leftrightarrow$	Következmény mindkét irányban	logikai ekvivalencia
$=$	Igaz, amikor a jel két oldalán ugyanannak a neve szerepel	azonosság, identitás reláció
$\neq$	Igaz, amikor a jel két oldalán különböző dolgok nevei szerepelnek	nem azonosság, különbözőség
$\equiv$	Egyformaság, egybevágóság	ekvivalencia reláció
$\cong$	Hasonlóság	tolerancia reláció

① korábbi vagy egyidejű ② - el

Formális jel	Magyarázat	Megnevezés
$\in$	Az Euler féle szám eleme a valós számok halmazának	eleme reláció
$\notin$	Az Euler féle szám nem eleme a racionális számok halmazának	nem eleme reláció
$\subseteq$	Emberi lények halmaza $\subseteq$ civilizációt alkotó lények halmaza	részhalmaza
$\subset$	ikrek $\subset$ testvérek	valódi részhalmaza
$\Re$	Két vagy több dolog viszonya.	reláció
$\breve{\Re}$	A gyereke reláció tranzitív lezártja a leszármazottja reláció.	reláció tranzitív lezártja
f	Az elevenszülők gyermekeihez hozzárendeli az anyjukat (a mesterséges beavatkozásoktól eltekintünk.) A gyermekek halmaza a függvény értelmezési tartománya, az anyák halmaza a függvény értékkészlete.	függvény
$\forall$	Minden …	univerzális kvantor
$\exists$	Van olyan …	egzisztenciális kvantor
$\exists!$	Van pontosan egy olyan …	unicitás kvantor
℩	Az a dolog …	deskriptor
$\Box$	Szükségszerű, hogy …(Bárhogy is alakulnak vagy alakulnának a körülmények, az állítás igaz marad.)	szükségszerű operátor
$\Diamond$	Lehetséges, hogy …(Bizonyos körülmények között az állítás igaz.)	lehetséges operátor

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

References

[1] John Langshaw Austin. *Tetten ért szavak*. Hermész Könyvek. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1990. ISBN: 963-05-5637-5.

[2] Jc Beall. „Is Yablo's Paradox Non-Circular?": *Analysis* 61 (2001), 176–187. old.

[3] Nuel Belnap. „Prosentence, Revision, Truth, and Paradox". *Philosophy and Phenomenological Research* Vol. LXXIII.3 (2006), 705–712. old. URL: `http://www.pitt.edu/~belnap/143prosentence.pdf`.

[4] Otávio Bueno. „A Defense of Second-Order Logic". *Axiomathes* 20.2-3 (2010), 365 –383. old.

[5] Otávio Bueno és Mark Colyvan. „Paradox without Satisfaction". *Analysis* 63.2 (2003), 152–156. old. ISSN: 00032638, 14678284. URL: `http://www.jstor.org/stable/3329223`.

[6] Rudolf Carnap. *The Logical Syntax of Language*. Open Court Classics. Open Court, 2002, 352. old. ISBN: 0-8126-9524-0.

[7] Roy T. Cook. *The Yablo Paradox: An Essay on Circularity*. Oxford University Press, 2014, 193. old. ISBN: 978-0-19-966960-8.

[8] Szűcs Ervin. *Hasonlóság és modell*. Műszaki Könyvkiadó, 1972, 299. old.

[9] Thomas Forster. „The Significance of Yablo's Paradox without Self-Reference". (1996 October 30), 2. old. URL: `http://www.dpmms.cam.ac.uk/âĹijtf/yablondjfl.ps`.

[10] Laurence Goldstein. „Fibonacci, Yablo, and the Cassationist Approach to Paradox". *Mind* 115.460 (2006), 867–889. old. ISSN: 00264423, 14602113. URL: `http://www.jstor.org/stable/4121874`.

[11] Irving M. Copi-James A. Gould. *Kortárs tanulmányok a logikaelmélet kérdéseiről*. Budapest: Gondolat, 1985. ISBN: 963-281-508-4.

[12] Anil Gupta és Nuel Belnap. *The Revision Theory of Truth*. The MIT Press, 1993, 313. old. ISBN: 9780262526951.

[13] Klima Gyula. *Summulae de dialectica*. Yale University Press, 2001, 1104. old. ISBN: 9780300084252.

[14] James Hardy. „Is Yablo's paradox Liar-like?": *Analysis* 55.3 (1995), 197–198. old. DOI: https://doi.org/10.1093/analys/55.3.197.

[15] R. Ingarden és H.R. Michejda. *Time and Modes of Being*. American lecture series publication. Charles C. Thomas, 1964. ISBN: 9780398008970. URL: https://books.google.hu/books?id=IRx8QgAACAAJ.

[16] John Etchemendy Jon Barwise. *The Liar: An Essay on Truth and Circularity*. Oxford University Press, 1987. ISBN: 9780195059441.

[17] Jeffrey Ketland. „Yablo's Paradox and ω-Inconsistency". *Synthese* 145 (2005 July), 295–302. old. DOI: 10.1007/s11229-005-6201-6.

[18] Saul Kripke. „Outline of a Theory of Truth". *Journal of Philosophy* 72.19 (1975), 690–716. old. DOI: 10.2307/2024634. URL: https://www.impan.pl/~kz/truthseminar/Kripke_Outline.pdf.

[19] Saul Kripke. „Ungroundedness in Tarskian Languages". *Journal of Philosophical Logic* 48.3 (2018 october 25), 1–7. old. DOI: https://doi.org/10.1007/s10992-018-9486-x. URL: https://epist3me.wordpress.com/2018/10/26/ungroundedness-in-tarskian-languages/.

[20] Laureano Luna. „Yablo's Paradox and Beginningless Time". *Disputatio* 3.26 (2009), 89–96. old. DOI: 10.2478/disp-2009-0002.

[21] Robert L. Martin. *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*. Oxford University Press, 1984.

[22] Polányi Mihály. *Személyes tudás*. Mesteriskola. Budapest: Atlantisz Könyvkiadó, 1994.

[23] Willard van Orman Quine. *The Ways of Paradox and Other Essays*. Harvard University Press, 1979, 335. old. ISBN: 0-674-94837-8.

[24] Platón. *Platón összes művei*. Bibliotheca Classica. Európa Könyvkiadó, 1984. ISBN: 963-07-3237-8.

[25] Graham Priest. „Yablo's Paradox". *Analysis* 57.4 (1997), 236–242. old. ISSN: 00032638, 14678284. URL: http://www.jstor.org/stable/3328081.

[26] Willard Van Orman Quine. *A logika módszerei*. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1968.

[27] Willard Van Orman Quine. *The Ways of Paradox and Other Essays*. Harvard University Press, 1979. ISBN: 978-067-494-837-2.

[28] Willard Van Orman Quine. *Methods of Logic*. Routledge &Kegan Paul, Second impression 1958.

[29] Paul Arthur Schilpp. *The Philosophy of Rudolf Carnap*. Library Of Living Philosophers Vol. XI. Open Court, 1963, 3–83. ISBN: 978-0812691535.

[30] Roy A. Sorensen. „Yablo's Paradox and Kindred Infinite Liars". *Mind* 107.425 (1998), 137–155. old. ISSN: 00264423, 14602113. URL: `http://www.jstor.org/stable/2659810`.

[31] Tuboly Ádám Tamás. *Egység és tolerancia – A logikai empirizmus tudományos világfelfogása*. Bölcsészettudományi Kutatóközp., 2018, 515. old. ISBN: 9789634161042.

[32] Alfred Tarski. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Hackett Publishing Company, 1983, 506. old. ISBN: 0-915144-75-1.

[33] Alfred Tarski. *Bizonyítás és igazság – válogatott tanulmányok*. Budapest: Gondolat, 1990, 74–78. old. ISBN: 963-282-800-5.

[34] Neil Tennant. „On Paradox without Self-Reference". *Analysis* 55.3 (1995), 199–207. old. ISSN: 00032638, 14678284. URL: `http://www.jstor.org/stable/3328581`.

[35] Sós Vilmos. *Modern igazságelméletek*. Gondolat Könyvkiadó, 1978, 244. old. ISBN: 9632805860.

[36] Ludwig Wittgenstein. *Logikai-filozófiai értekezés*. Akadémiai Kiadó, 1963, 234. old.

[37] Stephen Yablo. „Truth and reflection." *Journal of Philosophical Logic* 14.3 (1985), 297–349. old. DOI: `DOI:10.1007/BF00249368`.

[38] Stephen Yablo. „Definitions - consistent and inconsistent". *Philosophical Studies* (1993), 297–349. old. URL: `http://www.mit.edu/~yablo/circdef.pdf`.

[39] Stephen Yablo. „Paradox without Self-Reference". *Analysis* 53.4 (1993), 251–2. old. DOI: `10.1093/analys/53.4.251`. URL: `http://www.jstor.org/stable/3328245`.

[40] Stephen Yablo. „Circularity and Paradox". (2004). Szerk. Thomas Bolander, Vincent F. Hendricks és Stig Andur Pedersen, 139–157. old. URL: `http://www.mit.edu/~yablo/circularity&paradox.pdf`.

[41] Pauler Ákos. *Bevezetés a filozófiába*. Budapest: Paulus Hungarus-Kairosz, 268. old. ISBN: 963-9137-588.

Alphabetical Index

A könyv LaTeX szövegszerkesztővel készült.