Filozófiai válaszok

kézirat

András Ferenc

Filozófiai válaszok

András Ferenc

ver.2023. április 19.

A szöveg bármely része szabadon fölhasználható a forrás megjelölésével.

©András Ferenc

©A borító grafika András Tibor munkája.

Tartalomjegyzék

Előszó **ix**

1. Zűrök a menyországban **1**

1.1. Mi az igazság? 1

1.2. Bejuthatunk-e a menyországba kalappal a fejünkön? 5

2. A logika és a józan ész **11**

2.1. A nyil paradoxonról 11

Addendum a nyíl paradoxonhoz 16

2.2. André Gallois a változás filozófiai problémájáról 22

Bevezetés 22

Van-e filozófiai probléma a változás fogalmával? 22

Az 1998-as álláspont 22

Az első argumentum 25

A második argumentum Gallois interpretációjában 26

A harmadik argumentum 27

David Lewis érve 27

Néhány záró megjegyzés 28

A klasszikus-fizikai jellemzők időbelisége 29

Intrinzikus tulajdonságok alapvető relációssága 29

Indexek és relációk 30

Összefoglalás 30

2.3. A változás lehetetlensége 31

Bevezetés 31

Egy példa 32

Az azonosság fogalmát kormányzó logikai alapelvek . . . 33
Fizika és filozófia . . . 34
A drót önazonossága kritériumai . . . 35
A változás ábrázolása táblázattal . . . 36
A változás leírása formulákkal többféle szemlélettel . . . 37
A változás ábrázolása Venn diagrammal . . . 38
2.4. Különvélemény az esetleges azonosságról . . . 43
Bevezetés . . . 43
Lambda absztrakció . . . 44
Érvek az azonosság szükségszerűsége mellett . . . 44
Érvek az azonosság szükségszerűsége ellen . . . 47
Az én aggályaim . . . 53
Összefoglalás . . . 55

3. A kupac paradoxon rokonsága 57

3.1. Hasonlóság, egyformasás, azonosság . . . 57
Bevezetés . . . 57
matematikai háttér . . . 58
Relációk . . . 71
Hasonlóságtól az egyformaságig . . . 79
Egyformaság és fölcserélhetőség . . . 83
Egyformaság a gyakorlatban . . . 85
Önazonosság . . . 87
3.2. Thészeusz hajója metafizikai vizekre téved . . . 96
Bevezetés . . . 97
A kiállított hajó . . . 98
Alkalmazás . . . 100
Összefoglalás . . . 101

4. Zárszó 103

4.1. A filozófiai problémák tipológiája . . . 103
4.2. Utóhang . . . 108

5. Logikai szimbólumok, ábrák jegyzéke **109**

Könyvek **115**

Tanulmányok **117**

Név és tárgymutató **118**

Előszó

Hogyan alakult ki a Föld és az élet vagy akár az egész világegyetem; honnan származik az ember és hogyan alakult ki a gondolkozás? Mennyire alakítható és mennyiben öröklött és változatlan az emberi természet? Miért változtak meg az egyik korszakban és helyen, vagy épp ellenkezőleg, miért maradtak fenn változatlanul másutt és más időszakban az emberek erkölcsei, vallási hitei? Van-e időbeli kezdete a világnak, és térben végtelen-e vagy ellenkezőleg véges; vannak-e végső elemi részek melyekből minden anyagi dolog fölépül, vagy az anyag végtelenül osztható; minden jelenségnek van-e oka, vagy az emberi szabadság ellentmond ennek? Az első négy kérdésre mindenki elfogad magának valamiféle választ szemezgetve a tudomány vagy mítoszok és vallási hagyományok köréből, az utóbbi három kérdést pedig Kant vizsgálta a metafizikát a sarkaiból kifordítani kívánó művében. Több mint kétszáz évvel később Kant kérdéseire is a tudomány próbált meg kísérleti tényekkel és logikus érvekkel alátámasztható válaszokat adni. A végtelenről pl. a halmazelméletben és a matematikai analízisben találunk meglepő gondolatokat. Az ilyen alapvető világnézeti kérdésekre egykoron a vallás és a filozófia, majd később – a XVIII. - XIX. századi nyugati ipari civilizációtól kezdve – fokozatosan a függetlenségét a vallási - politikai előítéletektől kiharcoló szaktudományok kezdtek el válaszokat adni. Ugyanakkor a kortárs filozófiának ezek közül az idő, az okság és a szabadság fogalmáról továbbra is van lényeges mondanivalója. Bármilyen nyomasztó a túlsúlya manapság az alkalmazott tudományoknak, a technikának és a technológiának, az őket megalapozó alaptudományok világnézeti gyökerei nem száradtak el. Annyi változott csupán, hogy a világnézeti kérdések racionális válaszait nem csak a filozófiai írók fogalmazzák meg, hanem számos területen a szaktudományok művelői is, akik hajlandóak diszciplínájuk legfontosabb eredményeit a lehetséges mértékig közérthetően ismertetni. Ezt példázza, hogy a „ki vagyok én” vagy „hogyan éljek” kérdésre nem csak az életfilozófia művelőinek, hanem a pszichológusoknak is bölcs válaszai vannak. A filozófia tehát ami egykoron maga volt a bölcsesség, minden tudás foglalata, mára csak egy a világnézeti tudományok közül. Következésképpen egy korszerű filozófiai írástól elvárható, hogy ne mondjon ellent, hanem kifejezetten segítse megérteni kora tudományosságát, de hasonlóképpen az is, hogy amennyire lehet feleljen meg a mindennapi gondolkodás józan eszének. Előbbi azért nehéz feladat, mert beláthatatlan a tudomány által fölhalmozott tudás, utóbbi

pedig azért, mert a mindennapi gondolkozás gyakran ellentmondásos, vagy túlságosan pongyola. Ezért egy mindent átfogó filozófiai rendszer bizonyos mértékben ellentmond a józan észnek, és a tudomány egyes területeivel kivételez, míg másokat elhanyagol, attól függően, hogy miben járatos a filozófus. A filozófiának ez a szaktudományokkal való kölcsönhatása egyszerre inspiráló és korlátozó jelenség. Arisztotelész logikájára és metafizikájára meghatározó befolyással volt, hogy Arisztotelész megpróbálta látható jegyek hasonlósága alapján csoportosítani az élőlényeket, és az ő logikája sok száz éven át volt sugalmazója és korlátja filozófiai nézeteknek. Kant metafizikai nézeteire az akkor kialakulóban lévő kísérleti és ugyanakkor matematikai fizikára való rácsodálkozás volt meghatározó befolyással, majd a XIX. Század végén a Frege által forradalmian megújított logika Russell és Wittgenstein, majd később a logikai pozitivisták filozófiáját termékenyítette meg. A sor tovább bővíthető a newtoni mechanika (Laplace), a darwinizmus, a közgazdaságtan (Marx) vagy éppen a modern fizika (Whitehead) filozófiai hatásaival. Vajon van-e ma olyan új szaktudomány melynek metafizikai jelentősége elkerülte eddig a filozófusok figyelmét?

Ebben a könyvben az igazság, logika, mozgás és változás, azonosság, fizikai tárgyak ön-azonossága kérdéseivel foglalkozom. Az igazsággal kapcsolatban a szemantika, a mozgással kapcsolatban a klasszikus analízis alapgondolatait alkalmazom. Amit védelmezek, az a bevett, klasszikus szaktudományos álláspont. Az igazsággal és a mozgással kapcsolatos kapcsolatos egykori filozófiai kérdések úgy oldódtak meg, hogy átkerültek a filozófia terrénumából a két önálló szaktudomány területére. Ettől függetlenül egyes filozófiai írók továbbra is úgy írnak ezekről a kérdésekről, mintha Tarski vagy Newton nem is élt volna, és a tudomány kő-korszakában élnénk. A fizikai tárgyak ön-azonossága ettől eltérően ma is élő filozófiai kérdés. A robotok és a mesterséges intelligenciák terjedésével a tárgyak, személyek azonosítása elvont filozófiai kérdésből fokozatosan gyakorlati kérdéssé válik, így várható, hogy a fizikai tárgyak ön-azonossága megoldhatatlannak tűnő problémája a mérnöki gondolkozás segítségével rátalál egy vagy több működő megoldásra.

Szövegeim az analitikus filozófiai hagyomány sokszínű áramlatába illeszkednek. Olvasásuk feltételez bizonyos alapvető logikai-filozófiai tájékozottságot, de nincsen bennük bonyolult matematika. Ugyanakkor filozófiai meggyőződésem egyik alapja a gondolatoknak, érveknek, amennyire az lehetséges, a formális logika nyelvén való megfogalmazása, ezt tükrözik írásaim, ezért van bennük sok formula és ábra. Természetesen a logika értelmezése is számos kérdést vet föl, és az ezekre adott eltérő válaszok más-más filozófiai irányzathoz kapcsolódnak.[1] Az én szemléletemet meghatározta mindaz amit megértettem abból,

[1] v.ö.: Mihálydeák Tamás (2009): Mi történne ha komolyan vennénk előfeltevéseinket? angolul részletesebben: Functor–argument decomposition, compositionality and logical semantics `http://lps.elte.hu/lps/tpf/2008-2009/November/Functor_argument_1.pdf` Nem könnyű olvasmány, de megéri próbálkozni a megértésével.

amit a nyolcvanas évek közepe táján tanáraimtól, Ruzsa Imrétől és Máté Andrástól tanultam. Tévedéseimért, egyoldalúságaimért természetesen én vagyok a felelős.

Hitem szerint a filozófia normatív tudomány, nem pusztán leír és magyaráz, hanem értéteket őriz és továbbad. Azért az, mert olyan kérdésekről próbál az egyenrangúnak tekintett olvasóval racionális párbeszédet folytatni, melyekről más korban és más helyen gyakran az előítéletek mondanak megkérdőjelezhetetlen véleményt. Amikor a filozófia a korlátolt elfogultsággal szemben logikus érvekre, érthető példákra építő kiegyensúlyozott értékelésre törekszik, akkor a türelem és józan ész, a szabadság, sokoldalú tájékozottság, műveltség és kultúra értékeit védelmezi az újra és újra ránk támadó babonával, fanatizmussal és szakbarbár egyoldalúsággal szemben.

1. fejezet

Zűrök a menyországban

1.1. Mi az igazság?

„Mi az igazság” kérdezte Pilátus a Mestert, de meg sem várta a választ, mert nem hitt az igazságban. Rosszul tette.[1]

Tudni való, hogy az emberi mondatokat három zsákban gyűjti az Úristen. Jobb keze mellett vannak az igaz kijelentő mondatok, balján a hamisak, míg a bizonytalan vagy zavaros értelműek a középső zsákba kerülnek. Valamennyi mondat egy papírszeletre kerül, és katonás rendben minden papírszeleten egy jel van, olyan gondosan, hogy semelyik mondat nem marad ki a jelölésből, és nincs két mondat azonos jellel ellátva, továbbá minden mondat csak egyszer fordul elő. Nem hagyja az Úr, hogy az angyalok tétlenül lóbálják a lábukat a felhők szélén. Bambulás helyett az a dolguk, hogy a középső zsákból kivegyék a homályos értelmű mondatokat, és értelmező megjegyzésekkel ellátva megpróbálják azokat szilárd, világos jelentéssel ellátni. Mikor ez sikerül nekik, a mondat ismét az Úristen színe elé kerül, aki a megfelelő jobb vagy baloldali zsákba helyezi a javított mondatot.
Történt egyszer, hogy Lucifer borsot akart törni az atya orra alá, és azért a következő mondatot csempészte az angyalok elé:[2]

(λ) Ez az λ-jelű mondat, amit olvasol, összezavar, nem találsz fogást rajta, mert nem igaz vagy igazsága bizonytalan, vagy talán nincs is neki.

Az angyalok elolvasták a cetlit, megértették az abban foglaltakat, hiszen teljesen világos hogy miről szól

[1] A szöveg rövidebb formában 2015-ben megjelent a Namitgondolsz.hu blogon.
`https://namitgondolsz.blog.hu/2015/02/21/isten_es_az_ordogi_mondat`

[2] A Milétoszi Eubulidész, Epimenidész, Alfred Tarski és Ruzsa Imre nyomán.

ez a mondat. Az ördög mondata önmagáról szól. De nem azt állítja, hogy hány betűből áll, vagy hogy milyen nyelven íródott, hanem az igazságáról állít valamit. Valami furcsát, szokatlant mond, ami egyszerűnek és teljesen érthetőnek tűnik, vagy talán valóban az is. Már csak az a kérdés, hogy melyik zsákba kerüljön? Az angyalok néhanapján szerényen odaírták a javaslatukat a cetli hátoldalára, de ez esetben vitatkozni kezdtek egymással, olyan hangosan veszekedtek, hogy fölébresztették a trónusán szunyókáló atyát, aki feddőleg megintette őket: ”Ne veszekedjetek, hozzátok csak elém azt a mondatot, majd én eldöntöm a kérdést. Ha valóban teljesen érthető és egyértelmű, amit a mondat mond, akkor bizonyosan vagy igaz, vagy hamis, harmadik eset nem lehetséges.” Így gondolkozott. A mondat igazsága a tényektől függ, és tény az, hogy nem egyértelmű a mondat igazsága, tehát úgy van ahogy mondja. Márpedig ha a valóság úgy van ahogy a mondat mondja, akkor az a mondat igaz, tehát az λ nevű mondat igaz. Várjunk csak, mielőtt betesszük a jobboldali zsákba, hogy is van ez? Ha az λ nevű mondat igaz, akkor úgy van ahogy mondja. Márpedig azt mondja, hogy nincs neki vagy csak bizonytalanul van igazsága, márpedig a jobboldali zsákban csak olyan teljesen bizonyos igazságok vannak, mint, hogy ”A hó fehér”. Ez a mondat nem ilyen, tehát nem kerülhet a jobboldali zsákba. Akkor pedig a baloldali zsákba kell kerüljön, a hamisak közé, mert bizonyos van értelme ennek a mondatnak, csak egy kicsit becsapós. Tehát nem igaz, hogy ez a mondat, amit olvasol, összezavar, nem találsz fogást rajta, mert nem igaz vagy igazsága bizonytalan, vagy talán nincs is neki. Már majdnem a következő mondat után nézett az Úr, amikor meghallotta Lucifer kuncogását. Újra elgondolkozott. Ha ez a mondat hamis, akkor egyértelmű igazságértéke van, biztos, hogy nem igaz. Ha viszont nem igaz, akkor miképpen lehet, hogy amit a mondat mond megfelel a tényeknek: nem igaz vagy igazsága bizonytalan ... Az igazsága nem bizonytalan, viszont a vagy kapcsolat másik fele teljesül, nevezetesen, hogy a mondat nem igaz. Ekkor pedig maga a mondat egésze is igaz kell legyen, és nem pedig hamis. Ellentmondásba keveredtünk, de most már világos a helyzet: a mondat se nem igaz, se nem hamis, hanem merő értelmetlenség, zűrzavar, és ez bizonyosság. Hoppá, a mondat épp ezt állítja, tehát igazat mond, akkor mégiscsak igaz. Ezt azonban már egyszer megvizsgáltuk, kezdhetjük előröl, ördögi körbe kerültünk. Ekkor azonban fölnézett az Úr a trónusa fölé és csendesen elmosolyodott.

A dolog úgy történt, hogy ide érkezett egy bizonyos Alfred Tarski nevű lélek, aki egyszer a mennyországbeli villásreggelinél amint Cantorral és Russellal beszélgetett halkan megjegyezte, hogy nincs az jól, hogy az atyának csak három zsákra telik. Építsünk neki végtelen sok emeletet a trónusa fölé végtelen sok zsákkal. Georg te hozod az alapanyagot a végtelen sok emelethez, Bertrand, te pedig alkosd meg a szinteket. Így is lett. Amikor az atyának eszébe ötlött, hogy az első emeleten lévő zsákokban olyan mondatok vannak, melyek a földszinti mondatokról szólnak, a második emeleten pedig azok, melyek az

első emeleten lévő mondatokról, egy laza mozdulattal földobta Lucifer mondatát egy emelettel följebb az egyik zsákba. Ezt látva Lucifer leforrázva elsomfordált. Miért érezte legyőzve magát a gonosz szellem? Most akkor Lucifer mondata igaz vagy sem? Lehet erre egyáltalán meggyőző választ adni, mi az igazság? Röviden elmagyarázom.

Lucifer λ nevű mondata L_1 emberi nyelv része. Az Úr ezt a mondatot a szeráfok nyelvén, eggyel magasabb szintű L_2 nyelven értékeli ki. Ezen a magasabb szintű nyelven használjuk az 'igaz$_1$' és 'hamis$_1$' metanyelvi (szemantikai) predikátumokat, melyek terjedelmébe a tárgynyelv mondatai tartoznak, így ide tartozik Lucifer (λ) nevű mondata is. A nyelvi szintekre utal a szemantikai predikátumok indexe. Metanyelvi szinten λ sem nem igaz$_1$ sem nem hamis$_1$. Tehát L_2 nyelven – halmazelméleti nyelvet használva – azt állítja az Úr, hogy, $\lambda \notin$ igaz$_1$ és $\lambda \notin$ hamis$_1$. Utóbbi mondat neve, egy még magasabb szintű L_3 nyelven μ. ($\mu =$ '$\lambda \notin$ igaz$_1$ és $\lambda \notin$ hamis$_1$') Az L_3 nyelven definiált 'igaz$_2$' fogalom szerint, az Úr μ nevű mondata igaz$_2$, ami természetes, hiszen az Úr mindig igazat mond. Foglaljuk össze mindezt egy táblázatban:

Nyelv	Mondat	Metanyelvi értékelés
L_1	Ez az λ-jelű mondat, amit olvasol, összezavar, nem találsz fogást rajta, mert nem igaz vagy igazsága bizonytalan, vagy talán nincs is neki.	Nincs igazság$_1$-értéke
L_2	Lucifer mondata sem nem igaz$_1$ sem nem hamis$_1$.	igaz$_2$
L_3	igaz$_2$ az, hogy Lucifer mondata sem nem igaz$_1$ sem nem hamis$_1$.	igaz$_3$
...	...	...

Tarski koncepciójában minden n nyelvi szinten érvényes az a (T) kritérium, hogy ha egy $n-1$ szinten megfogalmazott p mondat neve n nyelvi szinten x, akkor és csak akkor $x - igaz_{n-1} - n$ nyelvi szinten, ha p. Másképp mondva, $x - igaz_{n-1} - n$ nyelvi szinten, pontosan akkor, ha úgy van, ahogy az x nevű mondat mondja. Lényeges, hogy visszafelé is érvényes a tétel, tehát ha azt állítjuk, hogy p, és p neve x, akkor $x - igaz$. Az igazság fogalma meghatározása formális nyelven, formálisan korrekt és materiálisan adekvát módon kell legyen kidolozva; másképp mondva következnie kell belőle az összes (T) formájú ekvivalenciának. Ruzsa Imre megjegyzi, hogy Tarski koncepciója olyan formában is megfogalmazható, hogy az igazság hordozói kijelentések (propozícók) és nem (bizonyos egyértelmű információ tartalommal rendelkező, időtlen igazságértékű) mondatok.[3] Kripke, Barwise vagy Belnap és mások újabb igazság elméletei más igazság fogalmat definiálnak, így ezek nem cáfolatai, hanem alternatívái Tarski elméletének.

[3] Alfred Tarski, Bizonyítás [34], pp 74-78 szerkesztői kommentár. Megjegyzem, hogy a könyv 69. oldalán téves az az állítás, hogy '$(A \leftrightarrow p) \rightarrow \sim p$' formula ekvivalens '$\sim A$'-val. Valójában ez csak akkor igaz, ha $p = A$. Ettől függetlenül a Tarski által fölismert ellentmondás létezik.

Vajon az alábbi hét állítás közül melyik igaz, melyik hamis és melyik paradoxon? Paradox mondat alatt jelen esetben a bizonytalan, váltakozó igazságértékű, vagy 'igaz' vagy 'hamis' logikai értékkel nem rendelkező mondatokat értjük. Jelen esetben egy mondat logikai-grammatikai értelemben nem jól formált amennyiben igazságértéke önmaga igazságértékétől (is) függ.

(1) Ez a mondat értelmetlen, nincs jelentése.

(2) Ez a mondat egy paradoxon.

(3) Ez a mondat nem jól formált (logikai-grammatikai értelemben).

(4) Ez a mondat nem igaz vagy egy magyar mondat.

(5) Ez a mondat nem igaz vagy egy angol mondat.

(6) Ez a mondat nem igaz vagy nem jól formált mondat (logikai-grammatikai értelemben).

(7) Ez a mondat nem igaz vagy jól formált mondat (logikai-grammatikai értelemben).

Lehet-e egy logikailag részben hibás, vagy zavaros értelmű mondat igaz (pl: Kiszera méra bávatag vagy a hó fehér)? Azért zavarba ejtő a kérdés, mert ha a mondat értelmetlenséggel kezdődik (Kiszera méra bávatag) akkor honnan tudjuk, hogy a többi része (vagy a hó fehér) már értelmes, és nem valamilyen más módon, pl. véletlen jelsorozatként értendő, ahogyan már nincs értelme? Meglehet, hogy az értelmetlenség az egész mondat értelmét, jelentését kérdésessé teszi. Ha (6) igaz_1 akkor (6) nem paradox mondat, de némelyik igaz_1 mondat nem jól formált. Más esetben a (6) mondat paradoxon (nem igaz_1 és nem hamis_1). A fenti hét állítás közül melyik tekinthető a megerősített hazug paradoxon mondatának?

1.2. Bejuthatunk-e a menyországba kalappal a fejünkön?

A mese

A mennyország bejárata előtt hosszú sor áll, a veszekedések elkerülése végett mindenkinek sorszáma van. A sorban álláskor pedig be kell tartani egy szigorú szabályt. Szent Péter ugyanis csak akkor nyitja ki a kaput, ha az alábbi feltétel teljesül:

Bárkinek a fején akkor és csak akkor van kalap, ha mögötte senkinek nincs a fején kalap.

A szabály világos, minden lélek a kapu előtt pontosan érti és be is tartja. Általában nincs is vele baj. Ha a bejárat előtti sor csak véges hosszú, és ha a sorban állók életükben jól megtanulták a logikát és betartják a szabályokat, Péternek lesz dolga a kapuval.[4]

Mi a helyzet akkor, ha csak egyetlen ember áll a kapu előtt? Emberünk így okoskodhat: ha állna egy kalapos ember mögöttem, akkor nem tehetném föl a kalapomat, de mivel senki sem áll, ezért kalapos ember sem áll mögöttem, tehát a másik eset érvényes, ezért föl kell tegyem a kalapomat. Mi a helyzet ha ketten állnak a sorban? Az utolsó ember most is az iménti módon okoskodik, tehát kalap van a fején. Ekkor viszont az előtte álló hajadonfőtt marad, mert van mögötte kalapos ember. Három ember esetén, az első kettő fején nem lesz kalap, kivéve az utolsón. Mindezt így ábrázolhatjuk:

$\otimes$

$\bigcirc\ \otimes$

$\bigcirc\ \bigcirc\ \otimes$

Lehetséges-e az alábbi eset: $\bigcirc\ \otimes\ \otimes$

Nem, mert a másodikon csak akkor lehetne kalap, ha mögötte senkin sincs kalap; csakhogy van, ezért az ő fején sem lehet.

Lehetséges-e az alábbi eset: $\bigcirc\ \otimes\ \bigcirc$

Alkalmazzuk a szabályt. Az első emberen nincsen kalap, mert a mögötte állón van. A másodikon van kalap, és a mögötte állón nincs. Úgy tűnik minden rendben van, hiszen a második mögött nincsen kalapos. A harmadikon nincs kalap. Ez megszegi a szabályt, hiszen nincsen mögötte kalapos, tehát a harmadik föl kell vegye a kalapot. De abban a pillanatban ahogy fölvette a harmadik, a második le kell vegye a kalapját, mivel most már áll a második mögött egy kalapos. Így ez az eset sem lehetséges. Jelölje az '1' számjel a kalaposat, '0' pedig a hajadonfőtteket. Ekkor belátható, hogy csak ilyen sorozat felel meg a szabálynak: $000\ldots0001$, azaz csak az utolsón lehet kalap.

[4] Stephen Yablo nyomán [38]

Egy napon a gonosz szellem elhatározta, hogy ledönti a mennyországot. Úgy okoskodott, ha végtelen sok lelket kell beengedniük, a menny megtelik, és minden összedől. Így is tett. Bűvös varázslattal végtelen hosszú sort állított a kapu elé, olyan hosszút, hogy még Szent Péter sem látta a végét, pedig jó szeme volt. Semmiképp nem láthatta, mert a sornak nem volt vége, azaz nem volt legutolsó a sorban. És ahogy illik, a végtelen sorban mindenki követte a szabályt. Mi történt? Ki kellett-e nyissa Péter a kaput? Kinek volt kalap a fején, és kinek nem? Alkalmazzuk a szabályt miden sorban állóra nézve:

Kalap van a fejemen pontosan akkor, ha senki mögöttem álló fején nincs kalap.

A feltételnek kivétel nélkül mindenkire teljesülnie kell, nem a lehet a kalapot félig fölvenni vagy folyamatosan föl-le hajigálni. Péter akkor néz ki a kisablakon, amikor mindenki megnyugodott, csend van, senki sem vitatkozik a mögötte állóval, nem emelgeti a kalapját, nyugodtan áll a helyén, kialakult a végső, a szabálynak megfelelő rend.

Tegyük fel, hogy a végtelen sorban senkinek sincs kalap a fején. Ekkor a kapu előtt állónak föl kell tennie a kalapját, hiszen teljesül a feltétel, senkinek sincs mögötte kalap a fején. Most vegyük a második bebocsátásra várót. Neki fel kell tennie a kalapját? Igen, mivel mögötte senkinek sincs kalap a fején. Ekkor viszont az előtte állónak le kell vennie a kalapját, mert van mögötte kalapos. Ekkor jön a harmadik a sorban. Mivel mögötte senkinek sincs kalap a fején, fölteszi a kalapot. Csakhogy erre az előtte álló kettőnek le kell vennie, mert van mögöttük kalapos. Bármilyen távoli sorban álló hasonlóképpen okoskodhat. Fölveszi a kalapot, mert mögötte senkin nincs kalap, viszont ekkor az előtte állóknak le kell venniük. Így végül oda lyukadunk ki, hogy semelyik sorban álló sem veheti föl a kalapot, tehát senkinek a fején nincs kalap. Ezzel azonban visszajutottunk a kiinduló állapothoz, az ajtó előtt álló fölveszi a kalapot.

Mi lesz ennek a vége? Kinyitja-e Péter a kaput a végtelen sor előtt?

Nem hagyhatta az Úr, hogy kedves szolgáját bosszantsa a bukott angyal. Emlékezett rá, hogy vasárnap délutánonként Cantor végeláthatatlan vitát folytat Brouwerrel és Heytinggel a rendszámokról és transzfinit sorozatokról, mely vitát Russell, Wittgenstein és Hilbert nagy érdeklődéssel hallgatta.[5] Szólt hát Cantornak, hogy oldja meg a problémát. Cantor kedvelte az öreg Pétert, szívesen segített. Nyakon csípett egy rosszalkodó angyalkát, akinek nevelési célzattal megparancsolta, hogy álljon a kapu előtt várakozó végtelen sor végére, ω_0 helyére, és vegyen kalapot. A végtelen sor valahogy így nézett ki: $\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\ldots\infty\otimes$
Nekünk földi halandóknak mindez elképzelhetetlen, de nem fölfoghatatlan. És lőn. Abban a pillanatban

[5] Az 1900-as nemzetközi matematikus kongresszuson mondta Hilbert: „Senki sem űzhet ki minket abból a paradicsomból, melyet Cantor teremtett nekünk.”

mindenki illendő módon hajadonfőtt, kalapját kezében tartva, elindult befelé a menyország kapuján.

Konlúzió

A sorban álló várakozó emberek a számokat reprezentálják. A szabály minden számhoz hozzárendel egy és csak egy értéket, jelen esetben azt, hogy van-e kalap a fején vagy nincsen. Ezt másképp is meg lehet fogalmazni. Úgy is fogalmazhatnánk, hogy minden sorban álló emberre, azaz természetes számra, vagy igaz a 'kalapos' tulajdonság, vagy nem, harmadik eset nincsen. Tulajdonképpen a szabály egy függvényt próbál meghatározni. Ha létezik a függvény, akkor az emberek a szabálynak megfelelően nyugodtan állnak a sorban, és a szabály szerint van a fejükön kalap vagy nincs. Ha viszont nincs ilyen függvény, akkor folyamatosan emelgetik a kalapjukat, de nem tudnak nyugvó pontra jutni, mert valaki mindig megszegi a szabályt.

Figyeljük meg, hogy nincsen probléma, ha csak véges sokan állnak a sorban. De mégsem a végtelen okozza gondot, hanem az, hogy véges sor esetén a szabályból logikailag következik, hogy a legutolsó ember kalapos, végtelen sor esetén, transzfinit szám nélkül, viszont a szabály nem határozza meg a legutolsó ember helyzetét. Hogy jobban megértsük a problémát, általánosítsuk a példát. Legyen egy olyan sorozatunk, amelyik végetlen sok tagból áll. A sorozat bármely két különböző tagja összehasonlítható, és vagy az egyik korábbi mint a másik, vagy a másik korábbi, mint az egyik, más eset nem lehetséges. Ennek egy példája lehet a természetes számokon értelmezett kisebb-nagyobb reláció, kiegészítve az ω_0 transzfinit számmal, amelyik a sorozat maximális eleme, nincsen nála nagyobb tagja ennek a sorozatnak. Két szabályt is megadunk ezen a sorozaton. Az első szabály az eredeti:

(i.) Bárkinek a fején akkor és csak akkor van kalap, ha mögötte senkinek nincs a fején kalap.

A szabály kicsit precízebb nyelven így fest:

(i.) x-kalapos pontosan akkor, ha minden y, aki az x után áll, hajadonfőtt (értsd: nem kalapos)

A sorban állókat számokkal, a kalapot '1'-el, annak hiányát '0'-val jelölve a szabály kielégíti az alábbi 1.1. végtelen táblázat:

kalap	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	∞	1
sorszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	1000	1001	1002	1003	∞	ω_0

1.1. táblázat. Az (i.) szabálynak megfelelő f_1 függvény

Az (i.) szabály megfordítása a (ii.) szabály:

(ii.) Bárkinek a fején akkor és csak akkor van kalap, ha előtte senkinek nincs a fején kalap.

A szabály kicsit precízebb nyelven így fest:

(ii.) x-kalapos pontosan akkor, ha minden y, aki az x előtt áll, hajadonfőtt (értsd: nem kalapos)

A gondolatmenet hasonló a korábbihoz. Lehet-e a harmadik ember fején kalap? Ha nincsen előtte senki fején kalap, akkor igen a válasz. Tegyük fel, hogy igen, a harmadik ember fején van kalap, mert előtte senki fején nincsen kalap. Mi a helyzet a második emberrel? Biztos hogy az előtte állókon nincsen kalap – ezt épp az előbb feltételeztük – de akkor a második ember föl kell vegye a kalapot. Ha viszont a második ember fölveszi a kalapot, akkor a harmadik le kell vegye. Oda jutunk, hogy a (ii.) szabályt követve, csak és kizárólag az első ember fején lehet kalap. Ha nem lenne első ember a sorban, akkor viszont bajba kerülnénk. Tehát a (ii.) szabályt az alábbi 1.2.táblázat elégíti ki:

kalap	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	∞	0
sorszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	1000	1001	1002	1003	∞	ω_0

1.2. táblázat. Az (ii.) szabálynak megfelelő f_2 függvény

A mese által föltett kérdés tehát valójában az, hogy van-e olyan f függvény az számok adott halmazán, amelyik megfelel ez eredeti (i.) vagy a másik (ii.) szabálynak? Beláttuk, hogy ha nincsen maximális elem akkor semmilyen függvény nem felel meg az (i.) szabálynak, ha pedig a minimális elem hiányzik (pl. az egész számok halmazán), akkor a (ii.) szabálynak nem felel meg semmi.[6]

Összefoglalás

1. A Yablo paradoxon szemantikai-logikai fogalmak – mint 'igaz' vagy 'hamis' – nélkül is produkálható, mint a példa mutatja. A Úgy tűnik a paradoxon nem a logika alapeszméiről, hanem a sorozatok alapeszméiről szól.

[6] Az eredeti szöveg rövidítve megjelent a „namitgondolsz.hu" filozófiai blog 2015. május 2-i számában. A sorbanállós példa nem teljesen eredeti ötlet, de már nem emlékszem hol olvastam valami hasonlót a neten. Gondolatmenetem a vitázók azon csoportjához csatlakozik, akik szerint a paradoxon a látszat ellenére önreferenciális természetű. Graham Priest [25](1997) és Jc Beall [1](2001) is így gondolja. Ez a kisebbségi vélemény. Ahogy én megfogalmazom a Yablo sorozatot az elsőrendű logika nyelvén, az lényegében azonos Thomas Forster megformulázásával.[6] Amit a „miért"-ről gondolok, az meg közel áll Laurence Goldstein diagnózisához [9].

2. A „paradoxon” – az ellentmondás – abból fakad, hogy a sorozat meghatározása nem határoz meg kielégíthető sorozatot, így tévedés annak a feltételezése, hogy van olyan sorozat amelyik kielégíti a feltételt, mert valójában nincsen ilyen sorozat. A Yablo sorozat nem létezik, ezt bizonyítja a paradoxon, annak a feltételezése, hogy mégis van, önellentmondás, ebben hasonlít a Yablo paradoxon a „hazug” paradoxonhoz.

2. fejezet

A logika és a józan ész

2.1. A nyil paradoxonról

Felfigyeltem egy könyv fülszövegére (ami valójában a hátlapján van): „Talán meglepően hangzik, de a filozófusok is szerszámokkal dolgoznak. Persze nem vésővel vagy Excel-táblázatokkal, hanem jóval kifinomultabb eszközökkel: egyedi, csak rájuk jellemző gondolkodásmóddal és megközelítési módszerekkel, amelyek megtanulhatók, és az élet minden területén alkalmazhatók...”[1] Hát ez igazán érdekes, mert én épp ellenkezőleg úgy gondolom, hogy több filozófiai kérdéskört is nagyon jól lehet illusztrálni Excel táblázatokkal, bár az Excel táblázatok használata és megértése épp úgy ügyességet igényel, mint mondjuk a vésőé.

A könyv jó, bár nem felel meg teljesen a kitűzött céljának. Érdemes lett volna szót ejtenie a szerzőnek a középkori skolasztikusok vita kultúrájáról, arról, hogy pl. Aquinói Szent Tamás hogyan érvel, hogy miképpen tárgyalja a teológiai-filozófiai kérdéseket, vagy Descartes kapcsán fölsorolni legalább a módszerről szóló értekezés négy szabályát, Wittgenstein kapcsán pedig megemlíteni a matematikai logika alkalmazását, és esetleg Carnappal is foglalkozni. Láthatóan a szerzőnek megvan a tehetsége arra, hogy bonyolult kérdéseket közérthetően tárgyaljon, így ezek nem jelentettek volna számára megoldhatatlan feladatot. Több helyesírási vagy fogalmazási hiba is van a könyvben, szerencsére nem nagyon zavaróak. Van egy tartalmi bökkenő is, amit azért kifogásolok, mert pl. Sainsbury a nagyközönségnek írt Paradoxonok c. könyvében szintén foglalkozik Zénón nyíl paradoxonjával [30], de ő kevésbé növeli tovább a zűrzavart. Most Fearn nyíl paradoxon megoldásával fogok foglalkozni.

[1] Nicholas Fearn, Zénón és a teknősbéka – Avagy hogyan gondolkodjunk úgy, mint egy filozófus? [5]

„Mihelyt eljutottunk egy valódi – azaz per definitionem tovább nem osztható – pillanathoz, akkor az idő olyan törtrészénél vagyunk, amelyikben nem történhet mozgás. Ez azonban azt jelenti, hogy sosem mozoghat a nyílvessző, mivel a nem mozgások összegéből nem lehet mozgás. Mivel a nyílvessző röppályájának egyetlen pontján sem mozog, ezért az egész röppályáján sem mozog. A nyílparadoxonnal a legkönnyebb elbánni az itt fölsoroltak közül. A mozgáshoz időre van szükség, így tehát nem meglepő, hogy az időt kiiktatva inkább pillanatokról beszélünk, azzal a mozgást is eltüntetjük. Jóllehet a nyílvessző esetleg egyetlen adott időpillanatban sem mozog, még mindig mozoghat, ha a mozgást valamely dolog más helyen, később felbukkanó látszatként határozzuk meg.”[2]

A fenti gondolatmenet elhamarkodott. A gondolatmenet összekever két kérdést, összekeveri azt amit tudhatunk, azzal, ami van. Jelen esetben két kérdés merül fel:

(1) Mit tudhatunk akkor, amikor az idő tovább nem osztható tört részénél, egy pillanatnál vagyunk? Tudhatjuk-e hogy a nyíl áll, avagy mozog?

(2) Mozoghat vagy állhat-e egy tárgy, jelen esetben a nyíl, az idő tovább nem osztható tört részénél? Figyeljünk föl arra, hogy az álló helyzet épp úgy kérdés, mint a mozgás. Gondoljunk egy pattogó labdára. A labda folyamatosan mozog, de periodikusan egy pillanatra megáll, amikor a földről visszapattan.

Térjünk vissza az idézethez, vizsgáljuk meg Fearn érvét. Kezdjük a végén. Ha a nyílvessző egyetlen időpillanatban sem mozog, akkor látszatként miért és hogyan mozogna, és miképpen megoldása ez a mozgás problémájának? Miképp értsük ebben az esetben a látszatot? A látszatot a valósággal szembeállítva szokták értelmezni. Pl. látszólag eltört a bot, ez azonban optikai csalódás, valójában a bot továbbra is egyenes. A bűvész látszólag kettéfűrészelte a nőt, de valójában mégsem, mert lám mosolyogva kiszáll a ládából. Ennek alapján így okoskodhatunk: látszólag mozog a nyíl, valójában mégsem mozog, hanem végig egyazon helyen van. Ez úgy történhet meg, hogy a nyílvessző egy asztalon fekszik, és mi autóban ülve elgördülünk az asztal előtt, de úgy érzékeljük, hogy mi állunk, és az asztalon lévő nyílvessző halad. Vajon ez megoldja a mozgó nyíl rejtélyét? Olyan módon oldja meg, hogy most helyette az autó mozog, annak mozgását kéne megmagyarázzuk. Valójában tehát nem oldotta meg a problémát, csak tovább tolta. Úgy tűnik Zénón valóban ellentmondást talált a mozgás fogalmában, de nézzük meg ezt közelebbről.

Elmondom természetes nyelven, és pontosabb, félig formalizált nyelven is. A jobboldali zárójelbe tett szám azt mutatja, hogy – állítólag – miből következik a mondat.

[2]Fearn, u.o. p.37. Sokan úgy vélik Zénon antinómiái máig megoldatlanok, még ELTE TTK szakos hallgató is: Bognár Gergely: A megoldatlan Zénon paradoxonok kétezer-ötszáz éve új gondolatokat ébresztenek `http://hps.elte.hu/tdk/dogak/bognarg_doga.pdf` A dolgozat számos erénye ellenére, sajnos, a szerző nem veszi a fáradságot, hogy szabatosan, a formális logika pontos nyelvén föltárja az ellentmondást, és annak a forrását.

(1)	A nyíl mozog.	
(2)	A nyíl minden pillanatban egy meghatározott helyen van és minden része teljesen kitölti a rendelkezésére álló helyet.	
(3)	A nyíl minden pillanatban ott van, ahol van, egy pillanat alatt semmit sem halad. Nem mozoghat az éppen elfoglalt helye irányába, mivel már ott van, de nem mozdulhat el az éppen elfoglalt helyéből, mert egy pillanat alatt erre nincsen ideje.	(2)
(4)	A nyíl semelyik pillanatban nem halad, tehát semelyik pillanatban sem mozog.	(3)
(5)	A nyíl nem mozog.	(4)

2.1. táblázat. A nyíl paradoxon egyszerű levezetése

Nyilvánvaló az ellentmondás (1) és (5) között. Lássuk ezek után, részletesebben az okfejtést.

Tegyük fel, hogy a nyíl mozog, amely feltevésünket (1)-el jelölöm, és a csillag arra utal, hogy ez puszta feltevés, nem pedig logikai igazság. Az újabb és újabb feltevéseket újabb csillag oszloppal jelölöm.

*(1)	A nyíl t_1 időpillanatban mozog.	
**(2)	A nyíl minden t időpillanatban a pálya meghatározott s helyén van.	
**(3)	A nyíl t_1 időpillanatban s_1 helyen van.	(2)
***(4)	Ha a nyíl mozog, akkor egy időtartományban van.	
***(5)	Ha egy nyíl nem idő tartományban van, akkor nem mozog.	(4)
****(6)	Egy időpillanat soha nem egy idő tartomány.	
****(7)	A t_1 időpillanat nem időtartomány	(6)
****(8)	A nyíl t_1 időpillanatban nem időtartományban van.	(7)
****(9)	A nyíl t_1 időpillanatban nem mozog.	(5) (8)
****(10)	A nyíl t_1 időpillanatban mozog és a nyíl t_1 időpillanatban nem mozog.	(1) (9)

2.2. táblázat. A nyíl paradoxon pontosabb levezetése

Mivel t_1 időpillanat tetszőleges volt, bármely időpillanatra nézve ellentmondásra jutunk.

Ellentmondásra jutottunk, tehát feltéve hogy a levezetés minden lépése helyes, egy vagy több kiinduló föltevést – premisszát – el kell vessünk. Melyiket válasszuk? Vegyük sorra a csillaggal megjelölt új sorokat, azaz a premisszáinkat, melyeket most római számokkal jelöltem:

(I.) A nyíl t_1 időpillanatban mozog.

(II.) A nyíl minden t időpillanatban a pálya meghatározott s helyén van.

(III.) Ha a nyíl mozog, akkor egy időtartományban mozog.

(IV.) Egy időpillanat soha nem egy idő tartomány.

Az utolsó premissza cáfolhatatlannak tűnik. Miért? Azért mert az időpillanat egy már tovább nem osztható valami, az időtartomány viszont folytonos időt feltételezve, mindig tovább osztható. Valami tehát

vagy időpillanat, vagy időtartomány. Ez azonban nem zárja ki, hogy egy időtartomány időpillanatokból áll, csak a fogalmi különbségre utal. Diszkrét időt feltételezve a legrövidebb időtartomány két egymást követő időpillanat, folytonos időt feltételezve viszont nem értelmezhető a valamely időpontra rákövetkező időpillanat. (Ne keverjük össze a folytonost a folyamatossal. Utóbbi mind folytonos mind diszkrét időben értelmezhető.)

A második premissza is megingathatatlannak tűnik. Ha a nyíl pályáját valamely s függvény írja le az időben, akkor a függvény argumentum értékeire értelmezve van a függvény értéke, tehát minden t időpontra van olyan y, hogy $y = s(t)$.

A helyzet tehát a következő: vagy (I) -et kell elvessük, és akkor Zénónnak igaza van, vagy (III.)-kell elvessük, ekkor Newton követői vagyunk. Vizsgáljuk meg közelebbről mit is állít (III.) Valójában azt állítja, hogy ha a nyíl t_1 időpillanatban s_1 helyen van, akkor a nyíl áll. Mielőtt ezt matematikai szempontból megvizsgáljuk, vizsgáljuk meg egy szemléletes példával. Az alábbi 2.1 két ábra közül az egyik a t_1 helyen álló, a másik a t_1 helyen mozgó nyílt ábrázolja. Meg tudjuk-e mondani, hogy melyik a kettő közül a mozgó nyíl ábrája, a balra, vagy a jobbra mutató nyíl? Nem tudjuk, mert azt sem tudjuk megmondani, hogy melyik

2.1. ábra. Álló és mozgó nyil

ábrázolja az állót. A probléma a következő. Egy pillanat alatt a nyíl semennyit sem tud előrehaladni, csakhogy ebből mégsem következik, hogy abban a pillanatban a nyíl sebessége nulla. Ez ellentmond a józan észnek, mégis igaz. Miképpen látható ez be? Kétféleképpen is elmondom. Elmondom általános iskolai ismereteket, és elmondom középiskolás ismereteket föltételezve is.[3]

Elemi iskolai tananyag, hogy: út = sebesség $\times$ idő. Ez így azért nem elég pontos, pontosabban így fest: a nyíl által megtett út = a nyíl sebessége $\times$ az eltelt idő. Képlettel: $s = v \times t$. Zénón abból, hogy $s = 0$ arra következtetett, hogy akkor $v = 0$, azaz a nyíl áll. Ez azonban hibás következtetés, mert ez csak az egyik lehetőség, a másik lehetőség az, hogy az eltelt idő, azaz $t = 0$ és a sebesség viszont nem nulla. Ezért téves volt a következtetése, de Zénón sem az ilyen formulákat, sem a sebesség fogalmát nem ismerte, így neki

[3] A gondolatmenet lényege megjelent az illegális Beszélőben 1987-ben. Újra nyomva a Beszélő összkiadásban 1987-1989, AB-Beszélő Kiadó, 1992, III. 127-136 o.

nem róható föl a tévedés.

Középiskolás fokon még precízebben és általánosabban fogalmazhatunk. A nyíl helyét miden időpillanatban megadja az s út-idő függvény egy T időtartományban, de mi írja le a sebességét? Feltéve, hogy a nyíl út-idő függvénye T időtartomány minden pillanatában differenciálható, a nyíl sebességét az s függvény s' derivált függvénye írja le T időtartományban. A derivált függvény ekkor minden időpillanatban megadja a nyíl sebességét, legalábbis a newtoni fizika szerint. Tehát igenis értelmezhető a nyíl sebessége minden időpillanatban, nem csak egy időtartományban. A nyílnak van sebessége minden időpillanatban, és a nyíl akkor áll valamely t időpillanatban, ha a sebesség függvény értéke abban a t időpillanatban nulla, mozog más esetben. Amikor pl. a nyílvessző visszapattan, akkor egy pillanatra megáll, hasonlóan egy pattogó labdához. Ugyanakkor amennyiben csak egyetlen időpontban ismerjük a nyíl helyét, az alapján nem tudjuk meghatározni a pályáját leíró függvényt, és így a sebesség függvényét sem. Ha csak egyetlen hely-időpont értéket ismerünk, az alapján nem határozható meg a függvény abban a pontban lévő differenciál hányadosa, mivel nem meghatározható az ahhoz a függvény értékhez tartozó érintő. Ha nem határozható meg az érintő, akkor a sebesség sem határozható meg, azaz nem tudjuk, hogy a nyíl áll vagy mozog. Ezért nem tudunk a fenti két ábra között választani.[4]

Richard Mark Sainsbury a paradoxonokról írt népszerű könyvében szintén említi a nyíl paradoxont. Bemutatja a probléma megoldását Newton szellemében, számára azonban ez nem „a megoldás”, hanem csak egy a lehetséges megoldások közül, azaz csak egy vélemény. Szerintem téved, a klasszikus fizika megoldása elől ebben a kérdésben lehetetlen kitérni. Gondoljuk végig a következőket a nyíl példájánál maradva. A jobb oldali zárójelbe tett számok mutatják hogy miből következik a sor, mellette az szerepel, hogy milyen megfontolások alapján. A példa általánosítható.

A newtoni fizika megoldása csak akkor vitatható, csak akkor pusztán egy a lehetséges megoldási javaslatok közül, ha vitatható, hogy a nyíl minden t időpillanatban van valahol, vagy az út-idő függvénye deriválható. Utóbbi kérdésben a fizika kompetens, a filozófia illetékességi köre arra korlátozódik, hogy a nyíl minden t időpillanatban van valahol. Megkérdőjelezhető-e ez utóbbi álláspont? Úgy gondolom nem,

[4]Ruzsa Imre szerint Zénón a tér és idő atomos szerkezetének föltevéséből a mozgás lehetetlenségére következtet. Csakhogy az ellentmondás levezetésekor nem hivatkoztunk az idő vagy a tér folytonos vagy diszkrét (atomos) természetére. A lényeg abban van amit később ír: „Tehát abból, hogy 'a P pont a t időpontban a tér (x, y, z) koordinátájú pontjában van', a P pont nyugalmi vagy mozgási állapotára nem lehet következni, ...” A matematika néhány filozófiai problémájáról pp.66.,67. [11] Az akkoriban kötelező marxista tanítás szerint „Zénón a mozgás objektíve meglévő ellentmondását fejezi ki: mozogni annyi, mint valahol lenni, és ugyanakkor nem ott lenni.” Kellett bizonyos bátorság, egy mégoly eldugott helyen is, a kötelező dogmát tagadni. Bertrand Russell számos helyen foglalkozott Zénón aporiáival, és gyakran megváltoztatta álláspontját. Egy helyütt ezt írta: „a given instant, it is where it is ... but we cannot say that it is at rest at the instant.” Our Knowledge of the External World (1914) [28] Hogy pontosan mit gondolt Zénón, azt természetesen senki sem tudja, mivel nem maradtak fenn írásai, sem azok másolatai. Gondolhatott arra is, ahogy én rekonstruáltam a Nyíl aporiát, és ha erre gondolt, akkor formál logikailag igaza volt, valóban levezethető az ellentmondás. Az hogy logikai alapon ellentmondásosnak látta a mozgás fogalmát, bizonyítja éles eszét, az hogy manapság sok filozófus lát itt ellentmondást, épp ellenkezőleg.

*(1)	A nyíl minden t időpillanatban van valahol.	
*(2)	A nyílnak minden t időpillanatban van $s(t)$ helye.	(1)józan ész
*(3)	Létezik a nyíl s út-idő függvénye.	(2)matematika
**(4)	Tegyünk fel hogy a nyíl út-idő függvénye minden időpillanatban differenciálható. Ez a második premissza a klasszikus fizika föltevése	
**(5)	Létezik a nyíl sebességét leíró s' derivált függvény.	(4)matematika
**(6)	A nyílnak minden t időpillanatban meghatározott az $s'(t)$ sebessége, amelyik lehet nulla, vagy nem nulla; azaz minden időpillanatban létezik a nyíl sebessége.	(5)fizika
(7)	Ha a nyíl minden t időpillanatban van valahol, és az út-idő függvénye deriválható, akkor abból, hogy valamely t_1 időpillanatra $a = s(t_1)$ helyen van *nem következik*, hogy akkor áll, azaz $0 = s'(t_1)$.	(1) (4)

2.3. táblázat. A newtoni fizika megoldása

és ezért a klasszikus fizika megoldása sem kérdőjelezhető meg.[5]

Mindebből az következik, hogy a nyíl paradoxon nem bizonyítja a mozgás ellentmondásos mivoltát, és föltéve, hogy az ellentmondásos fogalmak terjedelme üres, nem cáfolja meg a mozgás tulajdonságának létét.[6] Ha valami rejtély a mozgással kapcsolatban, akkor az, hogy több mint háromszáz évvel Newton után miért ismételgeti ezt sok kortárs filozófus.

Addendum a nyíl paradoxonhoz

1. Van-e tapasztalati bizonyíték arra, hogy a nyílnak minden egyes időpillanatban van sebessége? Igen van. Helyezzünk apró mágnest a nyílvesszőre, majd lőjük át egy kellően nagy átmérőjű indukciós tekercsen (solenoid), és oszcilloszkópon figyeljük meg az indukált feszültség jelleggörbéjét. Látni fogjuk, hogy miközben a nyílvessző mozog a solenoid belsejében, folyamatosan feszültséget mérünk, aminek az oka, a nyíllal együtt mozgó mágnes. Ezzel igazoltuk, hogy a mozgó nyílnak folyamatosan (minden időpillanatban) van sebessége.

2. Milyen következményei lennének az idő és tér atomos szerkezetű feltételezésének? A távolság fogalmát nem tudnánk a szokásos módon, egyértelműen meghatározni; a sebesség változása esetén pedig diszkrét időben más sebesség adódna az előző, és más a következő idő atom figyelembe vételével, azaz a sebesség a test pillanatnyi helyzetére vonatkoztatva nem lenne egyértelmű. Talán mindkét probléma orvosolható valamilyen módon, de a probléma jelentkezése világosan mutatja, hogy a klasszikus szemlélet mennyire indokolt és jól megalapozott.

[5] A mozgás kérdése ugyanakkor átvezethet bonyolult, csak szűk kör számára érthető matematikai elméletek bemutatásához. V.ö. ezzel kapcsolatban Benedek András: Válasz Zénónnak? in. Tudomány és történet szerk: Forrai Gábor – Margitay Tihamér [35]

[6] Ha valaki úgy véli, hogy a valóság ellentmondásos, vagy úgy gondolja, hogy nem írható le teljesen ellentmondás mentesen, akkor számára nem cáfolja meg a mozgás létezését annak ellentmondásos mivolta. Így gondolkoztak Hegel és Marx nyomán az egykori dialektikus-materialista filozófusok.

Kiegészítés angolul tudóknak. Az alábbiak különféle álláspontokat reprezentálnak, van, amivel egyetértek, van, amivel nem, de az utóbbiak is érdekesek és tanulságosak:

S. Marc Cohen

Zeno's Paradox of the Arrow (S. Marc Cohen) [7] A reconstruction of the argument (following 9=A27, Aristotle Physics 239b5-7:

1. When the arrow is in a place just its own size, it's at rest.
2. At every moment of its flight, the arrow is in a place just its own size.
3. Therefore, at every moment of its flight, the arrow is at rest.

Aristotle's solution:

The argument falsely assumes that time is composed of "nows" (i.e., indivisible instants).

There is no such thing as motion (or rest) "in the now" (i.e., at an instant).

Weakness in Aristotle's solution: it seems to deny the possibility of motion or rest "at an instant." But instantaneous velocity is a useful and important concept in physics:

The velocity of x at instant t can be defined as the limit of the sequence of x's average velocities for increasingly small intervals of time containing t.

In this case, we can reply that if Zeno's argument exclusively concerns (durationless) instants of time, the first premise is false: "x is in a place just the size of x at instant i" entails neither that x is resting at i nor that x is moving at i.

Perhaps instants and intervals are being confused.

"When?" can mean either "at what instant?" (as in "When did the concert begin?") or "during what interval?" (as in "When did you read War and Peace?").

1a. At every instant at which the arrow is in a place just its own size, it's at rest. (false)

2a. At every instant during its flight, the arrow is in a place just its own size. (true)

1b. During every interval throughout which the arrow stays in a place just its own size, it's at rest. (true)

[7] `https://faculty.washington.edu/smcohen/320/ZenoArrow.html`

2b. During every interval of time within its flight, the arrow occupies a place just its own size. (false)

Both versions of Zeno's premises above yield an unsound argument: in each there is a false premise: the first premise is false in the "instant" version (1a); the second is false in the "interval" version (2b). And the two true premises, (1b) and (2a), yield no conclusion.

A final reconstruction

In this version there is no confusion between instants and intervals. Rather, there is a fallacy that logic students will recognize as the "quantifier switch" fallacy. The universal quantifier, "at every instant," ranges over instants of time; the existential quantifier, "there is a place," ranges over locations at which the arrow might be found. The order in which these quantifiers occur makes a difference! (To find out more about the order of quantifiers, click here.) Observe what happens when their order gets illegitimately switched:

(1c) If there is a place just the size of the arrow at which it is located at every instant between t_0 and t_1, the arrow is at rest throughout the interval between t_0 and t_1.

(2c) At every instant between t_0 and t_1, there is a place just the size of the arrow at which it is located. We will use the following abbreviations:

$L(p, i)$:=The arrow is located at place p at instant i

R :=The arrow is at rest throughout the interval between t_0 and t_1

The argument then looks like this:

(1c) If there is a p such that for every i, $L(p, i)$, then R.

$\exists p \forall i L(p, i) \rightarrow R$

(2c) For every i, there is a p such that: $L(p, i)$.

$\forall i \exists p L(p, i)$

But (2c) is not equivalent to, and does not entail, the antecedent of (1c):

There is a p such that for every i, $L(p, i)$

$\exists p \forall i L(p, i)$

The reason they are not equivalent is that the order of the quantifiers is different. (2c) says that the arrow always has some location or other ("at every instant i it is located at some place p") – and that is trivially true as long as the arrow exists! But the antecedent of (1c) says there is some location such that the arrow is

always located there ("there is some place p such that the arrow is located at p at every instant i") – and that will only be true provided the arrow does not move! So one cannot infer from (1c) and (2c) that the arrow is at rest.

The Arrow and Atomism

Although the argument does not succeed in showing that motion is impossible, it does raise a special difficulty for proponents of an atomic conception of space. For an application of the Arrow Paradox to atomism, click here.

Chris Mortensen

Mortensen, Chris, "Change and Inconsistency", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL=<https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/change/>.

Kiemelek az érdekes tanulmányból két erősen vitatható pontot:

7p. If the cars's position function f is given by, say, $f(t) = t^2$, then its speed is $2t$. If motion is defined as having non-zero speed, then the car is motionless at $t = 0$. On the other hand, at all it is in motion, so there is surely no puzzle about when it could ever begin: there is no first instant of motion. Az egyenletek a dimenziók figyelembe vételével hibásak: az idő négyzete nem távolság, az idő konstanssal szorozva nem sebesség. Helyesen: $f(t) = 1/2 \times a \times t^2$('$a$' a gyorsulás mértéke), a sebesség (v) pedig $v = a \times t$.

8p. However, there are more troublesome special cases. Suppose that the car's position function is given by: $f(t) =$ for all $0 < t$, else $f(t) = t$. Then speed is zero for all $t < 0$, and speed is 1 for all $t > 0$. But what of? Helyesen $f(t) = v \times t$, és $v = 1m/sec$ A válasz: 1, mivel a függvény értelmezett a 0 helyen, tehát ott derivált értéke is van.

Casey D. McCoy

C.D.McCoy: On Classical Motion (2018) Philosophers' Imprint (forthcoming)

Abstract: The impetus theory of motion states that to be in motion is to have a non-zero velocity. The at-at theory of motion states that to be in motion is to be at different places at different times, which in classical physics is naturally understood as the reduction of velocities to position developments. I first defend the at-at theory against the criticism raised by Arntzenius that it renders determinism impossible. I then develop a novel impetus theory of motion that reduces positions to velocity developments. As this impetus theory

of motion is by construction a mirror image of the at-at theory of motion, I claim that the two theories of motion are in fact epistemically on par-despite the unfamiliar metaphysical picture of the world furnished by the impetus version.

Angie Hobbs

Professor Angie Hobbs moves on to describe The Arrow paradox, which is perhaps the most challenging of all Zeno's paradoxes. `https://youtu.be/IPNttsu8x24` So, onto the arrow Aristotle says that all the Zeno's paradoxes denying the possibility of motion present problems to those, who try to solve them and I think, we're going to find this is particularly true about the arrow. So, according to Aristotle, Zeno claims that the flying arrow is at rest. Notice just how paradoxical this is. The air has already got to be in motion. It's got to be flying for the paradox to work. If you said the motionless arrow is motionless, that's not a paradox. It's the fact, it's the flying arrow is at rest that's, what makes this so particularly tricky. Now Aristotle says that this only works paradox, only works, he claims, if you regard time as composed of 'nows'. In the Greek 'ecto nuna nuna' being the word for 'now', and that, if you don't regard time like this, the paradox doesn't follow. So we're going to first of all construct a paradox, but then, we're going to have to ask do we have to regard time as composed of 'now', what does 'now noon' mean, and the Greek, anyway but first let's see how we know constructed this arrow paradox, at least as according to Aristotle. And don't forget we don't have Xena's book of 40 paradoxes, we just have a few of them paraphrased, interpreted outlined, we don't quite know what in later writers, such as Aristotle.

So first of all premise 1:

Okay, so the claim is that, everything is at rest for any temporal interval, during which it occupies a place

*(1)	Anything occupying a place just its own size is at rest.	
**(2)	In the present, in the now the noon, what is moving occupies a place just its own size.	
**(3)	In the present what is moving is at rest.	(1)(2)
***(4)	For what is moving always moves in the present.	
	Conclusion:	
***(5)	What is moving is always throughout its movement at rest.	(3)(4)

Table 2.4: Angie Hobbs rekonstrukciója

equal to itself. But one might counter, this is only true, if the thing in question, say the arrow, occupies the same place for that stretch of time. The moving arrow clearly doesn't do this, it does not occupy the same place for that stretch of time. But what if time were not infinitely divisible, as in the dichotomy and

Achilles and the tortoise. But finitely divisible into indivisible minimal indivisible chunks, wouldn't the arrow then be trapped in one indivisible chunk of time, and therefore in the same place for this indivisible chunk, and therefore motionless. And if you're meant to regard the entire flight of the arrow is composed of these indivisible chunks, then the arrow would be motionless throughout its flight, just as we know claims. So problems arise, if we think of time as composed of mouths of periods with a dimension as tiny indivisible chunks of time. So let's suppose that time is after all infinitely divisible, and that now refers to a moment a dimensionless instant now. At first glance this would seem to give us a way out, as we can say okay, admittedly you can't tell whether the arrow is moving or not moving at any one dimensionless moment, because you would need reference to at least two dimensionless moments to work out whether the arrow has proved, but this does not mean that, you can say that the arrow is not moving throughout its flight, because the flight is not a composed of a series of dimensionless moments. No stretch of time is composed of a series of moments any more, than a line in space is composed of it's dimensionless points. This looks more promising. We've got the moving arrow moving again, but we still have a huge problem on our hands, and it concerns the nature of time, because: when exactly does the moving arrow move, if the present then now is simply a dimensionless moment. What is the present, if it's simply a dimensionless dividing line between past and future? When does the arrow possibly move, maybe we can only ever say that the arrow has moved and not that it is moving now. So problems arise with the arrow paradox whether we think of time as finitely or infinitely divisible, and if time exists, it must be one or the other. So maybe time doesn't exist just the xenos master Parmenides had originally claimed.

2.2. André Gallois a változás filozófiai problémájáról

Bevezetés

A változás filozófiai problémája szorosan kötődik a fizikai tárgyak önazonossága kérdéséhez, így Gallois 1998-es [7] és 2017-es [8] könyvében is kitért annak elemzésére. Nem teljesen ugyanazt gondolja később, mint korábban, bár egyáltalán nem foglalkozik azzal, hogy a korábbi álláspontja hol, miben volt téves, és mi vezette rá mostani álláspontjára. Úgy tűnik mások írásai győzték meg.

Van-e filozófiai probléma a változás fogalmával?

A válasz természetesen igen, de most arról lesz szó, hogy hogy miért nem. A világban épp úgy létezik változás, amiképpen fizikai tárgyak, vagy az idő és a tér. Mindezekről a józan észnek határozott véleménye van, és a józan ész itten nem téved, ez az ő illetékességi területe. Ugyanakkor, mind a tudományban, mind a filozófiában megkérdőjelezik ezen jelenségek létezésének a valóságát. Ez a megkérdőjelezés hasznos, mert fontos belátásokra vezetett rá. A változással kapcsolatban két egymással összefüggő kérdés merül fel: nem vezet-e ellentmondásra a változás létének feltételezése? A kérdés nem lehet új annak, aki egy kicsit is ismeri a filozófiatörténetét. A második kérdés, hogy miképp lehetséges változás, miképpen maradnak fenn a fizikai tárgyak, miközben megváltoznak? Gallois könyve is lényegében erről szól. Most nem erről, hanem az első kérdésről lesz szó: konzisztens-e egyáltalán a változás fogalma?

Az 1998-as álláspont

André Gallois úgy gondolta, hogy Leibniz törvénye az azonosak megkülönböztethetetlenségéről (Indiscernibility of Identicals) kizárja a változás lehetőségét. Ebben a korábbi könyvében még logikai formulákat is alkalmaz, így pontosan érthető, hogy mire gondolt. (Sajnos későbbi könyvében valamiért ezt kerüli.) Így fogalmazta meg Leibniz törvényét (A jelölésen a lényeget nem érintő módon változtattam):

(LL) $\forall x \forall y [x = y \rightarrow (\Phi x \rightarrow \Phi y)]$

Szerinte ez az axióma kizárja a változás lehetőségét.[8] Azért zárja ki a változás lehetőségét, mert kizárja a relációk alkalmazását, a változás pedig relációs kifejezések alkalmazását kívánja meg. Egy példa megvilágítja, hogy mire gondol. Szerinte (LL) egy interpretációja ez:

Ha x és y azonos, akkor ha x-görbe, akkor y-is-görbe.

vagy:

Ha x és y azonos, akkor ha x-egyenes, akkor y-is-egyenes.

[8] „Is (LL) plausible? The trouble with (LL) is that it rules out change.” [7] p.36

Viszont semmi nem lehet egyenes és görbe, azért lehetetlen, hogy valami egyszer görbe, másszor egyenes. Ez azonban ellentmond a józan észnek. Hiszen meglehet, hogy egy drót *görbe délelőtt*, majd miután kiegyenesítem, *egyenes délután*. Ha Leibniz törvénye ezt tiltja olyan módon, hogy kifejezhetetlenné teszi a formulák nyelvén, akkor valami nagyon nagy baj van a formális logikával, hiszen annak axiómája ez a törvény. Gallois úgy gondolta, meg kell változtatni ezt az axiómát, hogy kifejezhető legyen a változás. A javaslata a következő: „Leibniz (LL) törvényének szélesebb hatókörű konstrukciója a törvény következményeit idő-indexelt formában beépíti a törvénybe. A törvénynek ez a kiterjesztett változata így fest:”[9]

$(LL_1)\forall x\forall y(t \in T)[x = y \rightarrow (\text{at } t : \Phi x \rightarrow \text{at } t : \Phi y)]$; ahol t egy T idő tartományon értelmezett változó. (A formulát a lényeget nem érintő módon átírtam) Az általa javasolt megformulázás azt sejteti, hogy az idő nem reláció, hanem valami sajátos kitüntetett viszony. Ha egyszerű reláció lenne, akkor Galloisnak így kellett volna fogalmaznia:

$(LL_1)^*\forall x\forall y(t \in T)[x = y \rightarrow (\Phi tx \rightarrow \Phi ty)]$

De nem ezt választotta, és ez erre utal, hogy hogy nem a formális logika szokásos keretein belül gondolkozik, hanem talán változó igazságértékű logikában. Ami az indexelést illeti, azt jobban kifejezné az alábbi megformulázás:

$(LL_1)^{**}\forall x\forall y(t \in T)[x = y \rightarrow (\Phi_t x \rightarrow \Phi_t y)]$

Később elmagyarázom, hogy miért nem szerencsés az idő ilyen indexikus felfogása.

Valóban van ilyen korlátja az (LL) formulának? Ha van, akkor nem fejezheti ki azt, amire Leibniz gondolt. Ugyanis az ő szellemében, ha x és y azonos, akkor *minden* tulajdonságuk azonos. Tehát ha x és y azonos, akkor *minden belső és külső* tulajdonságuk is azonos. Márpedig a külső tulajdonságok relációkat jelentenek, és ha ezeket nem foglalja magában az (LL) formula, akkor ez a formula nem fejezi teljesen az azonosak megkülönböztethetetlensége törvényét, azaz a formula hibás. Szerencsére nincs ilyen korlátja a formulának. Gallois nem értette meg, hogy tetszőleges reláció egyargumentumú predikátummá válik, ha a többi argumentum helyét kitöltjük névvel vagy változóval. Valójában tehát az (LL) formula ezt jelenti:

Az azonosak megkülönböztethetetlensége törvénye:

$(LL_1)^{***}\ \forall x\forall y[x = y \rightarrow (\Re xu \ldots v \rightarrow \Re yu \ldots v)]$

[9] „A more charitable construal of (LL) takes the consequent of (LL) to have an implicit time-indexing built into it. Making the time indexing explicit results in: $(LL_1)(x)(y)(t)[x = y \rightarrow (att : \Phi x \rightarrow t : \Phi y)]$” u.o. p.37

A lényeg, hogy egyazon változók szerepeljenek ugyan olyan sorrendben mindkét esetben.

Példák:

Ha $x = y$ akkor (ha x magasabb mint Péter akkor y is magasabb mint Péter)

Ha $x = y$ akkor (ha x Hanna és Borbála között áll akkor y is Hanna és Borbála között áll)

Az idő is épp ilyen reláció ezért:

Ha $x = y$ akkor (ha x görbe délelőtt akkor y is görbe délelőtt)

Ha $x = y$ akkor (ha x egyenes délután akkor y is egyenes délután)

Általánosan fogalmazva:

Ha $x = y$ akkor (ha xz alakú t-kor akkor yz alakú t-kor)

Következésképpen Gallois logikai reformjára – legalábbis ez okból – nincsen szükség.

A 2017-es álláspont

Gallois a változás problémája vizsgálatával kezdi újabb könyvét. Az egyik útja a kérdés bemutatásának, hogy miképpen marad meg a fizikai tárgyak önazonossága, miközben megváltoznak? A legtöbb vizsgálódás ezen belül egy sajátos kérdésre fókuszál: hogyan maradhatnak meg a fizikai tárgyak, miközben némelyik részük kicserélődik? Itt az ideje azonban – írja Gallois – hogy a problémát általánosabban is megfogalmazzuk. Az egyik oka ennek, hogy az utóbbi időben több jelentős filozófus is tagadta, hogy a változás a maga általánosságában fölvet problémákat, azaz a puszta létezésének a feltételezése is ellentmondásra vezet. Szerintük a változás lehetőségét cáfoló érvek elhibázottak vagy valójában másvalaminek a létezését cáfolják. Gallois sorra veszi ezeket a gondolatmeneteket. Lehetséges-e egyáltalán változás? Ha lehetséges, akkor miképpen lehetséges?

A változás lehetőségét cáfoló érvek arra futnak ki, hogy a változás fogalma inkonzisztens (ellentmondásra vezet), ezért nem létezik változás. De ha sikerül kimutatnunk, hogy egy ilyen cáfolata a változásnak elhibázott vagy megalapozatlan következtetésen alapul, azzal még egyáltalán nem küszöböltük ki a problémát magát. Gallois egy példával magyarázza meg utóbbi véleményét. Képzeljük el, hogy apró hibát találunk a 'hazug' paradoxonban. Ebből azonban hiba lenne arra következtetni, hogy az ismert paradoxon nem vet föl alapvető kérdéseket az igazság természetével kapcsolatban. Szerinte hasonló a helyzet a változással kapcsolatban. Gallois szerint, ha az ismert ellenérvek el is buknak, attól még a változás filozófiai kérdése

továbbra is nyitott, és számos kérdés megválaszolásra vár. Mik a változás lehetőségét cáfoló releváns érvek? A filozófusok, akik azt állítják, hogy a változás fogalma ellentmondásos, három ilyen érvre összpontosítanak. Gallois a három argumentumot és az arra adott válaszát is kizárólag természetes nyelven fogalmazza meg. Én alább három definíció alkalmazásával adok ezekhez egy lehetséges formális nyelvi fordítást, a jobb megértést segítendő. A három érv megfogalmazása természetes nyelven látszólag egyszerű, könnyen érthető. Figyeljük meg azonban, hogy a természetes nyelven egyszerűnek, és világosnak tűnő gondolatok lefordítása a formális logika nyelvére egyáltalán nem egyszerű. Talán csak az a (iv) premissza fordítása kézenfekvő, de ott is két értelmezés között kell választanunk. Az második premissza esetén kénytelenek vagyunk másodrendű logikát alkalmazni, de a többi esetben is a 'leszármazottja' reláció fogalmának az alkalmazása túlmutat az elsőrendű logikán. Mindez biztos jele annak, hogy a természetes nyelven egyszerűnek tűnő gondolatok valójában nem egyszerűek.

Def. $Her(xyt_1t_2) :=$ t_1-beli x-nek a t_2 beli y a leszármazottja

Def. $Per(xt_1t_2) :=$ x fennmarad t_1 és t_2 tartományban

Def. $Mod(xt_1t_2) :=$ x megváltozott t_1 és t_2 tartományban

Az első argumentum

(i) Miközben valami megváltozik, valaminek változatlannak kell maradnia a változás során.
(i.1) $\exists x Mod(xt_1t_2) \rightarrow \exists y Per(yt_1t_2)$
(ii) Ahhoz hogy valami fennmaradjon a változás során, az *ugyanaz* kell legyen a változás után, mint annak előtte volt.
(ii.1) $Mod(xt_1t_2)\&Per(xt_1t_2) \rightarrow \exists y(Her(xyt_1t_2)\&\exists\Re(\Re xt_1\& \sim \Re yt_2)\&x = y)$
A formula feltételezi, hogy valami változik, és ugyanakkor fennmarad.
(iii) De ahhoz, hogy valami megváltozzon, annak a változás után *különböznie* kell a változás előtti önmagától.
(iii) Ez kétféle módon is érthető:
(iii.1) $Mod(xt_1t_2)\exists\Re(\Re xt_1\& \sim \Re xt_2)$
(iii.2) $Mod(xt_1t_2)\exists y(Her(xyt_1t_2)\&x \neq y)$
(iv) Semmi sem lehet egyszerre ugyanaz és különböző.
(iv) Ez is kétféle módon is érthető:
(iv.1) $\sim \exists x\exists t(\Re xt\& \sim \Re xt)$
(iv.2) $\sim \exists x\exists y(x = y\&x \neq y)$

Gallois szerint nyilvánvaló, hogy ez az érv hibás, és nem okoz valódi problémát a változással kapcsolatban. [10] Szerinte a (ii) és (iii) premisszák kétértelműen használják az 'ugyanaz' és 'különböző' terminusokat.

[10](i) In order for there to be change something must persist through a change (ii) In order for something to persist through change it must be the same after the change as it is before; (iii) But in order for something to change it must be different after the change from what it is before. (iv) Nothing can be both the same an different

Az (ii) premissza esetében, hogy valami változatlan maradjon a változás során, azt kell mondjuk, hogy valami – egy dolog – a változás után azonosnak kell legyen valamivel – egy dologgal –a változás előtt. A (iii) esetében azt kell mondanunk, hogy egy dolognak ha megváltozik, akkor különböző minőségekkel kell rendelkeznie a változás előtt, és a változás után. Tehát szerinte (ii) a dolgok azonosságról beszél, míg (iii) a minőségek különbségéről. Nem meggyőző Gallois cáfolata, mivel természetes nyelven fogalmazza meg azt amit cáfol, és a cáfolatát is. Így homályos hogy pontosan mit állít a (iii) permissza és mi a cáfolat. (iii) premissza érthető úgy is – lásd. (iii.2) –, hogy Gallois cáfolata célt téveszt. (Szerintem ii.1 és iii.2 között levezethető az ellentmondás.) Az a baj Gallois cáfolatával, hogy miközben a minőségek eltéréséről beszél, eleve feltételezi a bizonyítandót. Eleve feltételezi, hogy a különböző minőségek tartozhatnak egyazon dologhoz, és nem válaszolja meg, hogy mitől marad fenn az önazonosság, miközben a tárgy minőségei megváltoznak.[11] (Az én korábbi írásaim erről a kérdésről szintén ebbe a hibába estek.)

A második argumentum Gallois interpretációjában

(i') Semminek nem lehetnek inkompatibilis – egymást kizáró – tulajdonságai.

(ii') Azért hogy létezzen változás, valaminek inkompatibilis tulajdonságai kell legyenek.

(iii') Változás nem létezik.

[12] Amint Thomas Hofweber rámutat (i') kétértelmű. Egyrészt azt jelentheti, hogy semminek nem lehetnek inkompatibilis tulajdonságai egyazon időben, ami önmagában nyilvánvaló. Az így értelmezett (i') azonban nem jelent problémát a változással kapcsolatban. Senki sem mondaná, hogy a változtatás egymást kizáró tulajdonságok egyidejű fennállását jelenti. Más értelmezésben (i') úgy értendő, hogy semmi nem tartalmazhat összeegyeztethetetlen tulajdonságokat különböző időpontokban. De így értelmezve, Hofweber azt mondaná, hogy az argumentum nyilvánvalóan hamis. Tehát (i') semelyik értelemben nem okoz problémát a változással kapcsolatban.[13]

[11] „Clearly this argument is unsound, and introduces no genuine problem about change. Premises (ii) and (iii) equivocate on being the same and different. In the case of (ii), that something must be the same to persist through change is to say it must be identical after the change with something before the change. In the case of (iii), to say that in order to change something must be different is to say that it must have different qualities."

[12] (i') Nothing can have incompatible properties; (ii') In order for there to be change something must have incompatible properties. (iii') There is no change.

[13] „As Thomas Hofweber points out (i') is ambiguous. It could mean that nothing has incompatible properties at the same time, in which case it is self-evident. But so construed (i') does not pose a problem about change. No one would say that change requires something to have incompatible properties at the same time. Alternatively it could mean that nothing could have incompatible properties at different times. But so construed, Hofweber would say, it is self-evidently false. So, on either way of taking it, (i') poses no problem about change."

A harmadik argumentum

Gallois, a harmadik változás elleni érvvel kapcsolatban, már a perdurantizmus különböző értelmezéseinek tárgyalása során foglalkozott könyve hatodik fejezetében.[14] Azt a kérést feszegeti, ha egyáltalán lehetséges változás, az miképpen lehetséges? A harmadik változás elleni érv, az időbeli belső tulajdonságok természetére alapoz. Gallois szerint ez a legerősebb érv a változás ellen, de végső elemzésben nem fogadja el a változás e cáfolatát sem.

David Lewis érve

Az érv David Lewis felfogásában így fest. Valamit egyszer meghajlítanak, és máskor kiegyenesítik. Lewis kiinduló pontja, hogy a belső tulajdonságok monadikus predikátumok és nem relációk. Valaminek a görbe mivolta a dolog belső tulajdonsága, így a 'görbe' tulajdonság -monadikus predikátum és nem reláció. Ez azt jelenti, hogy ha argumentum helyeket rendelünk a tulajdonságokhoz, akkor a 'görbe' predikátumhoz csak egyetlen argumentumhely tartozik – legalábbis Lewis szerint. Ha ez így van, akkor miképpen lehet fenntartani azt az álláspontot, hogy valaminek egy intrinzikus (belső) tulajdonsága megváltozik? Miképpen lehet, hogy valaminek az a belső tulajdonsága, hogy görbe megváltozik, és az a valami egyenes lesz? Hiszen a görbe és egyenes inkompatibilis, egymással összeegyeztethetetlen tulajdonságok. A szokásos válasz az, hogy valami egyszer görbe, másszor egyenes. De – Lewis szerint – ez csak azt a kérdést vetíti fel: mit jelent az, hogy azt mondjuk, hogy valami valamikor görbe? A szokásos válasz nem kielégítő, kivéve a négydimenziós szemlélet által adott választ. Különösen nem kielégítő azt állítani, hogy a görbeség valójában egy kétargumentumú relációs tulajdonság, azaz x-görbe-t-kor, ahol t egy időpont – így Lewis. [15]

Gallois szerint Lewis tévesen értelmezi a 'görbe' tulajdonságában lévő argumentumok számát. Az érv ugyanis egyáltalán nem kapcsolódik az intrinzikus (belső) tulajdonságokhoz, mivel ugyanígy megfogalmazható külső tulajdonsággal kapcsolatban is. Tegyük fel – mondja Gallois – hogy Anna korábban alacsonyabb mint Gertrude, de később megnő, és magasabb lesz, mint Gertrude. Anna tehát megváltozott a 'Gertrude-nál alacsonyabb' tulajdonság vonatkozásában. De hogyan lehetséges ez – kérdezi Gallois David Lewistől – hiszen a 'Gertrude-nál alacsonyabb' tulajdonság inkompatibilis a 'Gertrude-nál magasabb' tulajdonsággal.

[14] How can a changing thing have incompatible intrinsic properties at different times? According to Lewis, it is not enough to say that the times are different. We need to say what it is for something to have a property at a time which shows how the apparent contradiction can be avoided. The four-dimensionalist has no problem showing how it can be. On that view when I say that a surface is uniformly red at one time and uniformly green at another, I mean that it has a red temporal stage and a green temporal stage.
Lewis' second argument assumes a principle called Humean supervenience. According to Humean supervenience, all facts supervene on facts about the distribution of intrinsic properties across all points of space-time. With that supervenience principle in hand we envisage a possible world with the same distribution of intrinsic properties as in the actual. In the possible world we are envisaging objects are made up of stages. Since that is so, Humean supervenience tells us they are made up of stages in the actual world. [8] p.168

[15] Régebbi könyvében [7] a 37-38 és a 265-268 oldalakon tárgyalja Lewis konceptióját.

A lehetséges válasz ez: Anna korábban volt alacsonyabb mint Gertrude, és később lett magasabb. Ezek alapján mit jelent az, hogy valaki alacsonyabb valakinél egy időpontban? Ha azt válaszoljuk, hogy az azt jelenti, hogy van egy háromargumentumú relációnk: x-alacsonyabb-y-nél-t-időpontban, akkor Lewis és követői azzal vádolnának, hogy tévesen értelmezzük az argumentum helyek számát az 'alacsonyabb' relációnál. Szerintük az 'alacsonyabb' reláció kétargumentumú külső reláció és nem három argumentumú, azaz szerintük nem tartalmazza az időt argumentumként. Ez pontosan ugyanaz az érv, amelyet korábban feltételezett monadikus belső tulajdonságról állítottunk, mint például a 'görbe'. De ha ez így van, akkor az érvnek sem a monadikusséghoz, sem a tulajdonságok intrinzikus mivoltához nincsen köze!

Ha az időbeli intrinzikus tulajdonságokra apelláló érvnek valójában nincsen köze a tulajdonságok intrinzikus mivoltához, sem azok monadikus jellegéhez, akkor miről szól Lewis érve? Gallois szerint Lewis érve nem a változásról szól. Hogy ezt belássuk, képzeljünk el egy világot, amelyben nincsen változás, minden változatlan. Ebben a világban semmi nem változtatja meg az alakját, nem lesz görbéből egyenes, és más tulajdonsága sem változik meg. Annak ellenére, hogy egy görbe objektum soha nem változik meg, különböző időpontokban görbe. Ezért megkérdezhetjük, mit jelent azt mondani, hogy az objektum egy időben görbe. Ez ugyanez a fajta érv, amit Lewis alkalmaz a változás ellen, csakhogy ebben a világban nincsen változás. Tegyük fel, hogy azt állítjuk, ebben a világban egy tárgy azért görbe - azért görbe mindvégig - mert a görbe tulajdonság ilyen relációban áll az időben a tárggyal. Lewisnak ismét joga lenne panaszkodni arról, hogy tévesen ábrázoltunk egy monadikus tulajdonságot relációsként. Ez azt mutatja, hogy a változás elleni érve, egy változatlan világában is működik, ennélfogva ez az érv nem képes megragadni azt, ami a változás problémájának a lényege. Ha a fenti érvek egyike sem bizonyítja, hogy valós probléma van a változással kapcsolatban, akkor van-e itt egyáltalán bármiféle egyéb probléma? Függetlenül attól, hogy a korábbiakban Galloisnak igaza van-e, vagy sem, Gallois úgy véli, a fizikai tárgy önazonossága korábbi problémái ezzel nem szűnnek meg, azok továbbra is megoldandó filozófiai kérdéseket vetnek fel. Ha elfogadjuk, hogy van változás, a változás továbbra is zavarba ejtő kérdéseket vet föl a rész és egész problémájával kapcsolatban.

Néhány záró megjegyzés

A köznapi nyelv viszonya a relációs kifejezésekhez Köznapi nyelven ilyeneket mondunk:

(1) Péter magas.

(2) N.N. úr ősz.

(3) A piszkavas forró.

Az első mondat nyilván úgy értendő, hogy Péter magasabb mint az átlag, tehát rejtetten itten egy viszont adunk meg, aminek elfedjük az egyik tagját, mert az nyilvánvaló.

A második mondat nyilván úgy értendő, hogy N.N. úr az utóbbi években ősz és nem arról van szó, hogy mindig is ősz volt, már őszen született. De azt se így fejeznénk ki, ha N.N. úr hirtelen megőszült volna, a vállát nyomasztó gondok súlya alatt. Itten tehát, N.N. úr hajszíne időbeli viszonyként értendő, ami azonban a társalgás megszokott körülményei között nyilvánvaló, így a köznapi nyelv figyelmen kívül hagyja az időt, mint relációt.

A harmadik mondat biztosan nem azt jelenti, hogy a piszkavas időtlenül forró, azaz mindig forró volt, és a későbbiekben is forró lesz, hanem hogy éppen most, amikor ezt a mondatot kimondva figyelmeztetünk valakit, éppen akkor a piszkavas forró. Itt is relációról, viszonyról van tehát szó, a piszkavas a kimondás időpontjában forró, azaz egy adott időpont viszonylatában.

A filozófiában viszont gyakran zavarok, félreértések forrása, ha nem fedjük fel a köznapi nyelv mélyebb logikai szerkezetét, és megtéveszt bennünket a nyelv felszíni szerkezete. Pl. a Lewis által említett mondat, hogy 'A drót görbe.' szintén időbeli relációként értendő, ellentétben azzal, amit felszíni szerkezete mutat. Pl. a 'A drót görbe.' mondat nem biztos, hogy azt jelenti, hogy mindig görbe volt, görbe volt már létrejötte pillanatában, valószínűbb az a jelentés, hogy éppen most görbe, de korábban lehetett egyenes is.

A klasszikus-fizikai jellemzők időbelisége

A megfigyeléshez, méréshez, kísérletekhez kapcsolódó fizikai jellemzők – leszámítva néhány újabb különös mikrofizikai elméletet – tér-időben értelmezettek, még akkor is, ha ez alatt, az 'itt és most'-indexikus fogalmát értjük. Azért van ez így, mert mérni, megfigyelni időbeli folyamat, időbeli történés, és az eredmény is mindig az időhöz kapcsolódik. Valójában közelebb áll az igazsághoz Lewis tézisének az ellentéte: minden fizikai jellemző időbeli relációt ad meg.

Intrinzikus tulajdonságok alapvető relációssága

Sok filozófus úgy véli, a tárgyak intrinzikus tulajdonságainak monadikus (egyargumentumú) predikátumok felelnek meg, a relációk ezzel szemben mindig külsők, külső viszonyokat írnak le. Pl. Anna magasabb mint Gertrúd. Ez azonban súlyos tévedés. Közelebb áll a valósághoz a szokásos nézet ellentéte. Gondoljunk bele, a vizet azok a viszonyok teszik vízzé, ahogy a két hidrogén atom az oxigén atomhoz kapcsolódik; a széket azok a viszonyok teszik székké, ahogy a lábak, az ülés, és a háttámla egymáshoz van rögzítve, ha más viszonyban állnának, nem beszélhetnénk székről. Valójában tehát minden összetett tárgy lényegét alkotják a tárgy alkotórészei belső viszonyai, amit relációk írnak le, és ezért a tárgyak belső tulajdonságai

többnyire relációk. Még valójában egy olyan tulajdonság, mint a 'görbe', az is reláció, nem csak az időbeli mivolta miatt, hanem azért, mert valójában egy adott koordináta rendszerben, az euklideszi térben görbe a drót, csak ezt a teret önkéntelenül feltételezzük. Egy másik geometriai rendszerhez viszonyítva a görbe drót egyenesnek számít.

Indexek és relációk

Sok filozófus indexekről beszél ott, ahol relációkról kéne beszélnie. Ez félreértések forrása lehet több okból. Egy olyan jel, mint pl. 't_1' azért használ indexeket, mert nincsen elég betű, továbbá ilyen módon fejezi ki, hogy az egymáshoz hasonló tipográfiájú betűk csoportja arra utal, hogy azok egyazon logikai-grammatikai szerepet játszanak a formális nyelven. Valójában a 't_1' jel tehát egyetlen egység, egyetlen egy jel. Egy példa jól megvilágítja, hogy miről van szó. Abból az atomi formulából, hogy $\Re xt_1$ logikailag következik, hogy $\exists t \Re xt$, viszont hiba lenne így következtetni: $\Re xt_1 \Rightarrow \exists i \Re xt_i$. Egy ilyen következetés legalábbis magyarázatra szorulna. Ezért amikor indexek használatával fejezünk ki relációs tulajdonságokat, akkor kellő körültekintéssel kell eljárni, nehogy szem elől tévesszük azok viszony jellegét.

Összefoglalás

Az utolsó fejezetben Gallois így összegzi álláspontját: „A fejezetben tárgyalt utolsó téma a változás állítólagos problémája. Az úgynevezett meta-problémája a változásnak, nevezetesen, hogy gondot okoz-e a változás föltételezése. Megvizsgáltunk néhány érvet azzal kapcsolatban, hogy a változás problémája valós, de azt találtuk, hogy mindegyik hiányos, gyönge lábakon áll."[16]

[16] „The last topic discussed in the chapter is a problem about the alleged problem of change. The so-called meta-problem of change is whether there is a problem of change. We examined a number of arguments purporting to show that there is a problem of change and found them wanting." [8] p.194.

2.3. A változás lehetetlensége

Bevezetés

Tőzsér János ÉS-ben publikált írásában a filozófia természetét boncolgatja.[17] Meglehetősen lesújtó diagnózist tár az olvasó elé, bár fejtegetései mégis happy endinggel záródnak. Gondolatmenete részletesebben megtalálható a Magyar Filozófia Szemle 2013/1 számában, ami arra utal, hogy kiérlelt álláspontot védelmez nagyközönségnek szánt írásában.

Szerintem Tőzsér filozófián az analitikus filozófiai mozgalmat érti. Ez a mozgalom problémák felvetéséből, érvek és ellenérvek különböző színvonalú áradatából áll, nem pedig átfogó filozófiai rendszerek alkotásából. Az analitikus filozófusok néha meggyőzik egymást, vagy önmagukat, belátják, hogy valamiben tévedtek. Mindez többek között azért lehetséges, mert alapjaiban közös logikát használnak, pl. egyetértenek abban, hogy egy ellentmondásos teória hibás, elvetendő vagy javításra szorul. Egyetértenek az azonosak megkülönböztetése elvében, abban, hogy léteznek fizikai tárgyak, hogy nincs szükség külön természetfilozófiára, a fény természete nem magyarázható spekulatív szósalátákkal, és sok más kérdésben. Érveik vannak, és sokkal jobban értik egymást, mint a régi intuitív, spekulatív, kinyilatkoztatás szerű gondolatokat megfogalmazó filozófusok. Utóbbiak írásai gyakran figyelemre méltó irodalmi értékkel bírnak, míg az analitikusok stílusa gyakran száraz, jellegtelen. A filozófiának a spekulatív ágát szokás „kontinentális filozófia”-nak nevezni, én ezt nem teszem, mert félrevezető az elnevezés. Az analitikus filozófiai mozgalom az utóbbi időben a szaktudományokhoz hasonlóan specializálódott, épp úgy nem lehet minden kérdéshez érteni, mint a matematikában vagy a fizikában. A világ minden tájáról publikálnak, számos tematikus kiadvány, levelező lista segíti az eligazodást Sokan foglalkoznak a filozófia és valamely szaktudomány határterültével, sokan alkalmaznak valamilyen logikai-matematikai apparátust is érveik alátámasztására. Én is ezt fogom tenni a későbbiekben. Mindezeket a nemfilozófus olvasó kedvéért mondtam el, Tőzsér ezeket nálam sokkal jobban tudja. És amit mond a filozófia hasznáról az a hazai filozófiai berkekben sokaknak vonzó, másoknak is voltak hasonló tartalmú elejtett megjegyzései a filozofálás természetéről. Forrai Gábor írja Tőzsér Metafizika könyve hátlapján: „A filozófia nem megtanulásra váró, jól megalapozott igazságok gyűjteménye, hanem rivális álláspontoké, mellettük és ellenük szóló érveké ...” [18] Remélem, hogy Forrainak a filozófiai tudományok haladtával egyre kevésbé lesz igaza.

Tőzsér Stephen Hawking és Lonard Mlodinov véleményével indítja írását, melynek az a veleje, hogy a filozófusok elaludtak, miközben a szaktudományok elszáguldottak mellettük. Attól függ kiről van szó, félek a kritikusok nem kellően tájékozottak. Sajnos a helyzet sok esetben ennél rosszabb. Nem pusztán

[17] Tőzsér János, Minek a filozófia? ÉS, 2014. augusztus 22.
[18] Tőzsér János, Metafizika [15]

az a baj, hogy nem értjük a nagyon bonyolult matematikai apparátust és kifinomult kísérleti módszerekkel alátámasztott szaktudományok elméleteit, hanem elemi, alapvető szaktudományos fogalmakat nem értünk, olyanokat, melyeket egy filozófusnak nagyon mélyen kéne értenie. Talán épp ez rejtőzik a reménytelen viták mélyén. Ezt szeretném a felszínre hozni. Ezt írja Tőzsér: „...a filozófiai problémák olyan természetűek (kérem, higgye el az Olvasó: az összes!), hogy amennyiben konzisztens megoldási javaslattal állunk elő, ezt csak azon az áron tehetjük, hogy feladjuk valamelyik alapvető meggyőződésünket. .... a filozófia művelésének értelme csak akkor védhető, ha szkeptikusok vagyunk a filozófiai megismeréssel szemben, ha kétségbe vonjuk a filozófiai tudás lehetőségét és felfüggesztjük a filozófiai ítéleteinket."

Egy példa

Tőzsér tételét egy példával támasztja alá. A példát megpróbálom olyan világossággal bemutatni, amennyire csak tőlem telik. Amit bizonyítani kívánok a következő: a látszat ellenére Tőzsér érve hibás, a fizikai tárgyak változása nem mond ellent önazonosságuknak, bár a fizikai tárgyak változása valóban fölvethet zavarba ejtő kérdéseket pl. a „Thészeusz hajója" rejtvény kapcsán. A Filozófiai Szemlében írt tanulmányában Tőzsér ezt a problémát említi. Ez is szofizma, de ennek kimutatása sokkal komolyabb matematikai apparátust igényel, mint az ÉS-beli példa, ezért ettől most eltekintek. Tőzsér az ÉS-ben jóval egyszerűbb példán mutatja be a szerinte feloldhatatlan ellentmondást. A példát természetes nyelvet használva magyarázza el, ami önmagában nem kifogásolható egy irodalmi lapban, annak ellenére, hogy matematikai apparátus nélkül a probléma nehezebben tárgyalható.

Ezért én először egy grafikonnal, majd ötféle felfogásban formulákkal is rekonstruálom a Tőzsér által fölhasznált példát. Ha megfelelő a probléma általam adott leírása, ha a grafikon és a formulák tartalmilag helyesen és formálisan adekvátan fejezik ki azt, amit Tőzsér köznyelvi mondatokkal elmond, akkor az ellentmondásnak a probléma mindegyik általam adott fordításában is meg kell jelennie. Most lássuk a probléma eredeti megfogalmazását.

> Vegyük a fizikai tárgyak időbeli létezésének metafizikai problémáját. Ezzel kapcsolatban valamennyiünk alapvető meggyőződése, hogy a fizikai tárgyak időbeli létezésük során megőrzik azonosságukat (azaz: o fizikai tárgy azonos lehet t_1 és t_2 időpontban). Bizonyosra veszem, hogy az Olvasó is úgy gondolja: ugyanazon az asztalon fejezi be az ebédjét, mint amelyen elkezdett étkezni és ugyanazt a kalapot helyezi vissza a fejére, melyet korábban tisztelete jeleként felemelt. Ellenkező esetben azt kellene mondania: az asztal és a kalap t_2-ben más dolog, mint t_1-ben. Ha ugyanis a és b tárgy nem ugyanaz, vagyis nem azonos, akkor a és b különböző tárgyak.

Ugyancsak alapvető meggyőződésünk, hogy a fizikai tárgyak időbeli létezésük során megváltozhatnak (azaz: o fizikai tárgy rendelkezhet t_1-ben F intrinzikus tulajdonsággal és t_2-ben nem-F-fel). (Intrinzikus tulajdonságokon olyan tulajdonságokat értünk, melyekkel egy tárgy attól függetlenül rendelkezik, hogy más tárgyakkal milyen relációkban áll.) Tegyük fel, hogy az Olvasó meghajlít egy drótot. Bizonyosra veszem, hogy úgy gondolja: a drót megváltozott. t_1-ben egyenes volt, t_2-ben görbe.

Csakhogy, ha e két alapvető meggyőződésünk mellett elkötelezzük magunkat, akkor összeütközésbe kerülünk a Leibniz-törvénnyel, mely szerint ha a fizikai tárgy azonos b fizikai tárggyal, akkor a-nak és b-nek valamennyi intrinzikus tulajdonsága azonos. Az inkonzisztencia elkerülhetetlen. Ha egy fizikai tárgy (mondjuk a drót) megváltozik, azaz t_1-ben egyenes, t_2-ben görbe, akkor a t_1-ben egyenes tulajdonsággal rendelkező drót a Leibniz-törvény miatt nem lehet azonos a t_2-ben görbe tulajdonsággal rendelkező dróttal. Fel kell tehát adnunk az első alapvető meggyőződésünket. Másik irányból: ha a drót t_1-ben ugyanaz a dolog, mint t_2-ben, akkor a Leibniz-törvény miatt nem változhat meg intrinzikus tulajdonságaiban. Nem lehet t_1-ben egyenes és t_2-ben görbe. Fel kell tehát adnunk a második alapvető meggyőződésünket.

Az azonosság fogalmát kormányzó logikai alapelvek

Mindenekelőtt pontosítani szeretném Tőzsérnek az azonosak megkülönböztethetetlensége elvével kapcsolatban adott megfogalmazását. Az elvet szabatos formában a logika tudományában találhatjuk meg, a legtöbb klasszikus logikai rendszer egy axiómával és egy axióma sémával rögzíti. Másodrendű logikában definíció is adható, de erre nem lesz szükségünk. Egy megfogalmazása az alábbi: Figyeljük meg,

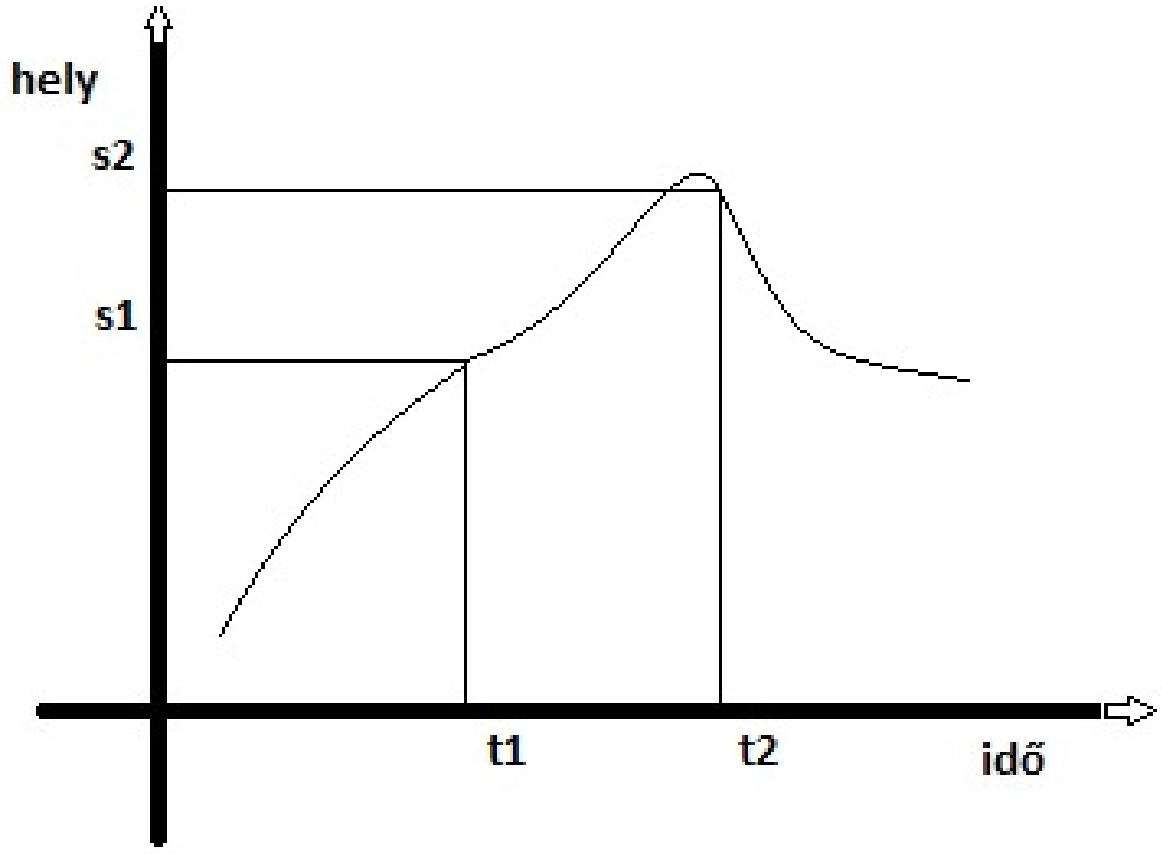
(1) $\forall x(x = x)$
Minden dolog azonos önmagával.
(2) $\forall x \forall y((Fx \& x = y) \rightarrow Fy)$
Ha két dolog azonos, és az egyik F tulajdonságú, akkor a másik is az.
(Hao Wang kimutatta, hogy a fenti két formula levezethető egyetlen axióma sémából.)

2.5. táblázat. Az azonosak megkülönböztethetetlensége törvénye

hogy 'F' helyére bármilyen külső vagy belső tulajdonság, vagy tulajdonságot kifejező relációs kifejezés is helyettesíthető, azaz nincsen semmiféle megkötés, olyan sem, hogy csak intrinzikus tulajdonságok jöhetnek szóba. Ha x azonos y-al, akkor külső tulajdonságaikban sem lehetnek különbözőek. Tőzsér intrinzikus tulajdonságokra korlátozó megfogalmazása összetéveszti az egyformaságot az azonossággal. Ebből lényeges következmények adódnak. Tőzsérnek a drót alakjával kapcsolatos érve átfogalmazható a drót helyére vonatkozó argumentációval.

Fizika és filozófia

Képzeljük el, hogy egy középiskolás diák nem felejti el a fizika órán, amit filozófia órán tanult és viszont. Fizika órán megtanulja, hogy egy merev test mozgását leírhatjuk a Descartes koordináta rendszerben egy függvénnyel. (2.2. ábra) Legyen a merev test – pl. egy drót – t_1 időpontban s_1 helyen, míg egy későbbi t_2 időpontban egy másik s_2 helyen.



2.2. ábra. Drót helye az időben

Filozófia órán viszont azt tanítják neki, hogy a drót nem lehet ugyanazon drót a két időpontban, mivel a korábbi időpontban igaz rá, hogy az s_1 helyen van, viszont a későbbi időpontban nem igaz rá hogy s_1 helyen van. Ezek után jelentkezik fizika órán, hogy a függvény nem írhatja le a drót helyét, mivel a drót a helyváltozatás közben megszűnt létezni. A klasszikus fizika szokásos leírása a mozgásról a filozófia órán tanultak szerint ellentmond az azonosak megkülönböztethetetlensége elvének. Vajon mit mondana erre a fizika tanár és mit az, aki a filozófiát tanítja?[19] Egy rossz filozófus azt mondaná, igen, a matematikai-fizika

[19]Figyeljük meg, hogy a grafikon időpontok rendezett halmazához rendeli a helyek rendezett halmazát. Az időpontok között nincs kitüntetett jelen, sem ahhoz képest múlt vagy jövő. A grafikon csak az előtte és utána relációt valamint az egyidejűséget ábrázolja. A példa általánosítható. A klasszikus fizika, és általában a tudomány szemlélete eternalista. Egy naturalista filozófus számára ezért a fizikai tárgyak bármilyen elmélete csak eternalista kontextusban fogadható el. Megváltozik a helyzet, ha a holt betűk világából átlépünk a kibertérbe. Táblázatkezelőkkel nem csak leírható, hanem modellálható is a változás, miáltal a változás filozófiai problémája más megvilágításba kerül. Az említett filozófia tanár ennek nincs tudatában, soha nem gondolkozott el mélyen ezen az egyszerű középiskolai példán.

csak felszínesen írja le a valóságot, mélységében csak a filozófia tárja fel az ott rejtőzködő ellenmondást. De mi nem vagyunk rossz filozófusok, ez a válasz nem nyugtat meg bennünket.

A drót önazonossága kritériumai

Rövid kitérőt kell tegyünk. Az azonosság fogalmát rögzítő logikai axióma után, meg kellene adnunk az önazonosság sajátos szakmai axiómáit is. Ezek a kiegészítő kikötések még egy olyan egyszerű esetben is szükségesek, mint a mi drótunk. Tőzsér azért nem tud ellentmondást bizonyítani a drót változása kapcsán, mert nem adott meg olyan szakmai axiómákat a drótra nézve, melyekből az levezethető. Kicsit részletesebben elmagyarázom.

Letesszük a mi drótunkat az asztalra, majd kimegyünk a szobából. Visszajövünk és látjuk, hogy ott van egy drót az asztalon. Honnan tudhatjuk, hogy amit látunk az ugyanaz a drót, mint amit mi tettünk az asztalra, és nem egy másik, amelyre kicserélték? A drót kicsit megnyúlhat, a vége letöredezhet, a felülete oxidálódhat, és még jónéhány dolog történhet vele. Meddig mondhatjuk azt, hogy ez még ugyanaz a drót? Ketté is vághatja valaki a drótot. Ekkor két másik drótunk keletkezik, és az eredeti megszűnik, avagy megmarad az eredeti drót, csak megszűnt a folytonossága? Természetes hit, a józan ész előfeltevése, hogy a drót anyagminősége nem változhat meg. Esetleg mégis megváltozhat a drót anyagminősége, pl. a benne lévő fém kristály szerkezete, de csak olyan mértékig, ameddig egy határon belül marad az elektromos vezetőképessége. És mi a helyzet a drót induktivitásával? Befolyásolja-e drótunk önazonosságát a drót anyagának elfáradása sorozatos hajlítások következtében?

Nem folytatom, bizonyítottnak vélem, hogy sokat kell tudnia a drótokról annak, aki komolyan használni akarja. Egy filozófusnak ezen felül nem csak a drótokhoz kell nagyon értenie, hanem olyan fogalmak alkalmazásában is járatosnak kell lennie, melyek segítségével ki tudja fejezni, hogy az egyik drót hasonlít a másikra, de a két drót nem egyforma; vagy a két drót egyforma, de nem azonos. Ha mindezeknek a képességeknek a birtokában vagyunk, csak akkor tudjuk kellő pontossággal megfogalmazni a mi drótunk önazonosságának kritériumait. Ellenkező esetben ne lepődjünk meg, a végeláthatatlan, sehova nem vezető filozófiai vitákon.

Tőzsér annyit mond, hogy a drót megőrzi önazonosságát, ha elgörbítjük. Rendben van, bár dönthetett volna úgy is, hogy a drót csak egyenesen azonos önmagával, ha görbülete meghalad egy mértéket, akkor már nem. Ez utóbbi esetben bizonyítani tudta volna, hogy az elgörbült drót már nem azonos a korábbi egyenes dróttal. Mostan nem állok elő az én elméletemmel, hogy miképpen kell megfogalmazni a drót önazonossága kritériumait, mert most csak a kritika a célom. Bármely megoldás mégoly vázlatos ismertetése is messze túlmutatna ezen írás keretein. Annyit jegyzek meg csupán, hogy lehetünk a drót önazonossága kérdésében

endurantisták, vagy perdurantisták, mindkét metafizikai álláspont védhető, békésen megfér egymás mellett, mindkettőnek vannak előnyei, hátrányai. Miképpen a drót önazonosságára vonatkozó szakmai axiómák megfogalmazása jártásságot, találékonyságot igényel, épp úgy a fizikai tárgyak önazonosság fogalma metafizikai megfogalmazása is. Térjünk vissza az eredeti problémánkhoz.

A változás ábrázolása táblázattal

Adott egy drót – jelöljük 'd'-vel. Ez a drót t_1 időpontban egyenes volt, majd megváltozott, és t_2 időpontban görbe lett. Tegyük fel, hogy a drótnak mindenképpen van valamilyen alakja, és az egyszerűség kedvért csak két féle alakja lehet, egyenes vagy görbe. Föltesszük, hogy az időpontok különbözőek, hasonlóképpen az alakok is, tehát ami egyenes az nem görbe, és ami görbe az nem egyenes. Hogyan tudnánk mindezt grafikonnal ábrázolni? A drót alakjának két fajta lehetőségét e illetve g jelekkel jelölöm, ahol az első az egyenes a második a görbe tulajdonságot jelöli. Logikai grammatikai szempontból e és g jelek individuumnevek, és nem halmazok vagy predikátumok. Metafizikai nézőpontból ez a két jel, egy fizikai jellemző – az 'alakja' – lehetséges értékeit jelöli. A jellemző lehetséges értékei – egyenes és görbe – univerzálék, mivel több helyen egyszerre instanciálódhatnak. Az egyenes és görbe nem olyan módon tulajdonságai egy fizikai tárgynak, mint az egész számoknak a páros és páratlan tulajdonság. Lényeges annak a belátása, hogy az 'alakja' időben létező, időben értelmezett fizikai jellemző. Még akkor is időben értelmezett volna ez a jellemző, ha a drót épp úgy nem változtatná meg az alakját, mint az anyagminőségét. A fizikai jellemzők szükségszerűen időben értelmezettek.

Táblázattal így ábrázolhatjuk a drót két különböző állapotát. A táblázatban szereplő '1' jel azt jelenti, hogy a hozzá tartozó időpontban a tárgy a megfelelő sor baldali oszlopában található jellemzővel rendelkezik, olyan tulajdonságú, a '0' jel értelemszerűen ennek a tagadása.

g		0	1	
e		1	0	
d	korábbi időpontok	t1	t2	későbbi időpontok

2.6. táblázat. Drót alakjának táblázata

Kikötésünk szerint a drót soha nem lehet egyszerre egyenes és görbe alakú. A következő táblázat tehát ellentmondást ábrázol t2 időpontban:

g		0	1	
e		1	1	
d	korábbi időpontok	t1	t2	későbbi időpontok

2.7. táblázat. Drót alakjának ellentmondásos táblázata

Táblázattal tehát képesek vagyunk ellentmondásos gondolatokat is megfogalmazni. Tőzsér szerint az azonosság elve ellentmond a változás lehetőségének, így valahol az első táblázatban is ellentmondás kellene, hogy legyen, de képtelen vagyok belátni, hogy hol van az ellentmondás?

A változás leírása formulákkal többféle szemlélettel

A táblázatban kifejezett elképzelt tényállásokat leírhatjuk formulákkal is. Legyen 'A' kétargumentumú függvény az 'alakja' jellemző kifejezője. Tehát az $A(d,t)$ kifejezés d tárgy alakját adja meg t időpontban. Következésképpen a drót változása endurantista szellemben így írható le formulákkal:

(3) $e = A(d,t_1)\&g \neq A(d,t_1)\&g = A(d,t_2)\&e \neq A(d,t_2)$

Ugyanez a gondolat kifejezhető relációkkal is többféle módon is. Bináris relációkkal pl. így: jelölje R_e reláció egy dolog egyenes alakját valamely időpontban, R_g relácó egy dolog görbe alakját valamely időpontban. Ekkor formulákkal kifejezve az alábbiakat kapjuk:

(4.1) $Re(d,t_1)\& \sim R_g(d,t_1)\&R_g(d,t_2)\& \sim R_e(d,t_2)$

Perdurantista felfogásban a drótot egy a drótpéldányokon értelmezett R_d reláció képviseli. Ez a reláció a drótpéldányokat az idő egy tartományába képezi le. Metafizikai álláspont kérdése hogy a tartomány szükségszerűen folyamatos-e. A drót létezik, ha van példánya valamely időpontban, de bármely időpontban csak egyetlen drótpéldány van. Ekkor perdurantista keretelméletben a korábbi gondolat egy lehetséges formalizálása így alakul, ahol E=egyenes, G= görbe:

(4.2) $(\forall x \forall y(\exists t(R_d(x,t)\&R_d(y,t)) \rightarrow x = y))\&(\forall x \forall t(R_d(x,t) \rightarrow (E(x) \bigtriangledown G(x))))\&(\forall x(R_d(x,t_1) \rightarrow E(x)))\&(\forall x(R_d(x,t_2) \rightarrow G(x)))$

Bármelyik időbeli drótpéldány (drót-idő-szelet példány) vagy egyenes vagy görbe, és ha valami a drót egy példánya t_1-kor akkor az egyenes ugyanakkor, és ha valami a drót egy példánya t_2-kor, akkor az görbe ugyanakkor. Figyeljük meg, hogy perdurantista felfogásban fölösleges relációként értelmezni az 'egyenes' és 'görbe' fizikai tulajdonságokat. (Ez az amit David Lewis fölismert) Ennek az az ára, hogy viszont a fizikai tárgyakat időben kiterjedve értelmezzük, és függvénnyel vagy bonyolultabb matematikai struktúrával ábrázoljuk. Itt tehát másként értendő két fizikai tárgy hasonlósága, egyformasága vagy azonossága. Amikor Tőzsér és más filozófusok ellentétet látnak a fizikai tárgyak két nagy elmélete között, akkor megfeledkeznek

erről.

Három argumentumú relációval egyszerűbb a helyzet:

(5) $R(e,d,t_1)\& \sim R(g,d,t_1)\&R(g,d,t_2)\& \sim R(e,d,t_2)$

Alapfeltevésünket, hogy a drót mindig vagy egyenes, vagy görbe így fogalmazhatjuk meg:
(6) $\forall t.R(e,d,t) \bigtriangledown R(g,d,t)$

Tőzsér érvét a formulák nyelvére lefordítva a változást a (3), (4) vagy (5) formulák, az azonosság elvét pedig az (1) és (2) formulák fejezik ki. A kettő együtt szerinte ellentmondásra vezet. Ha érvényes az érvelése, akkor a fenti (3), (4), (5) formulák bármelyike együtt az (1) (2) axiómákkal ellentmondásra vezet. Vajon miért, hol marad a bizonyítás?

Ideje rátérni arra, hogy mi téveszti meg, hol vezeti félre a természetes nyelv használata a filozófust. Leírhatjuk a példában szereplő elképzelt tényeket halmazok, tulajdonságok segítségével is, de vigyázat, nem mindegy hogyan! Helyesen ezt így tehetjük. Legyen $Het1$ a t_1 időpontban egyenes dolgok halmaza, $Het2$ a t_2 időpontban egyenes dolgok halmaza, $Hgt1$ a t_1 időpontban görbe dolgok halmaza, $Hgt2$ a t_2 időpontban görbe dolgok halmaza. A mi drótunk ezek körül eleme az elsőnek ($Het1$) és a negyediknek ($Hgt2$), nem eleme a középső kettőnek. Formulákkal így fest:

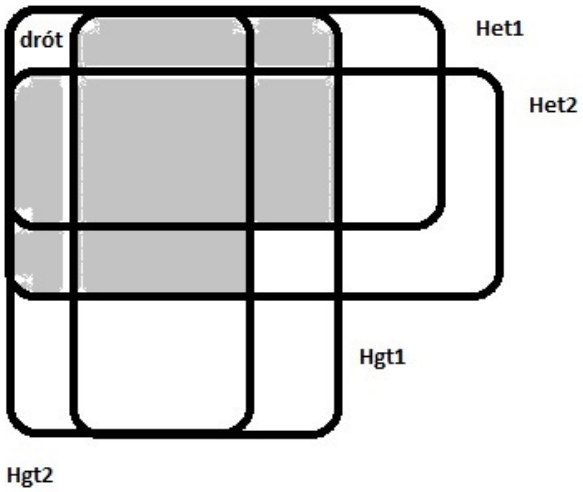
(7) $d \in Het1\&d \notin Het2\&d \in Hgt2\&d \notin Hgt1$

A változás ábrázolása Venn diagrammal

Ábrázolhatjuk ezt Venn-diagrammal is. (2.3. ábra)

Keresse meg az olvasó azt a tartományt, amelyik azt fejezi ki, hogy a drótot nem hajlították meg.

Hol a hiba Tőzsér problémakezelésében? Ott a hiba, hogy a drót változását nem lehet olyan módon ábrázolni, hogy egy halmaz a görbe, egy másik pedig az egyenes drótokat tartalmazza. Miért nem? Azért nem, mert a halmaz eleme reláció időtlen viszony. Ha valami eleme a görbe dolgok halmazának, akkor örökre az, tehát az a dolog örök időre görbe. Ha valami eleme az egyenes dolgok halmazának, akkor örökre az, tehát az a dolog örök időre egyenes. Feltevésünk szerint ugyanakkor semmi sem eleme egyszerre az egyenes és a görbe dolgok halmazának, a két halmaz metszetének. Következésképp a példabeli drót vagy



2.3. ábra. Venn diagrammal ábrázolva

az egyik, vagy a másik halmaz eleme. Nem meglepő tehát, hogy ebben a felfogásban a drót változása vagy kifejezhetetlen, vagy ellentmondásos, mert a drót mindkét halmaznak eleme, ami lehetetlen. A hétköznapi gondolkozás viszont hajlamos az igazságot, illetve a halmaz eleme relációt időben értelmezni, ami hiba. A drót örök időre eleme a t_1-időpontban-egyenes-dolgok halmazának, és örök időre nem eleme a t_1-időpontban-görbe-dolgok halmazának; a drót örök időre eleme a t_2-időpontban-görbe-dolgok halmazának, nem eleme a t_2-időpontban-egyenes dolgok halmazának.

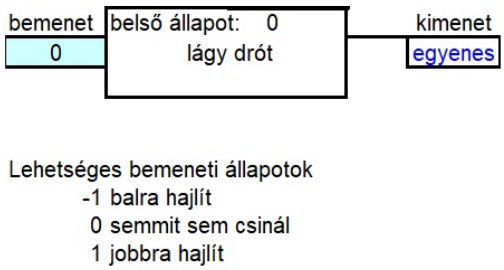
A változás ábrázolása véges automatákkal – bónusz megoldás

Ha egy lágy drótot meghajlítunk, akkor az görbe marad. Kis idő múlva kiegyenesíthetjük, majd újra elgörbíthetjük. A holt jelek statikus világából elindulva a kibertér dinamikus terébe, modelláljuk a drótot véges automatával! Ekkor az automata három belső állapotban lehet: balra görbült, egyenes, jobbra görbült. A drótot érő lehetséges hatások az automata bemenetei. Egy pillanatra balra görbíthetjük, vagy éppen jobbra, vagy hozzá se nyúlunk. Ha a drót balra volt görbítve és mi egy pillanatra jobbra görbítjük, akkor kiegyenesedik, ha viszont tovább hajlítjuk, akkor jobbra görbül. Hasonlóképpen történik, amikor a drót jobbra görbült. Ekkor is kiegyenesíthetjük rövid visszahajlítással, de vigyázzunk, mert elgörbíthetjük a másik irányba. A drót tehát attól függően reagál az őt ért hatásokra, hogy korábban egyenes volt vagy görbe. Ha görbe volt, akkor úgy maradhat, kiegyenesedhet, vagy elgörbülhet a másik irányba. Mindezt könnyedén szimulálhatjuk véges automatával.

A (Mealy féle) véges automaták alapgondolata egyszerű. (A technikai alkalmazásai bonyolultak, de arra nincsen szükségünk.) Az automata indulásakor már egy adott belső állapotban van. Ettől a belső állapottól függően az őt ért hatásokra kiad egy kimeneti jelet, más szóval, a belső állapottól függő kimeneti

állapotba kerül. Ezek után a gép a következő belső állapotba lép. Ebben a második belső állapotában fogadja az újabb hatásokat. Ennek során rendre jól meghatározott kimeneti állapotba kerül, és átvált a következő belső állapotba. Ez így folytatódik tovább, miközben múlik az idő. Két táblázat tömören összefoglalja az eddigieket. Az első függőleges oszlop a bemeneti állapotokat, a felső vízszintes sor pedig a belső állapotokat tartalmazza. Az első táblázat rögzíti, hogy a gép a következő időpillanatban milyen belső állapotba kerül. A második a bementi jelekre adott egyidejű kimeneti jelet (kimeneti állapotot) határozza meg.

A rugók modelljei:



2.4. ábra. Lágy drót

2.5. ábra. Rugó modell

Belső állapot átmeneti függvény:

δ belső állapot függvény			
Bemenet \ Belső állapot	-1	0	1
-1	-1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	1

2.8. táblázat. Lágy drót belső állapot átmenet

Kimeneti függvény:

Másképp viselkedik egy rugalmas acélrugó. Érdemes ezt is megvizsgálni és modellezni

Ha egy lágy rugót meghajlítunk, akkor az nem marad görbe. Ha elengedjük, kiegyenesedik. A holt jelek statikus világából elindulva a kibertér dinamikus terébe, modelláljuk a drótot véges automatával! Ekkor az automata három belső állapotban lehet: balra görbült, egyenes, jobbra görbült. A drótot érő

λ kimeneti függvény			
Belső állapot / Bemenet	-1	0	1
-1	görbe	görbe	egyenes
0	görbe	egyenes	görbe
1	egyenes	görbe	görbe

2.9. táblázat. Lágy drót kimeneti függvény

lehetséges hatások az automata bemenetei. Egy pillanatra balra görbíthetjük, vagy éppen jobbra, vagy hozzá se nyúlunk. A drót csak addig görbe, amíg jopbbra vagy balra görbítjük, ha nem nyúlunk hozzá, akkor egyenes. Ellentétben a lágy dróttal, a rugó tehát attól függetlenül reagál az őt ért hatásokra, hogy korábban egyenes volt vagy görbe.[20]

Az acél rugó viselkedését szimuláló automata működési táblázatai:

δ belső állapot függvény			
Belső állapot / bemenet	-1	0	1
-1	0	0	0
0	0	0	0
1	0	0	0

2.10. táblázat. Rugó belső állapot átmenet

λ kimeneti függvény			
Belső állapot / Bemenet	-1	0	1
-1	görbe	görbe	görbe
0	egyenes	egyenes	egyenes
1	görbe	görbe	görbe

2.11. táblázat. Rugó kimeneti függvény

A kibertéren az automata működik is: `http://ferenc.andrasek.hu/modellek/drot.xlsx`. Épp úgy változtatja állapotait az őt ért hatások függvényében, amiképp a drót elgörbül vagy kiegyenesedik. Szimulálható az is, hogy száz meghajlítás után a drót eltörik. Lehetne a görbülést több dimenzióban ábrázolni, esetleg finomabb felbontással. Ugyanakkor a modell nem magyarázza meg, hogy az egyik drót miért lágy, a másik meg miért rugalmas. Megtehetjük, hogy a rugalmas drót működését is szimuláljuk egy véges automatával, de a modell csak a „hogyan”-ra ad választ, a „miért”-re nem. Viszont metafizikai nézőpontból a kibernetikai modell egyfajta válasz arra a kérdésre, hogy mitől azonos a drót – a modell – önmagával, miközben változtatja az állapotát? Attól, hogy közben a működése – a modell – változatlan

[20] Az ilyen viselkedésű modelleket a kibernetikában ’nem tárolós’ átviteli tagnak, míg a lágy rugó modelljét, ’tárolós’ átviteli tagnak nevezik, mivel az utóbbi „emlékezik” az őt ért hatásokra, tárolja az őt ért hatásokat.

marad. Szemmel látható, hogy a modell éppúgy változtatja állapotát, mint a drót az alakját. Akkor pedig, ha a drót konzisztens alakváltozása leírása lehetetlen, akkor a modell ellentmondásmentes leírása is lehetetlen. Csakhogy a modell működése megfelel a leírásnak, így ha egyáltalán működik, akkor feltéve, hogy a világon nincsenek ellentmondásos dogok, a modell leírása sem lehet ellentmondásos. Ha ez így van, és a modell hűen szimulálja a drótot a vizsgált szempontból, akkor a drót változása sem lehet ellentmondásos.

Összefoglalás

. A természetes nyelv segédeszközök nélkül kevéssé alkalmas eszköz az olyan alapvető metafizikai problémák elemzésére, mint amilyen a fizikai tárgyak időbeli változékonysága. A logika szabatos nyelvezete alkalmas segédeszköz gyanánt. A logikában az igazságértékek nem változnak az időben, a halmaz eleme reláció időtlen reláció. Ha változással kapcsolatos gondolatokat akarunk kifejezni, akkor erre tekintettel kell lenni. Amennyiben ebben igazam van, akkor az általam vitatott argumentum a változás ellen nem ingatja meg a fizikai tárgyak változékonyságába vetett metafizikai hitünket. Ebből nem következik, hogy más filozófiai gubancok sem. Nincs más megoldás, mind szorgalmasan, egyenként górcső alá venni ezeket a kérdéseket, lépésről lépésre haladni. Hitem szerint az ilyen filozófiai vizsgálódások hozzáadnak valamit a fizikusok világmagyarázataihoz.

2.4. Különvélemény az esetleges azonosságról

Bevezetés

Nemesi Nikoletta „Kritikai megjegyzések Harold W. Noonan kontingens azonosságról alkotott koncepciójáról” c. írása [23] továbbgondolásra érdemes, fontos kérdéseket vet fel. (Lásd:[24];[23]) Részben kiegészíteni, kis részben vitatkozni kívánok megközelítésének egyes pontjaival, saját megfontolásaimon kívül Gareth Evans, David Lewis és Wolfgang Schwarz írásait fölhasználva. Nemesi cikkének kétségtelen előnye a formális logikai apparátus használata, amelyet én is alkalmazni fogok, viszont igyekszem egy-egy levezetést nála részletesebben bemutatni. Az azonossággal kapcsolatban, az extenzionális logika érvényességi területén belül, a klasszikus logika standard értelmezését tekintem iránymutatónak, ahogy ezek Ruzsa Imre vagy Willard Van Orman Quine könyveiben ismertetésre kerültek, ugyanakkor a probléma, amiről szó lesz, túlmutat az extenzionális logikán, a modális logika területére tartozik.[21]

Az alapkérdés a következő: vajon lehet-e esetlegesen igaz egy azonossági állítás, amelyik két individuum azonosságát állítja, avagy minden ilyen állítás szükségszerűen igaz vagy szükségszerűen hamis? A kérdés filozófikusabb nyelven jobban érthető. Vajon a világ éles határvonalú fizikai tárgyakat tartalmaz, vagy némelyik (esetleg minden) fizikai tárgy bizonytalan határvonalú és elmosódottak a határai? Ha így van, akkor ez a világ tulajdonsága, vagy az emberi nyelv, a logika ilyen? (Lehetne más?)

Az analitikus filozófusok többsége elfogadja ezzel kapcsolatban Kripke elemzéseit, és érvelésükben gyakran támaszkodnak a kvantifikált modális logikára. Magam ezekben a kérdésekben kisebbségi álláspontot képviselek. Erős fenntartásaim vannak a szükségszerűség kvantifikált modális logikára alapozott értelmezésével, a „lehetséges világ” filozófiai-metafizikai fogalmát is elhibázottnak, félrevezetőnek tartom. Szerintem a „világ” józan ész szerinti fogalma magába foglalja, hogy csak az van, csak az létezik, ami a világon van, nem létezik semmi a világon kívül, értelmetlenség a világgal bármiféle értelemben párhuzamosan létező másfajta, „lehetséges világ” föltételezése. Ami szerintem létezik, az a világon belül a lehetséges körülmények, vagy lehetséges helyzetek sokasága. Erre mondhatja valaki, hogy éppen ez a lehetséges világ, szerintem viszont a népszerű szóhasználat ennél többen sejtet. De nem ez a lényeg. A lényeg az, hogy a modern modális logika a „szükségszerűség” és „lehetőség” fogalmát operátorként értelmezi és nem metanyelvi predikátumként.[22] Ezen kívül megengedi a kvantorok használatát a modális

[21] Quine fenntartásait a modális logikával kapcsolatban részletesen tárgyalja, filozófia-történeti kontextusban, Tuboly Ádám Tamás: Advocatus diaboli – Quine és a modális logika [33]

[22] Operátorként használva van értelme ilyeneket mondani: „Szükségszerű, hogy lehetséges, hogy szükségszerű, hogy szükségszerű hogy a világon vannak természeti törvények.” Predikátumként fölfogva mindez jóval komplikáltabban, több metanyelvi szintet és egyéb előfeltevést alkalmazva fejezhető csak ki, ha ugyan kifejezhető. Az operátoros használat meglehetősen tág teret nyit a filozófiai spekulációknak, amit én ellenzek, hibának tartok.

operátorok hatókörén belül. Álláspontom szerint ez is vitatható, egyetértek Quine ezzel kapcsolatos egykori kritikájával, még akkor is, ha Quine maga részben revideálta álláspontját. A szükségszerűség fogalmát csak mint egy keretelméletre vonatkoztatott metanyelvi predikátumot tudom elfogadni, hasonlóan ahogy Carnap fogta föl. Mindezt csak bevezetésnek szántam, nem fogok kitérni a saját „szükségszerűség" értelmezésem pontos bemutatására, csak világossá szeretném tenni, hogy milyen alapról, milyen kiindulási pozícióból gondolkozom.

Lambda absztrakció

Először egészen röviden bemutatom a lambda-absztrakció fogalmát, melyet én is használni fogok. A klasszikus logikában azt, hogy valaki sakkozó diák, csak úgy tudjuk kifejezni, hogy diák(x)&sakkozó(x). Jelöljük Bori-t 'a' individuum névvel a klasszikus logika formális nyelvén. Ekkor ezt kapjuk: diák(a)&sakkozó(a). A lambda-absztrakciót fölhasználva viszont összevonhatjuk a két fogalmat ilyen módon: sakkozó diák $:=$ λx(diák(x)&$sakkozó(x)$). Ennek alapján, az, hogy Bori sakkozó diák, így fejezhető ki formális nyelven: λx(diák(x)&sakkozó$(x))(a)$. Mivel jelölésünk szerint $a =$ Bori, így is írhatjuk:
Bori-sakkozó diák $= \lambda x$(diák(x)&sakkozó$(x))$(Bori). A továbbiakban támaszkodni fogok a lambda-absztrakció fogalmára.[23]

Érvek az azonosság szükségszerűsége mellett

Az analitikus filozófusok nagy része elfogadja az individuumok szükségszerű azonosságának következő indoklását, amely természetes nyelven így szól: „Ha a azonos b-vel, akkor az önazonosság szükségszerűsége ($\Box a = a$), valamint Leibniz törvénye folytán a szükségszerűen azonos b-vel. Vagyis a tárgyak azonossága nem lehet kontingens – más szavakkal, a „de re" azonossági állítások nem lehetnek esetlegesen igazak."[24] Ez az érvelés megítélésem szerint elhamarkodott. Wolfgang Schwarz írta egyik blog-bejegyzésében az alábbiakat:[25]

> Cikkekben vagy egyetemi kurzusokon gyakran találkozom az azonosság szükségszerűségének alábbi, Kripkének tulajdonított megfogalmazásával: Az érv nem jó, azt gondolom, hogy kétséges, hogy Kripke valaha is elfogadta volna ilyen formában. A kisebb gond, hogy az érv (2) premisszája általában véve hamis, hiszen a dolgok nem léteznek szükségszerűen. Ez a hiba könnyen elhárítható (2) és (3) állítások olyan feltétellel való kiegészítésével,

[23] Részletesebben Ruzsa Imre: Bevezetés a modern logikába 78. o.[13]
[24] Nemesi Nikoletta i.m.
[25] Wolfgang Schwarz egyik blog-bejegyzésének írta (Posted on Wednesday, 09. Aug. 2006.) `http://www.umsu.de/wo/archive/2006/08/09/Kripke_s__Alleged__Argument_for_the_Necessity_of_Identity_Statements`.

(1)	$a = b$	(feltevés)
(2)	$\Box a = a$	(axióma-séma)
(3)	$\Box a = b$	(1) (2) a Leibniz törvény – az azonosak megkülönböztethetetlensége – alapján

2.12. táblázat. A szükségszerűség téves levezetése

hogy $\exists x(x = a)$. A fő gond az első két premissza alapján (3)-ra való következtetés, mint a Leibniz törvény alkalmazása. Ez a lépés nem nyilvánvaló: világosan látszik a tévedés, ha a mondat-operátort „közismert dolog, hogy ...” vagy „Frici azt mondta ...” kifejezésekként fordítjuk. A Leibniz törvény alkalmazása csak akkor érvényes, ha a „$\Box \ldots = \ldots$” funktor extenzionális környezetben fordul elő. Amit az extenzionális környezet jelent az az, hogy a behelyettesítés egyazon referenciájú terminusokkal megőrzi az igazságértéket. Tehát az a kérdés, hogy vajon a „$\Box \ldots = \ldots$”, és nemkülönben a „közismert dolog, hogy ...” kifejezések extenzionális kontextusban szerepelnek-e, ahogy az érv előfeltételezi. Ez nyilvánvalóan némi alátámasztást, indoklást igényelne, mivel a „$\Box \ldots$” kifejezés gyakran mint a nem-extenzionális kontextus paradigmája szerepel. Szükségszerű, hogy az Esti-csillag=Esti-csillag, de az már korántsem, hogy az Esti csillag = a legfényesebb égitest az esti égbolton. Az ilyen esetek talán jól magyarázhatóak a hatókörök megkülönböztetésével, de a „$\Box \ldots = \ldots$” kifejezés extenzionálisnak való tekintése legalábbis vitatható feltevés. És a fenti érv nem tartalmazza semmiféle alátámasztását ennek a feltevésnek. Ehelyett, a feltevés többé-kevésbé annak a konklúziónak a része, amit az érv alá kíván támasztani. Bárki, aki kételkedik abban, hogy ha $a = b$, akkor $\Box a = b$ (vagy jobban mondva, $\Box(\exists x(x = a) \rightarrow a = b)$), az bizonyosan kételkedni fog abban is, hogy a „$\Box \ldots = \ldots$” kifejezés extenzionális. Tehát Kripke állítólagos érve felettébb gyanús, önigazoló feltevésen alapul.

Wolfgang Schwarz nagyon helyesen hívja föl a figyelmet arra, hogy az azonosak megkülönböztethetetlenségi elve a klasszikus extenzionális logikában axióma-séma, ami kormányozza az azonosság – mint logikai konnektívum – használatát. [26] Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy intenzionális logikában, mint amilyen a modális logika, minden korlátozás nélkül érvényes a használata. Azért, hogy pontosabban lássuk, hogy ez a kifogás mennyire indokolt, tekintsük át formális nyelven az érv részletesebb megfogalmazását.[27] (8) két féle módon is érthető:

de dicto azonosság: $a = b \rightarrow \Box \lambda x \lambda y.x = y(ab)$

de re azonosság: $a = b \rightarrow \lambda x \lambda y.\Box x = y(ab)$

[26] Ruzsa Imre hangsúlyozta, hogy az azonosságot a klasszikus logikában tilos interpretálni.
[27] Több ponton módosítva fölhasználtam Wolfgang Schwarz levezetését [31]

(1)	$\forall x.x = x$	Axióma az extenzionális logikában.
(2)	$\Box\forall x.x = x$	(1) alapján, mivel minden axióma szükségszerű igazság.
(3)	$\forall x.\Box x = x$	(2) alapján, de problematikus lépés: de dicto állításból de re formára.
(4)	$x = y \rightarrow (\lambda z.Fz(x) \rightarrow \lambda z.Fz(y))$	Ez a jól ismert axióma-séma, az azonosak megkülönböztethetetlensége fölírása lambda-absztrakció segítségével.
(5)	$\lambda z.Fz := \lambda z.\Box a = z$	Ez egy definíció, de gyanús, vitatható lépés, mert a modális operátor hatóköre mögé absztrahálunk. Ez egy de re használata a $\Box$ operátornak, amivel szemben nekem fenntartásaim vannak.
(6)	$x = y \rightarrow (\lambda z.\Box a = z(x) \rightarrow \lambda z.\Box a = z(y))$	(4)(5) alapján. Ez vitatott lépés, mivel a behelyettesített predikátum nem extenzionális.
(7)	$a = b \rightarrow (\Box a = a \rightarrow \Box a = b)$	(6) alapján $x = a, y = b$. [28]
(8)	$a = b \rightarrow \Box a = b$	(7) (3)

2.13. táblázat. A szükségszerű azonosság levezetése

W. Schwarz szerint, amíg a de dicto értelmezés kétséges, a de re olvasat érvényes. Elmondom más felfogásban is, ahogyan – egyetértve Wolfgang Schwarzzal – jobban alátámasztott az érv.[29] Kripke szerint nyelvünk bizonyos kifejezései merev jelölők a szónak abban az értelmében, hogy minden lehetséges helyzetben, minden körülmények között ugyanazt jelölik. Ilyenek pl. a logikai grammatika nézőpontjából a logikai tulajdon nevek, pl. Julius Caesar, Atlantisz, a víz (mint anyagnév), de bizonyos leírások is merev jelölők, pl. a legkisebb páratlan prímszám, vagy némelyik függvényt tartalmazó kifejezés pl. $\cos(0)$. Nem merev jelölő a bolygók száma vagy a lábosban lévő víz hőmérséklete, a relativitáselmélet megalkotója (feltéve, hogy más is fölfedezhette volna). Abban szerintem igaza van Kripkének, hogy ha két merev jelölő azonos, akkor az szükségszerűen azonos. Ez nyilvánvalóan következik a merev jelölő fogalmából. A baj ott van, hogy a „merev jelölő” fogalom nem logikai-grammatikai fogalom, nem a nyelv logikai szerkezete dönt abban a kérdésben, hogy a leírás rigid-e vagy sem, hanem a kifejezés jelentése. Addig rendben van, hogy a logikai tulajdonnevek merev jelölők, de mi van azon túl? Azon túl mi dönt? A jelentés. Ez pedig összeegyeztethetetlen a logikai következtetés alapeszméjével, amelyik csak a logikai formára van tekintettel,

[29] Wolfgang Schwarz írja ugyanott a blogjában: »Kripke says that this argument ”has been stated many times in recent philosophy”(p.136), and especially mentions David Wiggins. He then goes on to defend the conclusion and to argue at length that even instances of (6) $a = b \rightarrow \Box a = b$, with a and b proper names, are true. Interestingly, his argument for that is not that (4) follows from (3), which he has already defended, by universal instantiation. I'm not quite sure why. Maybe he (rightly!) thought that universal instantiation is very problematic in modal logic. (At every world, $\forall x x = x$, but not at every world, $a = a$, unless a necessarily exists. So either what logically follows from a necessary truth is sometimes not itself a necessary truth, or universal instantiation fails.) Or maybe he (again, rightly) thought that since the argument for (3) presupposes the extensionality of ”$\Box$(... = ...)”, he'd need an independent argument to show that substitution of co-refering names cannot change the truth value in such a context. Kripke's argument for (4) is on p.154: *** First, recall the remark that I made that proper names seem to be rigid designators, as when we use the name 'Nixon' to talk about a certain man, even in counterfactual situations. [...] If names are rigid designators, then there can be no question about identities being necessary, because 'a' and 'b' will be rigid designators of a certain man or thing x. Then even in every possible world, 'a' and 'b' will both refer to this same object x [...]. *** More formally, Kripke's argument why identity statements between proper names are necessary goes like this: 1) Proper names are rigid designators; 2) rigid designators denote the same thing at every possible world; 3) if 'a' and 'b' denote the same thing at every possible world, then $\Box a = b$; 4) for any proper names 'a', 'b', if $a = b$, then $\Box a = b$ (from (1), (2), (3)). Leibniz' Law doesn't figure in this argument at all. Unlike the original argument, this one is also not entirely suspicious and question-begging: Kripke has made a strong case that names are indeed in some sense rigid, and (2) and (3) are the most straightforward way to analyze rigidity. I prefer the counterpart analysis on which either (2) or (3) or both come out false (depending how they are interpreted). But at least this is something that can be properly called an argument.«

a jelentés szempontjából közömbös. Márpedig a következtetés adja a logika lényegét. Spongyát rá, menjünk tovább.

Érvek az azonosság szükségszerűsége ellen

»E tézis egyik legismertebb feltételezett ellenpéldája Gibbardtól származik: tegyük fel, hogy a „Góliát" terminus egy adott szobrot jelöl, „$\text{Agyag}_{\text{Góliát}}$" pedig azt az agyagdarabot, ami Góliátot alkotja. Képzeljük el mármost, hogy Góliát és $\text{Agyag}_{\text{Góliát}}$ koincidálnak téridőbeli kiterjedésükben. Emiatt hajlamosak lehetünk arra a feltételezésre, hogy Góliát és $\text{Agyag}_{\text{Góliát}}$ azonosak. Úgy tűnik azonban, hogy vannak modális predikátumok, melyek igazak ugyan $\text{Agyag}_{\text{Góliát}}$ esetében, ám hamisak Góliát esetében. $\text{Agyag}_{\text{Góliát}}$-ot például golyóvá préselhették volna, és fennmaradt volna, míg ugyanez nem áll Góliátra. Ám ha $\text{Agyag}_{\text{Góliát}}$-ot golyóvá préselték volna, akkor nem lehetett volna azonos Góliáttal, hiszen az utóbbi ekkor nem létezett volna. Ennek fényében hajlamosak lehetünk kontingens azonosságot feltételezni: azt, hogy bár Góliát és $\text{Agyag}_{\text{Góliát}}$ azonosak, lehetnének nem azonosak.«Nemesi részletesen elemzi azt a feltevést, hogy a szobor azonos az őt alkotó anyaggal. Nekem erről más a véleményem.

Egy agyagdarabot azonosít a benne lévő anyag fajtája és mennyisége, valamint az anyagdarabot alkotó részecskék önazonossága. Egy agyagdarabnak kontingens tulajdonsága hogy hol van, kinek a tulajdona, mekkora hőmérséklete vagy az alakja. Valóban, egy agyagdarabnak kontingens tulajdonsága, hogy az alakja t_1 időpontban nyúl vagy éppen kacsa, az viszont egyáltalán nem kontingens tulajdonsága, hogy van valamiféle formája. Ezek után a probléma a következő.

Úgy tűnik, egy agyag darab véletlen tulajdonsága hogy nyúl formájú, miközben egy nyúl formájú agyag szobornak nem véletlen, hanem szükségszerű tulajdonsága, hogy nyúl formájú. A kettő adott időpillanatban azonos lehet, egybe eshet. Hogyan lehetséges ez?

Látunk egy agyagból álló valamit, nem tudjuk pontosan mit. Ha az szobor, akkor megsemmisül ha összenyomjuk, mivel szükségszerű tulajdonsága a formája, jelen esetben a nyúl forma. A másik esetben, amikor csak egy agyagdarabbal van dolgunk, akkor az összenyomással nem semmisül meg az agyag darab, hiszen lényegtelen a formája. Elmondom másképp is, hogy jobban érthető legyen.

Meglátogatjuk szobrász barátunkat a műtermében. Barátunk modern szobrász, gyakran nonfiguratív alkotásokat hoz létre. Látunk egy agyag valamit a munkaasztalán. Honnan tudjuk, hogy az csak nyersanyag, egy agyag darab, vagy már egy kész, megformázott szobor? A válaszhoz el kell végezzük a következő kísérletet. Nyomjuk össze a munkaasztalon lévő agyagdarabot. Ha ezek után haragos üvöltözés a reakció, akkor szoborral volt dolgunk, ha megköszönik, hogy puhítottuk, gyúrtuk az agyagot, akkor alapanyaggal

volt dolgunk. Önmagában nem eldönthető a kérdés. Ez a válasz az eredeti filozófiai problémára is.

Mind az agyagdarabhoz, mind a szoborhoz, hozzátartoznak a modális vagy tényellentétes (kontrafaktuális) tulajdonságai. Ha összegyúrnám, akkor megsemmisülne, ergo ez egy szobor; ha összegyúrnám, akkor nem semmisülne meg, ergo ez csak agyag csomó, csak egy alapanyag. Ha egy adott időpillanatban egybeesik egy szobor és egy alapanyag a pillanatnyi kontingens formájával, akkor abban a pillanatban eldönthetetlen, hogy mivel azonos amit látunk, szoborral vagy agyaghalmazzal. Elmondom félig formalizált nyelven is remélhetőleg az olvasó segítségére.

Legyen 'a' egy agyaghalmaz, agyaggombóc, azaz alapanyag, míg 'b' ebből az agyagból megformázott nyúl szobor. A modális operátorok helyett idő paramétereket veszek figyelembe a logikai bonyodalmak elkerülése végett. Mivel b egy nyúl szobor, neki a formája szükségszerűen nyúl forma, amit jelen esetben így fejezek ki:

nyúl szobor Minden t időpontra és x dologra, ha $x = b$, és x-nek van formája t időpontban, akkor x-formája-t-kor=nyúl-forma.

nyúl szobor formula $\forall t \forall x((x = b \& \exists y.y = x - \text{formája} - t - \text{kor}) \rightarrow$(nyúl-forma=$x$-formája-$t$-kor))

Ami azonban igaz az agyag szoborra, nem érvényes az alapanyagra, azaz a-ra:

alapanyag Van olyan t_1 időpont, hogy a-formája-t_1-kor=nyúl-forma, és van olyan t_2 időpont, melyre van olyan x, hogy a-fomrája-t_2-kor=x és x nem nyúl-forma.

alapanyag formula $\exists t_1$(nyúl-forma=a-formája-t_1-kor)$\& \exists t_2 \exists x(x = a$-formája-$t_1$-kor $\& x \neq$ nyúl-forma)

Tehát abból, hogy x valamely időpontban nyúl formájú, nem következik, hogy $x = b$ azaz x egy szobor. Ennek eldöntéséhez nem tudunk eleget, tudunk kéne modális vagy kontrafaktuális tulajdonságokat is, mert ezek részei az azonosítási kritériumoknak. Ezért a korábbi Gibbardtól származó ellenérv téves, semmit sem bizonyít, ami helyessége esetén belőle következne. Rövid kitérő következik.

Felmerül itt egy érdekes kérdés. Mindenekelőtt szögezzük le, fontos megkülönböztetni három fajta dolgot: az agyagot, amiből a szobrokat készítjük, magukat a konkrét szobrokat, és a szobrok formáját. Előttem van egy agyaggombóc, amit három egyforma részre osztva, belőlük három tökéletesen egyforma agyag-nyulat formázok. Van tehát a.) három konkrét agyag-nyulam; b.) van egyetlen nyúl-formám, bár az egyetlen nyúl-forma három példányban is megjelenik, miképpen a betűk a betű-példányok formájában; c.) van egyetlen anyagfajtám, az agyag, amelyik ugyanaz mind a három konkrét nyúlban, bár a három formát alkotó anyagi részecskék különbözőek, és térbeli helyük is más. Az egyformaságon túl az is érvényes, hogy az őket alkotó anyag, mint anyagfajta, mindhárom esetben azonos. A konkrét agyag-nyulak időben léteznek, és

azért nem azonosak egymással, mert más a térbeli helyük, és bár azonos anyagfajtából, de más-más egyedi agyag-részecskékből állnak. Ilyen módon mindegyik az időben kiterjedve azonos önmagával. Tegyük föl azonban, hogy az 'a' jelű nyulat t_1 időpontban alkottam meg, de t_2 időpontban összenyomtam és egy 'b' jelű kacsát formáztam abból az anyagból, amiből a nyúl volt. Majd t_3 időpontban a kacsát nyomtam össze, és újra megformáztam az eredetivel tökéletesen egyforma (azonos formájú és anyagú) nyulat, amit 'c'-vel jelölök. Nyilvánvaló, hogy $a \neq b$ és $c \neq b$, mivel eltérő a formájuk bár egyazon anyagból vannak. Viszont nyitott kérdés, hogy vajon $a = c$ vagy sem? Erre nem ad választ a józan ész. Ha nem ragaszkodunk a fizikai tárgyak, így az agyag nyulak időben folyamatos létezéséhez – és miért ragaszkodnánk – akkor talán állíthatjuk, hogy $a = c$. Ekkor viszont a következő kérdések merülnek fel.

Ha $a = c$, akkor vajon c létezett-e t_2 előtt is, és vajon a létezett-e t_3 után is? Nyilván nem: a-ra igaz, hogy létezett t_2 előtt, ami viszont nem igaz c-re; c-re igaz, hogy létezik t_3 után is, ami viszont nem igaz a-ra. Tehát a-nak és c-nek eltérő tulajdonságaik vannak, így nem lehetnek azonosak. Ha az a véleményünk, hogy nincsenek reinkarnált agyag-nyulak, mert létezésük folyamatos kell legyen, akkor azt kell mondjuk, hogy $a \neq c$. Csakhogy mindkét (a és c) konkrét agyag mintázat egyazon anyagból van, azonos a formája, helye, mindössze az időbeli létük eltérő. Akkor miért nem azonosak? Képzeljük el, hogy nem formázunk az agyagból kacsát. Ebben az esetben az agyag nyúl végig, folyamatosan létezik, t_2 és t_3 a folyamatos létezés egy pillanata. Ekkor fel sem vetődik, hogy a korábbi nyúl ne lenne azonos a későbbivel, mert nincs korábbi és nincs későbbi nyúl, csak egy az időben kiterjedten létező nyúl van. Az időbeli eltérés tehát nem lehet érv a és c azonossága ellen, hiszen mind a mind c maga is időben kiterjedten létezik/létezett, azaz számtalan kicsi időbeli szelet együttese. Ha azok együtt jelenthetik a-t és c-t, akkor a és c miért nem jelenthet egyazon fizikai tárgyat?

A megoldás a következő a reinkarnálódott nyúl esetén: $a \neq c$. A nyulat d jelöli, amelyik különbözik mindkettőtől. Tudni való, hogy t_1 időpontban keletkezett d, nyúl-formát vett föl agyag-anyagból a térnek egy adott részén, viszont t_2 időpontban megsemmisült, attól kezdve nem volt sem formája, sem anyaga, sem helye. Ez a sajnálatos helyzet egészen t_3 időpontig tartott, amikor eredeti anyagában, eredeti formájában föltámadt egyazon helyen ahol korábban is volt.

Természetesen próbálkozhatunk azzal a megoldással is, hogy agyag szobrok egyáltalán nem léteznek, csak az agyagot alkotó parányi részecskék. Félő azonban, hogy ekkor a probléma újra fogalmazható, csak jóval kisebb méretekben. Lépjünk tovább. Kitérő vége.

Nemesi cikkében szerepel egy Noonan-tól és Curtis-tól származó levezetés a kontingens azonosság lehetőségét cáfolandó, amit ők maguk igyekeznek cáfolni. Levezetésüket érdemes átgondolni, mert tanulságos. Föl szeretném fedni a levezetés vitatható pontjait, ezért némileg átírtam, részleteztem, hogy jobban érthető legyen.

A csillag azt jelenti a levezetés bal oldalán, hogy új premissza jelenik meg. Figyeljük meg, hogy (4) esetében egy második premisszával van dolgunk, nevezetesen annak a feltevésével, hogy nem esetleges, hogy valami azonos legyen önmagával. Ez nyilvánvalónak tűnik ugyan, ennek ellenére ki kell mondani, szerepelnie kell a levezetésben. C mondat-operátor, jelentése: Cp:=esetleges, hogy p. (Nemesi a 'kontingens' szót használja, de ez nem lényeges eltérés.) Két premisszánk volt és több vitatható lépésünk. Ezért nem kell feltétlen

*(1)	$C(a = b)$	A formula azt jelenti, hogy a és b esetlegesen azonos.
*(2)	$C\lambda x(x = a)b$	(1) alapján. A lambda absztrakció alkalmazása.
*(3)	$\lambda x[C(x = a)]b$	(2) alapján. Keveri a de dicto és de re használatot. A lambda operátor a C mondat-operátor hatókörén belülre vonatkozik. Számomra ez gyanús lépés.
**(4)	$\sim C(a = a)$	A formula szeint 'a' nem esetlegesen azonos önmagával. Egy egy új premissza, ezt mutatja az új csillag.
**(5)	$\sim C\lambda x(x = a)a$	(4) A lambda absztrakció alkalmazása.
**(6)	$\sim \lambda x[C(x = a)]a$	(5) Ismét keveri a de dicto és de re használatot.
**(7)	$\sim (a = b)$	(3)(6) Az azonosak megkülönböztethetetlenségének Leibnizi törvénye alapján. Ha Fa és $\sim Fb$ akkor $\sim (a = b)$.

2.14. táblázat. Noonan esetleges azonosság cáfolata

az abelardi predikátumok alkalmazásához folyamodnunk, hogy elkerüljük a kellemetlen (7) konklúziót.[30] Hivatkozhatunk a következtetés vitatható lépéseire vagy megkérdőjelezhetjük (4)-et a következőképpen: (8)

$\sim C(a = a) \rightarrow (C(a = b) \rightarrow \sim (a = b))$ (1) (4) (7)

Szavakban: ha nem esetleges, hogy valami önmagával azonos, akkor, ha esetleges, hogy két dolog azonos, akkor az a két dolog nem azonos. Ha azonban beletörődünk, hogy az esetleges azonosság fogalmával együtt jár az önazonosság esetlegessége is, akkor a (7) következmény elesik.

Nemesi megjegyzi, hogy a fenti levezetés valójában csak sajátos interpretációja Gareth Evans: Can there be a vague objects? c. rövid, de nagy hatású írásának. Idézzük fel ezt az érdekes írást. Evans azzal indít, hogy több filozófus is fölvetette, világunk dolgai talán bizonytalan, elmosódott határvonalúak; talán a világ maga természete folytán homályos határvonalú dolgokból áll, és ezért a mi éles határvonalakat megkívánó logikánk, az ezen alapuló gondolkodásunk alkalmatlan adekvát leírására. Tegyük hozzá azt, ami

[30] Az abelardi predikátumok érvényességi körét befolyásolja az a tárgyi-nyelvi kontextus, ahol alkalmazásra kerülnek. Noonan írja idézett cikkében: "...predicates whose reference is affected by the subject term to which they are attached. This category of predicates is important enough, I think, to deserve a short name. I suggest 'Abelardian predicate' in honour of Peter Abelard"

nem szerepel az eredeti problémafelvetésben, hogy talán a világ nem is írható le ellentmondásmentesen, talán el kellene fogadnunk, hogy némely ellentmondás igaz. Vannak olyan filozófusok, akik ez utóbbi nézetet is pártolják. Evans nem megy el eddig, ragaszkodik az ellentmondásmentesség követelményéhez, és azt feszegeti, hogy lehet-e egyáltalán a bizonytalan határvonalú dolgokból álló világ filozófiai álláspontját ellentmondásmentesen képviselni? Az általa adott levezetés úgy tűnik, azt bizonyítja, hogy nem lehet, mert a bizonytalan, homályos azonosság fogalma inkoherens.

Tekintsük Evans levezetését kicsit átalakítva, de a lényeget nem érintve. [4] (Evans circumflexes változókat használ, amelyen manapság inkább egy predikátum terjedelmét értjük, és nem a lambda-absztrakciót, ezért ezt kijavítottam.) Csillaggal jelöltem minden premisszát, feltevést. A '$\triangledown$' mondat-operátor jelentése: 'meghatározatlan', 'homályos'. Tehát $\triangledown(a = b)$ azt jelenti, hogy a és b nem pontosan azonos, hanem csak homályosan, bizonytalanul. Amennyiben tagadni kívánjuk az (5) konklúziót, de a következetés lépéseit

*(1)	$\triangledown(a = b)$	
*(2)	$\lambda x.\triangledown x = a(b)$	(1) Evans szerint ez következik az előző sorból, mivel b azon tulajdonságát fejezi ki, hogy homályosan azonos a-val. Tehát szerinte: a homályosan azonos b-vel $\Leftrightarrow$ a-nak van olyan tulajdonsága, hogy homályosan azonos b-vel.
**(3)	$\sim \triangledown(a = a)$	Felteszi, hogy az önazonosság nem meghatározatlan. Valóban nyilvánvaló igazság ez?
**(4)	$\lambda x.\triangledown x = a(a)$	(3) Lambda–absztrakció.
**(5)	$\sim (a = b)$	(2)(4) Leibniz elv.

2.15. táblázat. Evans cáfolata

helyesnek tartjuk, akkor elvethetjük a második premisszát (3) is, mivel:

(6) ha $\sim \triangledown(a = a)$, akkor ha $\triangledown(a = b)$ akkor $\sim (a = b)$ (1)(3)(5)

Szavakban: ha nem igaz, hogy valami homályosan azonos önmagával, akkor ha az egyik homályosan azonos a másikkal, akkor a kettő nem azonos. Ezért amennyiben elfogadjuk, hogy a homályos azonosság az önazonosságra is vonatkozik, akkor a (5) konklúzió elesik.

Evans végül megemlíti a levezetés továbbfejlesztésének lehetőségét az $S5$ modális logikához hasonló irányba. Ha a '$\triangledown$' jelet fölcseréljük 'C' vel, akkor megkapjuk a korábbi levezetést a kontingens azonosságról. Ezért mindkét gondolatmenet egyazon erényeket és hibákat hordozza. A következőkben bemutatott kritikai megjegyzések tehát nem csak Evans cikkére érvényesek, hanem mutatis mutandis Noonanéra is.

Davis Lewis éles, már-már goromba hangnemben támadja Evans levezetését.[31] Szerinte Evans anélkül használja a formális logikai apparátust, hogy pontosan átlátná mit is tesz valójában. Lewis szerint egyszerűen nyilvánvaló tény, hogy vannak homályos azonossági állítások. Az ő példája: Princeton = Princeton Borough, mivel nem világos, hogy hol vannak a város határai. (Hazai példával nem tudok szolgálni.) Ha

[31] David Lewis: Vague identity: Evans misunderstood [20]. Mind Evans, mind Lewis cikke megtalálható Tim Crane – Katalin Farkas: Metaphysics antológiájában [39] p. 209-212

ez így van, akkor Evans konklúziója hamis, minthogy ő tagadja a bizonytalan azonosságok lehetőségét. Tegyük hozzá, tévedésének vagy az az oka, hogy Evans valamelyik kiinduló állítása hamis, vagy hibásan következtet, vagy mindkettő. Lewis írása végen egy elegáns fordulattal oda jut, hogy Evans is nagyon jól tudja, hogy vannak homályos azonossági állítások. Jóindulatúan azt feltételezi, hogy Evans a bizonyítást épp azért mutatja be, hogy az olvasót rádöbbentse, hogy nem lehet jó a bizonyítás, mivel hamis konklúzióra jut. Lewis ezt meglepő módon Evans egyik magánlevelével kívánja igazolni. Én viszont úgy gondolom, bármit is mondjon magánlevelében a szerző, bármit is tulajdonít neki vitapartnere, a levezetés annak bizonyítási kísérlete, hogy a világ nem állhat homályos határvonalú dolgokból.

Lewis szerint a bizonyítás semmit sem mondhat a világ dolgairól, legfeljebb egy homályos-logika lehetőségéről, ami a világról való beszéd szintje, nem pedig a tárgya. Érdekes metafizikai kérdés ezek után, hogy a logika sajátosságai – mint az ellentmondásmentesség, a fogalmi élesség – vajon mennyiben a világ sajátosságai?

Lewis szerint Evans levezetése is rossz, mert kétszer is használ egy hibás logikai ekvivalenciát: téves az (1) –ről (2)-re és a (3)-ról (4)-ra való következtetés. Szerinte vitapartnere mindkét esetben hibásan azonosít két merőben különböző logikai formát:

(1) Bizonytalan, homályos az, hogy ... az ..., formális nyelven $\triangledown(\ldots = \ldots)$,

(2) a dolog olyan tulajdonságú, hogy bizonytalan, homályos, hogy ... az ..., azaz $\lambda x \triangledown(x = \ldots)a$.

Amennyiben szemantikai homályossággal szembesülünk, számos módon tehetjük precízzé alkalmazott nyelvünket, a nehézséget leküzdendő. Az egyes eltérő pontosítások hasonló szerepet játszanak, mint a modális logika lehetséges világai. Az a mondat-operátor, hogy 'homályos, hogy ...' analóg a kontingencia operátorral, és úgy értendő, hogy 'némelyik, de nem minden pontosított értelemben igaz az, hogy ...' A 'Princeton' kifejezés különböző dolgokat jelöl különböző pontosított értelemben, úgy is mondhatjuk nemmerev jelölő. Amikor a nem merev jelölő, akkor az állítólagos ekvivalencia nem áll fenn (1) és (2) között. Ez hasonló a téves modális ekvivalenciákhoz aközött, hogy 'Kontingens, hogy a bolygók száma kilenc.' (igaz) és 'A bolygók száma olyan, hogy kontingens, hogy kilenc vagy sem.' (hamis); vagy a között, hogy 'Kontingens az a tény, hogy a bolygók száma a bolygók száma' (hamis) és 'A bolygók száma olyan, hogy kontingens hogy az éppen a bolygók száma' (igaz). Talán az olvasónak is föltűnt, hogy David Lewis ebben a rövid kis írásában részben megelőlegezi Harold W. Noonan koncepcióját a kontingens azonosságról.

Nekem az a véleményem, hogy bár homályos azonosságról nem beszélhetünk, azonosság helyett egyfor-

maságról, vagy hasonlóságról igen. Ehhez nem kell túllépni a klasszikus logikán, nincsen szükség vitatható formális logikai apparátusra, pusztán annak a fölismerésére, hogy a hasonlóság jól leírható egy reflexív és szimmetrikus relációval, amelyik nem tranzitív, de nem is intranzitív. Érdemes átgondolni Evans levezetését ebben a felfogásban.

Ha valami nem hasonlít önmagára, akkor, ha az egyik hasonít a másikra, akkor a kettő nem azonos. Ez

*(1)	$a \approx b$	ahol '$\approx$' reflexív és szimmetrikus reláció, de nem tranzitív, bár nem is intranzitív. Szándékolt interpretációja a 'hasonlóság' reláció, $a \approx b := a$ hasonlít b-re.
*(2)	$\lambda x(x \approx a)(b)$	(1) lambda absztrakció
**(3)	$\sim a \approx a$	Ez hamis feltevés, mivel a tolerancia reláció reflexív
**(4)	$\sim \lambda x(x \approx a)(a)$	(3) lambda absztrakció
**(5)	$\sim a = b$	(2)(4) a Leibniz elv itt helyesen alkalmazható
(6)	$\sim a \approx a \rightarrow (a \approx b \rightarrow \sim a = b)$	(1)(3)(5)

2.16. táblázat. Levezetés tolerancia reláció alkalmazásával

az abszurd következtetés a hamis előtagból következik, ugyanis minden dolog hasonlít önmagára. Hasonló jönne ki az az ekvivalencia relációval is, aminek egyik interpretációja az egyformaság. Mindez azt mutatja, hogy meglepő módon Evans levezetésének Akhilleusz sarka a $\sim \nabla(a = a)$ formula, Noonané pedig a $\sim C(a = a)$ formula. Szavakban, ha beengedjük homályos vagy kontingens azonosság fogalmát, akkor vele jön a homályos vagy kontingens önazonosság fogalma is. Nem képviselhető pusztán az előbbi, az utóbbi nélkül.

Az én aggályaim

Ezek után van-e bármi baj a '$a = b \rightarrow \Box a = b$' következtetéssel, sémával? Talán igen, talán nem. Mutatok egy általánosítható példát.

a.) A fazékban lévő víz $100°C$-os. Jelölje ezt a fizikai tulajdonságot F, a fazékban lévő vizet pedig 'a' individuumnév – az időadattól az egyszerűség kedvéért eltekintek – ekkor az előbbi kijelentés egyik adekvát klasszikus logikai formája: Fa. Nyilván nem szükségszerű, hogy a fazékban lévő víz $100°C$-os legyen, a 'szükségszerű' köznapi, józan észnek megfelelő értelmében. Ha nem teszem a tűzre, akkor marad szobahőmérsékleten, ha ráteszem, akkor egy idő után forrni kezd, de nem következik semmilyen természeti törvényből, hogy mit fogok tenni, ergo nem szükségszerű ami történni fog. Ezt úgy fejezhetjük ki, hogy bár száz fokos a víz, de nem szükségszerűen az. Formális nyelvre fordítva: $Fa\& \sim \Box Fa$. Ez a formális nyelvi megfogalmazás a filozófiában szokásos, a műszaki- és természettudományokban azonban ritka.

b.) A műszaki- és természettudományokban a fizikai tulajdonságokat, pl. a hőmérsékletet függvény-jellel fejezik ki. Legyen a hőmérséklet jele T. Ekkor azt, hogy egy x dolog adott hőmérsékletű egyszerű

azonossági állítással fejezhetjük ki. Jelen fazekunk esetében ez így fest: száz fok = a fazékban lévő víz hőmérséklete. Formális nyelven:$100°C = T(a)$.
(Az idő paramétert az egyszerűség kedvéért megint elhagytam.) Ez a formális nyelvi forma alapvetően fontos a műszaki és természettudományban. (Sajnos ez tökéletesen elkerülte az analitikus filozófusok figyelmét.) Ezek alapján gondoljuk végig a következőket:

Tudjuk, hogy $100°C = 212°F$. Tegyük fel, hogy a lábasban lévő víz éppen forr, a benne lévő víz jele legyen 'a', hőmérséklete pedig legyen az adott időpontban $T(a)$. Ekkor tudjuk, a víz forráspontját ismerve, hogy $100°C = T(a)$. Ennek alapján fölírhatjuk az alábbi levezetést:

(1)	$100°C = 212°F$	
(2)	$\Box 100°C = 212°F$	Ez nem csak a nevek merev jelölősége folytán igaz, hanem a két mértékegység átszámítási törvénye miatt is, ami fizikai törvénynek tekinthető.
(3)	$100°C = T(a)$	Látjuk, hogy forr a víz, tehát ez biztosan igaz. Ugyanakkor nem szükségszerű, hogy a lábosban lévő vizet föltegyük a tűzre, és az forrni kezdjen. Tehát ez nem szükségszerű igazság.
(4)	$\sim \Box 100°C = T(a)$	
(5)	$\Box 212°F = T(a)$	(2)(3) Itt modális operátor hatókörében cserélünk föl egy merev jelölőt ($100°C$) egy nem merev jelölővel ($T(a)$).
(6)	$\Box 100°C = T(a)$	(1) (5)
(7)	$\sim \Box 100°C = T(a) \& \Box 100°C = T(a)$	(4)(6) ellentmondásra jutottunk.

2.17. táblázat. Forrásban lévő víz

Hol a hiba?

Ott a hiba, hogy a 'lábasban lévő víz hőmérséklete' kifejezés nem merev leírás, nem logikai tulajdonnév vagy más merev jelölő, ezért rá nem vonatkozik a szükségszerűség Kripkei tétele. Az (5) lépés hibás, mivel egy nevet megfontolás nélkül fölcserél egy függvény értékkel modális operátor hatókörében. A modális logikában egy érték nem cserélhető föl szabadon egy vele egyenlő függvény értékkel. (A modális operátorok hatókörében nem a dolgok maguk vannak, függetlenül attól, hogy miként nevezzük meg azokat.) Ez nem új felismerés: „For this reason it may well be preferable to avoid altogether the use of function symbols in modal predicate logic."[32] Megszüntethető a zavar, (az ellentmondás) ha még gondosabban formulázzuk meg a problémát. Ahelyett, hogy valaminek a hőmérsékletét egy T függvénnyel fejezzük, írjuk le egy $T(xy)$ relációval, amit úgy értünk, hogy x hőmérséklete y. Nyilván egy dolognak, csak egyetlen hőmérséklete lehet egy adott időpontban, és ezért ez a reláció egyértelműen meghatározza y-t, azaz ez a reláció, függvény reláció. Ez azonban most mellékes. Legyen $Txy := x$ hőmérséklete y (az idő változót az egyszerűség

[32] G. E. Hughes & M.J. Cresswell: A new introduction to modal logic p.328. [3]

kedvéért kihagytam.) Ekkor formulákkal világosan meg tudjuk különböztetni a de dicto és a de re olvasatát, annak, hogy:

Szükségszerű, hogy a lábosban lévő víz hőmérséklete $100°C$.

de dicto olvasat $\sim \Box\exists x\forall y(x = 100°C\&(T(a, y) \leftrightarrow x = y))$

de re olvasat $\exists x\forall y(x = 100°C\&(T(a, y) \leftrightarrow \Box x = y))$

A két értelmezés lehet egyszerre igaz.

Összefoglalás

A kontingens azonosság jól alátámasztható filozófiai érvekkel, amennyiben nem merev jelölőkről van szó. Merev jelölők esetén célt tévesztenek a cáfolatok. Ugyanakkor a merev jelölők szükségszerű azonossága is csak filozófiai érvekkel védelmezhető sikeresen, a Leibniz elven alapuló bizonyítás nem elegendő.

További irodalom magyarul Saul Kripke: Megnevezés és szükségszerűség [19]; Saul Kripke: Azonosság és szükségszerűség in. FarkasKatalin – Huoránszki Ferenc: Modern metafizikai tanulmányok [41]; egy újabb írás a tárgykörben angolul: Penelope Mackie: Persistence and modality [21].

3. fejezet

A kupac paradoxon rokonsága

3.1. Hasonlóság, egyformasás, azonosság

Bevezetés

Először azon szavak jelentését fogom filozófiai szempontból megvizsgálni, melyek szoros kapcsolatban állnak az azonosság fogalmával, és gyakran zavarok, félreértések forrásai. Három fogalom gubancolódik egymásba az azonossággal kapcsolatos filozófiai vitákban: a hasonlóság, az egyformaság és az azonosság. Az elsőt matematikai nyelven a tolerancia relációk, a másodikat az ekvivalencia relációk írják le, az azonosság predikátum jelentését pedig logikai - halmazelméleti axiómák segítségével rögzítem. Eközben olyan alapvető relációelméleti fogalmakra térek ki, mint egy reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonsága. Megpróbálok közérthető, szemléletes példákat bemutatni, mert egy filozófiai magyarázatnak, hacsak lehet, minél szélesebb körben érthető, a mindennapi nyelven megfogalmazott példákból és kérdésekből kell kiindulnia.[1] Miután rögzítettem az azonosság fogalmát, arra a kérdésre keresem a választ, hogy vajon jó-e az azonosság klasszikus logikai jellemzése? Nem túl tág vagy épp ellenkezőleg túlságosan szűk-e a szokásos meghatározás? Előbbi esetben előfordulhat, hogy két dolog annak ellenére kettő, azaz nem azonos egymással, hogy minden tulajdonságukban megegyezik, az utóbbi esetben pedig olyan relációk is kielégítik az azonosság axiómáit melyeknek nyelvérzékünk szerint semmi köze sincs az azonosság fogalmához. Ha hiba van az azonosság axiómáiban, annak az lenne a meggyőző bizonyítéka, hogy az axiómák alkalmazásával hibásan következtetünk. Ha az első eset fordulna elő, és az axióma túl tágas volna, akkor megtörténhet, hogy két dolgot hibásan azonosítunk, a második esetben viszont ellenkezőleg arra következtetnénk tévesen, hogy

[1] Tanulmányomat 1982-ben írtam, egy későbbi verziója azonos címmel megjelent a „Mi a nyugat? Atlantizmus és integráció” c. kötetben, szerk.: Garaczi Imre (2007) Veszprémi Humán Tudományokért Alapítvány, Viza Kft.,Veszprém. p. 166-187.

két dolog különbözik, amikor valójában egy.[2] Külön megfontolást érdemel, mert egyáltalán nem nyilvánvaló a válasz, hogy mire szolgál az azonosság a jelek és mire az egyformaság a fizikai tárgyak világában.

Az azonossággal kapcsolatos filozófiai viták alapvetően két csoportra oszthatóak. Az első csoportba azok a kérdések tartoznak, melyeket az azonosság fogalmának logikai, matematikai alkalmazásai vetnek föl, a második csoportba pedig azok a dilemmák tartoznak, melyek az élőlények, élettelen tárgyak, különösen a nagyon kicsiny elemi részecskék önazonossága jelentése elemzésekor merülnek föl. Írásom első részében az azonossággal kapcsolatos legalapvetőbb logikai - halmazelméleti kérdésekkel foglalkozom. Az itt bemutatott fogalmak jelentősége nem korlátozódik az azonosság filozófiai kérdéseire, ezért igyekszem minél érthetőbben és egyúttal szabatosan bemutatni ezeket az alapvető logikai-matematikai fogalmakat. Dolgozatom második részében foglalkozom a fizikai tárgyak önazonosságának kérdésével, de egy részletkérdést külön vizsgálok meg a következő fejezetben.

Logikai - filozófiai, matematikai háttér

Ismeretelméleti alapok

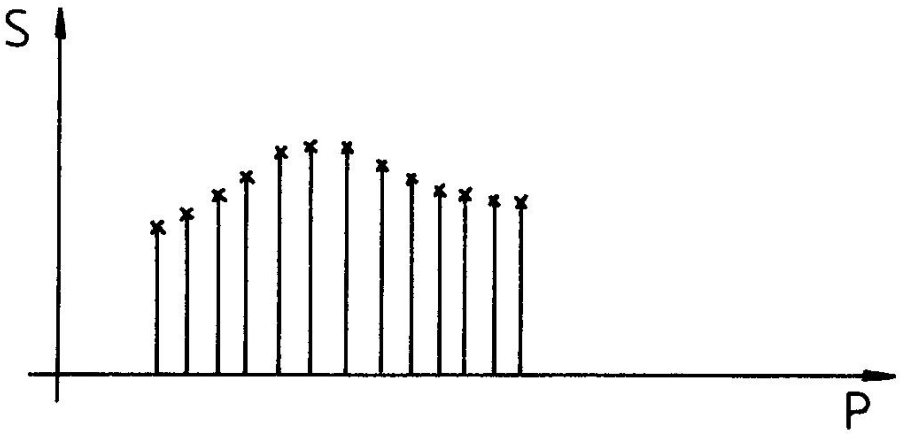
Mi alapján állítjuk, hogy $a = a$, amikor az, ami az azonosságjel baloldalán szerepel, nem mindig tökéletesen egybevágó azzal, ami a jobb oldalán van, különösen ha kézzel írom le a két betűt? Vajon itt valami egyedülálló emberi képességgel van dolgunk?

A válasz az, hogy az egyforma tárgyak hasonló viselkedése hasonló környezetben képezi a fizikai alapját az élőlények azon kognitív képességének, hogy képesek a világban egyforma tárgyakat és hasonló helyzeteket fölismerni. Ez képezi az alapját az automaták működésének is, és ez magyarázza meg, hogy miért érvényesek bizonyos fizikai természettörvények egyforma tárgyak széles tartományán.

David Hume azt kérdezte háromszáz évvel ezelőtt, hogy miért hisszük, hogy ma ugyanaz a Nap kelt föl, mint tegnap? A válasz egy hit, egy metafizikai hit. Önkéntelenül hiszünk valamilyen folytonosságban. Ha a mérési eredmények az 3.1. ábrán láthatók akkor hajlamosak vagyunk azt a 3.2. ábrán látható módon felfogni. Megeshet persze, hogy valóban módunkban áll a mérést jóval sűrűbben és pontosabban elvégezni, ekkor az elképzelt folytonos összefüggés egy részletét kinagyítva a 3.3. ábrán látható eredményt kapjuk:

Az a hit, hogy egy csőbe bedobott golyó ugyanaz, amikor a cső végén kigurul, a legalapvetőbb metafi-

[2]Ezzel foglalkozik a következő két tanulmány. Az első szerint a dolgok numerikus azonossága több annál mint amit a dolgok tulajdonságai segítségével megragadni képesek vagyunk. Robert Merrihew Adams 2004. Primitív ezség és primitív azonosság. in. [41]. A következő írás szerint pedig az azonosság jellemzésére használt két alaptétel – miszerint, minden azonos önmagával, és ha valami azonos valamivel, akkor ami igaz az előbbire, éppúgy igaz lesz az utóbbira is – nem határolja jól körül az azonosság fogalmát, mert olyan értelmezése is adható a két alapelvnek, aminek semmi köze az azonosság fogalmához. Timothy Williamson 2007. Absolute Identity and Absolute Generality. in. Unrestricted Quantification: New Essays A. Rayo and G. Uzquiano (eds.) [27]



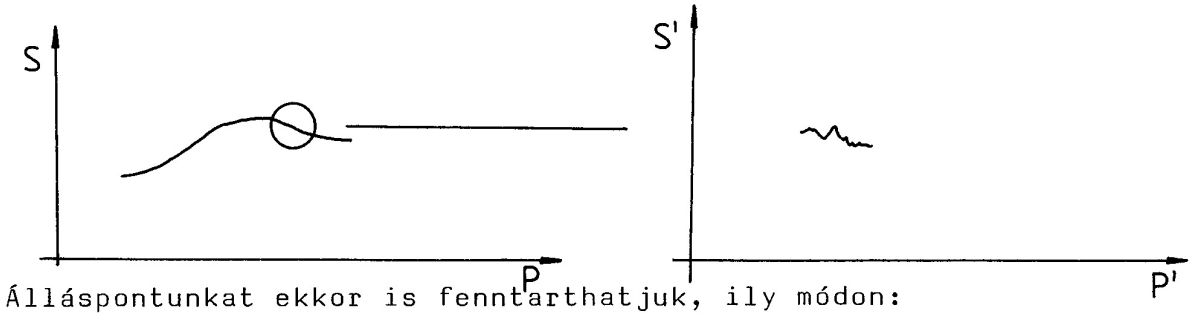
3.1. ábra. Mintavétel

3.2. ábra. Közelítés

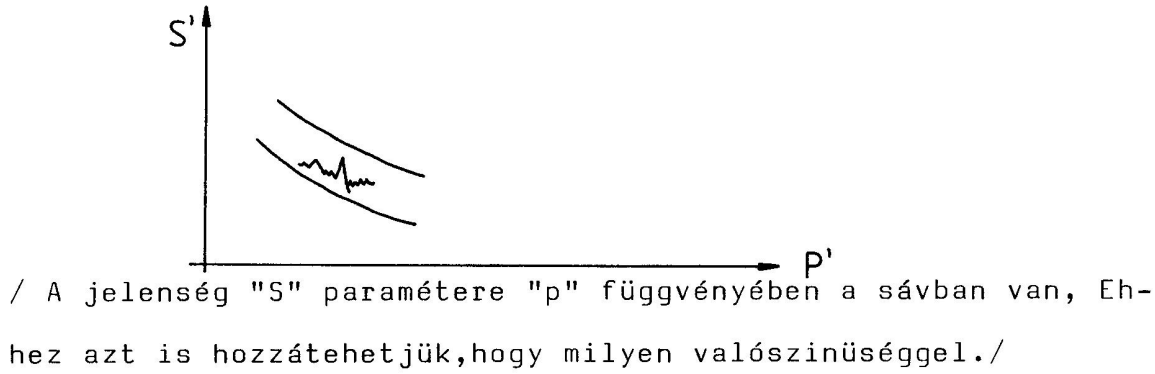
zikai hiteink közé tartozik. Az ehhez hasonló hitekben osztozunk a fejlettebb állatok világértelmezésével, a tárgyak és élőlények folytonos létezésében való hit nem korlátozódik az emberre.

Az 'azonosság' reláció – hasonlóan a természetes számokhoz – annyira alapvető fogalomnak tűnik, hogy sokan úgy vélik, meghatározhatatlan alapfogalom.[3] Valóban, a használatukat gyakorlással sajátítjuk el

[3] „Az azonosság olyan egyszerű és alapvető fogalom, hogy nehéz másképpen megmagyarázni, mint puszta szinonimákkal. Az, hogy x és y azonosak, ugyanazt jelenti, mint az, hogy x és y ugyanaz a dolog. Minden dolog azonos önmagával és semmi mással nem. De egyszerűsége ellenére az azonosság zavarokat okoz. Pl. azt kérdezhetjük: Mire használjuk az azonosság fogalmát, ha egy objektum önmagával való azonosítása triviális, mással való azonosítása pedig hamis? Ezt a különös zavart arra való hivatkozással tisztázhatjuk, hogy valójában nem kétfajta esetet kell tekinteni, egy triviálisat és egy hamisat, hanem hármat: Cicero = Cicero, Cicero = Catilina, Cicero = Tullius. Az első ezek közül triviális, a második pedig hamis, de a harmadik sem nem triviális, sem nem hamis. A harmadik informatív, mert két különböző terminust kapcsol össze; és ugyanakkor igaz, mert a két terminus ugyanannak az objektumnak a neve. Egy azonosság állításának igazságához csak az szükséges, hogy az '=' ugyanazon dolog két neve között szerepeljen; maguk a nevek lehetnek különbözőek, és a hasznos esetekben különbözőek is. Hiszen nem a nevekről állítjuk, hogy azonosak, hanem a megnevezett dolgokról. Cicero identikus Tulliusszal (ugyanaz az ember), bár a 'Cicero' név különbözik a 'Tullius' névtől. Ha valamit mondunk az adott objektumokról, akkor a megfelelő szót vagy predikátumot az objektumok neveire alkalmazzuk; de értelmetlen lenne azt gondolni, hogy amit az objektumokról mondunk, az magukra a nevekre is igaz. A Nílus pl. hosszabb, mint a Tuscaloosahatchie, de a nevek fordított viszonylatban vannak. Mivel az azonosság hasznos állításai azok, amelyekben a megnevezett objektumok ugyanazok, a nevek pedig különbözők, csak a nyelv sajátossága miatt van szükség az azonosság fogalmára. ...hogy az azonosság szükségessége egy nyelvi sajátságból származik, nem azt jelenti,



3.3. ábra. Nagyítás



3.4. ábra. Behatárolás

és nem valamiféle definícióval, és az is igaz, hogy nehéz lenne bármiféle definíciót megérteni, ha még az olyan alapvető szavak jelentését sem értenénk, mint az azonosság. A logikai azonosság használata kapcsolatban van a fizikai (materiális) egyformasággal. Amit látunk, hogy $a = a$, az úgy történik – nem ezt jelenti(!) – hogy a baloldali 'a' jel egyforma a jobboldali 'a' jellel. Nem mindig tökéletesen egybevágó, de mi mégis úgy tekintjük, hogy a két jel ugyanaz, és ez csak úgy lehetséges, hogy a két jelpéldány alakjában van valami közös. Ha egy olyan gépet kívánunk készíteni, ami tud olvasni, felismeri az azonosnak szánt jeleket, akkor ugyancsak úgy kell megszerkesztenünk, hogy fölismerje a jelek alakjában lévő hasonlóságot, és a szoros hasonlóságot mint egyformaságot tekintse. Ha azonban megkérdezik, hogy mi az egyformaság, és egy olvasó gép miket tekint egyformának, akkor magyarázatunk nem mondható el az 'azonosság' logikai terminus nélkül. A nyelvhasználat támaszkodik a jelpéldányok egyformaságára, de ezáltal mégsem kerültünk a körbeforgás csapdájába, mert az 'azonos' terminus meghatározása a nyelven

hogy az azonosság nyelvi kifejezések relációja. Ezzel ellentétben, mint imént hangsúlyoztuk, azonos csak egy objektum és csak önmagával lehet, nem pedig az egyik név a másikkal; az azonossági kijelentésben ugyan a nevek szerepelnek, de a kijelentés a megnevezett objektumokat azonosítja. Továbbá egy azonossági kijelentésben szereplő nevek nyelvi vizsgálata általában nem elegendő az azonosság érvényességének vagy érvénytelenségének eldöntésére. Ezek az azonosságok: Everest = Gaurizankar (vö. 33. §), Alkonycsillag = hajnalcsillag, Az USA 25. elnöke = az USA első olyan elnöke, akit 42 éves korában iktattak be. A Tuxtla középhőmérséklete = 93^oF. a megalapozás tekintetében mind nyelven kívüli tények vizsgálatától függnek." Willard Van Orman Quine (1968) A logika módszerei. Ford. Urbán János [26] p. 248-250.

belül nem támaszkodik fizikai, tapasztalati tényekre. A modern logika és filozófia egyik legnagyszerűbb eredménye, hogy az 'azonosság' definiálható a másodrendű logikában, és jellemezhető axiómákkal az elsőrendű logika nyelvében.

Egy dolog azt mondani, hogy $a = b$ logikai értelemben, és más dolog azt mondani, hogy 'a' alma azonos súlyú, mint 'b' alma, vagy 'a' szakasz megegyező hosszú 'b' szakasszal, fizikai értelemben.

Az első esetben adott geometriai keretelméleten belül értelmezhető két szakasz metszése és azonossága. Amennyiben két szakasz metszi egymást, úgy van közös pontjuk, de továbbra is fönnáll a különbözőségük. Ha viszont két szakasz fedi egymást, akkor a két szakasz azonos, tehát nem áll fenn a különbözőségük. Pl. az euklideszi térben két végpont között mindig húzható egy egyenes szakasz, melyet a végpontok határoznak meg, és csak egyetlen egyenes szakasz van a két végpont között. Értelmetlenség lenne feltételezni, hogy két végpont között több egymástól megkülönböztethetetlen, azaz minden tulajdonságában azonos szakasz van.[4] A második esetben a tárgyakhoz tartozó jellemzők értékeiről állítjuk, hogy azonosak vagy nem azonosak, és nem magukról a tárgyakról. Ha például látunk két egyforma hosszú – mondjuk 'a' és 'b' betűvel jelölt – egyenes szakaszt, akkor mondhatjuk, hogy 'a' adott pontossággal való megmérése során kapott szám, és 'b' azonos pontossággal való mérése során kapott szám megegyezik, azonos. Legyen a 'hosszúság' jellemzőt leíró függvény valamely tetszőleges x tárgyra ilyen módon kifejezve: hossza(x). Ekkor az 'a' szakasz hossza így fest: hossza(a), míg a 'b' szakasz hossza ehhez hasonlóan: hossza(b). A két szakasz távolságának adott pontosságú megegyezése egy szám önazonosságába megy át ilyeténképpen: hossza(a)=hossza(b). A két szakasz egyenlő távolságán valamiféle tárgyi manipulációra gondolunk. Pl. egy merev rudat kétszer tudunk 'a' mentén lefektetni úgy, hogy ne lógjon túl, és 'b' mentén is kétszer tudjuk megtenni ugyanezt. A mérés során feltesszük, hogy a merev test nem, vagy csak elhanyagolható mértékben változtatja hosszát, és a mérendő szakasz sem változik, sem a mérés következtében, sem egyéb okból. Mérési eljárásunk olyan – szándékosan találtuk úgy ki – hogy számokat tudjunk kapcsolni a tárgyak tulajdonságaihoz. A számokról aztán már állíthatjuk a logikai azonosságot. De, hogy az egyenlő hosszúságokkal való haladást egyenlő, azonos számokban kell kifejezni, ez inkább alapfeltevés, játékszabály mint kísérleti tény, aminek hasznossága a matematika és geometria hasznos alkalmazásaiban mutat kozik meg.[5]

Logikai alapok

Sok logikai szakkönyv a klasszikus elsőrendű logikában az azonosságot két axióma sémával jellemzi:

[4] V.ö.: Robin Jeshion, The Identity of Indiscernibles and the Co-Location Problem. [14]

[5] A gondolat forrása Lánczos Kornél Számok mindenütt. [18] p.17.

(A1) $\forall x.x = x$

(A2) $\forall x \forall y.(F(x) \,\&\, x = y) \rightarrow F(y)$

(A2-vel logikailag ekvivalens, hogy minden x és y-ra ha $x = y$ akkor, ha $F(x)$ akkor $F(y)$. A2-t az 'azonosak megkülönböztethetetlensége' elvének nevezik.)[6]

(A1) és (A2) nem definiálja az azonosságot, hanem az azonosság használatának a logikában kormányzó elveit rögzíti. Hao Wang fölismerte, hogy a két axióma levezethető egy még alapvetőbből, melynek belátáshoz nélkülözhetetlen a szimbolikus logika apparátusának használata. A kiinduló premissza a következő séma:

(W) $\varphi(a) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \,\&\, x = a)$

Ebből levezethetők az azonosság axiómái. A levezetés szép példája egy olyan összefüggés megértésének, ami természetes nyelven lehetetlen.[7]

(A1) Az azonosság reflexivitása:

*(1)	$\varphi(a) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \,\&\, x = a)$	
**(2)	$a \neq a$	
	———————————————	
**(3)	$a \neq a \leftrightarrow \exists x(a \neq a \,\&\, x = a)$ $(1)\varphi := (1) \neq a$ Ahol '$(1) \neq a$' az „a-tól különbözőnek lenni" fogalma.	
**(4)	$a \neq a \leftrightarrow (b \neq a \,\&\, b = a)$	$(3)b$
**(5)	$(b \neq a \;\&\; b = a)$	$(2)(4)$
*(6)	$a \neq a \rightarrow (b \neq a \,\&\, b = a)$	$(2)(5)$
*(7)	$a = a$	(6)
*(8)	$\forall x.x = x$	(7)
(9)	$[\varphi(a) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \,\&\, x = a)] \rightarrow \forall x.x = x$	(8)

3.1. táblázat. Az azonosság reflexivitása

(A2) Leibniz törvénye:

Fontos hangsúlyozni, hogy ebben a felfogásban az azonosság épp olyan centrális logikai fogalom, mint az 'és' konnektívum. Amiként a 'és' konnektívum rögzített jelentéssel bír és nem interpretálandó, akképpen

[6]G. Havas Katalin írja 'Az azonosság törvénye a hagyományos és a modern formális logikában' c. könyvében [17], hogy bár szokásosan Leibniztől eredeztetetik: ... már Aquinói Szent Tamásnál is megtalálható ez a tétel: 'Ha két dolog azonos, akkor a másikról ugyanazokat állíthatjuk, mint az elsőröl.' (Summa Theologica. p.1., qu. XL., art. 1.,3.)

[7]Köszönettel tartozom Harry Deutschnak a levezetésben nyújtott segítségért.

*(1)	$\varphi(b) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \,\&\, x = b)$	
**(2)	$a = b \,\&\, \varphi(a)$	
	——————————————-	
**(3)	$\exists(\varphi(x) \,\&\, x = b)$	(2)
**(4)	$\varphi(b)$	(1)(3)
*(5)	$(a = b \,\&\, \varphi(a)) \rightarrow \varphi(b)$	(2)(4)
(6)	$[\varphi(b) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \,\&\, x = b)] \rightarrow [a = b \,\&\, \varphi(a)) \rightarrow \varphi(b)]$	(1)(5)

3.2. táblázat. Leibniz törvénye

az azonosság predikátum sem. Ebből következően relatív azonosságról beszélni félrevezető. A relatív azonosság valójában egy ekvivalencia reláció, ami már interpretálható, amint azt a későbbiekben részletesen be fogom mutatni.

Az azonosság értelmezése a halmazelméletben

A Zermelo-Fraenkel (ZF) halmazelmélet különféle megfogalmazásaiban és verzióiban a meghatározottság (más elnevezéssel extenzionalitás) axiómája rögzíti, hogy mikor azonos két halmaz, H_1 és H_2 :
(Megh.) $H_1 = H_2$:= Minden x-re, $x \in H_1$ akkor és csak akkor ha $x \in H_2$

A ZF halmazelmélet szokásos fölépítéseiben a halmazoknak nincsenek más elemi, mint az üres halmaz és annak halmazai, és annak újabb halmazai a végtelenségig. Ez elegendő a matematikus számára, hogy megkonstruálja a legkülönfélébb struktúrákat és érdekes összefüggéseket mutasson ki azok között. Viszont egyáltalán nem elegendő a filozófus számára, aki szeretne almák, körték, asztalok és székek halmazáról beszélni, szeretné megengedni, hogy konkrét partikulárék is elemei lehessenek halmazoknak. Az ilyen elemeket a halmazelméletben angolul 'urelement'-nek, nevezik. (Ruzsa Imre ősobjektumnak nevezte ezeket és én követem őt.) Ha ősobjektumok is lehetnek a halmazok elemei, akkor így alakul az axióma:
Ha van olyan x, hogy $x \in H_1$ akkor ($H_1 = H_2$:= Minden x-re, $x \in H_1$ akkor és csak akkor ha $x \in H_2$);
ha nincs olyan x, hogy $x \in H_1$ akkor $H_1 = \emptyset$.

Vegyük észre, hogy a meghatározottság axiómája nem vezethető le (A1) és (A2)-ból, azaz a klasszikus logika axiómáiból. Az hogy '$H_1 = H_2 \rightarrow$ minden x-re, $x \in H_1$ akkor és csak akkor ha $x \in H_2$' levezethető, viszont a fordítottja nem. Tekintsük ugyanis a '$\in$' reláció következő interpretácóját: $x \in H_1$:= x őse H_1 -nek. Ez alapján az teljesül, hogy ha két ember azonos, akkor egyazon ősei vannak, viszont nem teljesül a fordítottja: ha két embernek egyazon ősei vannak, abból nem következik, hogy azonos a két ember. Ezért szükséges ezt külön axiómában rögzíteni a halmazok tekintetében. Valójában ennyi is elég lenne:

(A3) Ha (minden x-re, $x \in H_1$ akkor és csak akkor ha $x \in H_2$) akkor $H_1 = H_2$,

illetve őselemek használata esetén:

Ha van olyan x, hogy $x \in H_1$ akkor (ha (minden x-re, $x \in H_1$ akkor és csak akkor ha $x \in H_2$) akkor $H_1 = H_2$); ha nincs olyan x, hogy $x \in H_1$ akkor $H_1 = \emptyset$.

A halmazok, relációk és egyéb matematikai struktúrák közötti hasonlóság vagy azonosság tulajdonságai a köztük lévő leképezéssel írhatók le. A leképezések fajtáira, valamint a leképezéseknek a relációk tulajdonságait átörökítő jellegére nem térek ki. Az ehhez kapcsolódó olyan fogalmak magyarázata, mint a 'homomorfizmus' vagy 'izomorfizmus', megtalálhatók a hivatkozott irodalomban. Szembeötlő az e fogalmakra épülő matematikai struktúrák elméletének szépsége és kapcsolata a filozófia alapkérdésivel.[8]

Egy fontos filozófiai tanulság

Említettem, hogy az azonosság logikai axiómáiból nem vezethető le a ZF halmazelmélet meghatározottsági axiómája. Fontos jól megérteni ennek a filozófiai üzenetét. Arra hívja föl a figyelmet, hogy az azonosság fogalma önmagában nem dönt a fogalom egyes speciális alkalmazásai esetében, nekünk kell élesíteni a fogalmat a matematika vagy számítástudomány egyes területein. Pl. Peter Aczel nem jól fundált halmazelméletében – ahol egy halmaz önmagának is eleme lehet – a halmazok azonosságának sajátos axiómái vannak, melyek eltérnek a ZF halmazelméletben megszokottól. Ezek után nem meglepő, hogy miként a jelek világában, úgy a makroszkopikus fizikai tárgyak vagy élőlények világában sem magyaráznak meg mindent az azonosság logikai alapelvei. Nekünk kell ellentmondásmentesen rögzíteni, hogy egy élőlény, személy vagy éppen Thészeusz hajója meddig azonos önmagával, és mikor egy másik fizikai tárgy, ezt nem lehet a fogalom jelentéséből kispekulálni.

Az azonosság definiálhatósága

A logikának egy magasabb fejezetében – a másodrendű logikában, ahol már nem csak egyedi dolgok, hanem azok tulajdonságai, viszonyai is beletartoznak a 'minden' kvantor hatókörébe – az azonosság definiálható:

(PII) $x = y$ pontosan akkor, ha bármely F tulajdonságra igaz, hogy (ha xF tulajdonságú, akkor y is F tulajdonságú)

[8] Jurij Anatoljevic Srejder, Egyenlőség, hasonlóság rendezés. Ford. Vargha András. [32] Maurer Gyula - Virág Imre, A relációelmélet elemei. (1972) Kolozsvár, Dacia könyvkiadó. Részletesebben kifejtve a Bevezetés a struktúrák elméletébe c. könyvükben [10]

(PII) -nek létezik egy erősebb megfogalmazása is, amelyik a lehetséges világok modális szemantikájára épít. Ekkor nem csak az aktuális világban kell egybeessen x és y valamennyi tulajdonsága, hanem az összes lehetséges világ összes lehetséges tulajdonságát alapul véve is. Ennek vizsgálatával most nem foglalkozom.

A definíció előzetes várakozásunkkal ellentétben nem úgy fest, hogy $x = y$ pontosan akkor, ha bármely F tulajdonságra igaz, hogy (xF tulajdonságú, akkor és csak akkor ha y is F tulajdonságú). Ennek az a magyarázata, hogy PII-ból logikailag következik ez utóbbi megfogalmazás, így az 'akkor és csak akkor' kitétel a definiensben fölösleges. Ez azért van így, mert mindig adott tárgyalási univerzum részhalmazaiként értelmezzük a predikátumok terjedelmét, azért a tárgyalási univerzumot alapul véve bármely predikátumra annak negáltja (tagadása) is egyértelműen meghatározott. A definíció alapgondolata az, hogy ha két dolog minden tulajdonsága megegyezik, akkor az a két dolog valójában egy dolog.[9]

Ezért (PII)-at a 'megkülönböztethetetlenek azonossága' elvének nevezik. Különféle gyöngített megfogalmazása véget nem érő filozófiai viták tárgya, és a kortárs filozófusok többsége nem fogadja el az elvet. Több filozófus szerint a definícióban a 'minden tulajdonság' hatókörébe nem tartozhat bele a valamivel való azonosság tulajdonsága, mivel épp ez a definíció rögzíti az azonosság jelentését. Ezt a korlátozást elfogadva fölmerülhet, hogy talán létezhet két olyan objektum, amelyik minden tulajdonságában – beleértve a helyét is – megegyezik, de mégis különbözik egymástól. Vajon milyen objektumok jöhetnek szóba? Kétséges, hogy a halmazok vagy számok világában található ilyen objektum, és korábban azt is rögzítettük, hogy a geometriai objektumok világában sem létezhet ilyen dolog. Pl. Nem állíthatjuk hogy van két árnyékunk, amelyik minden időpillanatban egybeesik, de mégsem azonos. Viszont a fizikai tárgyak világában talán létezhet ilyen objektum, és az cáfolata volna PII ezen gyöngített megfogalmazásának.

Egy másfajta korlátozás lehet a konkrét partikulárék (almák, körték) tartományán a belső tulajdonságokra való szűkítés. Kérdés azonban, hogy mik a belső tulajdonságok, lehetnek-e belső tulajdonságok relációk?[10] Sokan tagadólag válaszolnak a kérdésre, ám ennek elfogadhatatlan következményei vannak.

[9] Lehet-e két tárgy azonos? Lehetséges-e két asztal, amelynek minden tulajdonsága megegyező? Ha igen, akkor honnét tudjuk, hogy két tárgyunk van, hogyan tudjuk megkülönböztetni őket? Ha ugyanis a két tárgy valóban azonos, akkor minden szempontból azonos, tehát nem két tárgy. Bertrand Russell filozófiai önéletrajzában erről így ír: „...x-nek egy másik különöstől, y-tól tisztán numerikusan kell különböznie, s ily módon logikailag lehetségesnek kell lennie annak, hogy két különös entitás, x és y egymás összes tulajdonságaiban osztozzék, és mégis kettőt alkossanak. Azt persze nem tudnánk, hogy kettőt alkotnak, hiszen ez azt rejtené magában, hogy tudjuk: x különbözik y-tól, ami y-ról nem mondható; valójában x egy puszta megismerhetetlen szubsztrátummá változna, vagy egy láthatatlan fogassá, amelyről úgy csüngenek le a tulajdonságok, mint egy falusi ház gerendájáról a sonkák." Bertrand Russell 1968. Filozófiai fejlődésem. Ford. Fehér Ferenc [29], p. 220. Később Russell elfogadta azt a nézetet, hogy ha két objektum minden tulajdonsága azonos, akkor az egy objektum. Lásd még: Forrest, Peter „The Identity of Indiscernibles", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2006 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming

[10] „Many writers, especially in the literature on intrinsic value, use 'relational' for the opposite of intrinsic. This seems to be a mistake for two reasons. The first reason is that many properties seem to be both be relational and intrinsic. For example, most people have the property having longer legs than arms, and indeed seem to have this property intrinsically, even though the property consists in a certain relation being satisfied. Maybe the property is not intrinsic if whether or not something is an arm or a leg is extrinsic, so perhaps this isn't a conclusive example, but it seems troubling. As Humberstone otes, some might respond by suggesting that a relational property is one such that if an object has it, then it bears some relation to a distinct thing. But

Ugyanis amennyiben a definíciót konkrét partikulárékra is alkalmazni kívánjuk – pl. fizikai tárgyakra vagy eseményekre – akkor a definícióban a dolgok tulajdonságaihoz a külső relációs tulajdonságaik, pl. a térbeli koordinátáik is hozzátartoznak. (Nem minden relációs tulajdonság külső, pl. a konnektor két pontja közötti 230V feszültség, vagy az a testi tulajdonság, hogy a szív a gerinctől balra van.)[11] Ennek hiányában könnyen találhatnánk a 'megkülönböztethetetlenek azonossága' elvét cáfoló ellenpéldát. Pl. két olyan az űrben elhelyezkedő vasgömböt, melyek tömege, formája, felülete és sűrűsége is tökéletesen egyforma, és csak azért tudjuk, hogy kettő vasgömbünk van, mert a helyük különböző. (Később visszatérek erre a problémára.) A számok vagy más matematikai objektumok világában nehezen értelmezhetőek a külső és belső tulajdonságok, így ott nem merül föl ez a kérdés.

A ZF halmazelmélet nyelvén így definiálható az azonosság:

(A4) $x = y := \forall H(x \in H \leftrightarrow y \in H)$

Itt azért szerepel '$\leftrightarrow$' és nem '$\rightarrow$', mert a ZF halmazelméletben nem létezik univerzum mint halmaz, így nem értelmezhető a komplementer halmaz fogalma az univerzumra nézve. (A4) kevésbé pontosan természetes nyelven is megfogalmazható: két dolog azonos, ha minden összesség, amelyikbe az egyik beletartozik, abba a másik is beletartozik, és fordítva.

A 'megkülönböztethetetlenek azonossága' elvének ez a megfogalmazása cáfolhatatlan, mivel magába foglalja a 'valamivel azonosnak lenni' tulajdonság terjedelmét is. Legyen két tetszőleges egyelemű halmazunk, mondjuk $\{a\}$ és $\{b\}$. Ezek a halmazok ugyanis így konstruálhatóak meg: $\{a\} = \{x : x = a\}$ illetve $b = \{x : x = b\}$.

(A4) bírálható azon az alapon, hogy a halmazok osztálya fölött kvantifikál. Azonban megfogalmazhatunk egy D (domain=tartomány) alaphalmazhoz képest relatív azonosság fogalmat is. Legyen I az identitás reláció D alaphalmazon értelmezve abban az értelemben, amelyben D bármely eleme csak önmagával áll relációban:

(A5) $I(D, x, y) := x, y \in D \,\&\, \forall H(H \subseteq D \rightarrow (x, y \in H \,\nabla x, y \notin H))$

this won't do either. Not being within a mile of a rhodadendron is clearly relational, but does not consist in bearing a relation to any distinct individual, as we can see by the fact that a non-rhodadendron all alone in a world can satisfy it." Weatherson, Brian, 'Intrinsic vs. Extrinsic Properties', The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/intrinsic-extrinsic/`

[11] V.ö. Weatherson, Brian, „Intrinsic vs. Extrinsic Properties", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.)
`http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/intrinsic-extrinsic/`

Azaz, bármely két D halmazbeli elem D bármely H részhalmazának vagy eleme, vagy nem.[12] Vajon logikailag ekvivalens-e (A4) és PII? A válasz attól függ, hogy minden halmaznak megfelel-e egy predikátum vagy sem. Bebizonyítható, hogy csak akkor, ha legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok dolog létezését feltételezzük. Ebben az esetben egyetérthetünk Quine-al, hogy a nevek minden esetben kiküszöbölhetők egy leíró predikátum segítségével, amely csak és kizárólag magára a névre igaz. Ebből az következik, hogy egy legfeljebb megszámlálható végtelen számosságú világban PII, a megkülönböztethetetlenek azonossága elve, logikai okokból igaz. Ha a mi világunk véges mind a benne lévő fizikai tárgyak mind azok jellemzői értékei tekintetében – aminek a föltételezése a tér-idő adatok szempontjából jelent bizonyos nehézséget – akkor a mi világunkban Leibniz ezen elve érvényes, következésképpen minden azt cáfoló ellenpélda valahol hibás.

A halmazelmélet alkalmazása valamint az eternalizmus

A halmazelméletben használatos eleme relációval kapcsolatban két dolgot fontos jól megérteni.
Az első: az a formális nyelvi mondat, hogy $\{a \in H\}$, azt jelenti hogy az 'a' individuumnév által jelölt dolog eleme a H halmaznak. Pl. $\emptyset \in H$ nem azt jelenti, hogy az üres halmaz jele eleme a H halmaznak, hanem, hogy az üres halmaz maga, az a halmaz, amit a '$\emptyset$' jel jelöl eleme H-nak. Ha nem a dolog, hanem a neve volna a halmaz eleme, az ebben az esetben így fejeznénk ki: $\{'\emptyset' \in H\}$. Másképp fogalmazva, az első esetben: $H = \{\emptyset\}$, a második esetben: $H = \{'\emptyset'\}$. Ilyen egyszerű kérdésekkel a matematikában nem foglalkoznak, a filozófiában viszont igen, mivel a filozófiai viták során gyakori a nevek és a nevek által jelölt dolgok összekeverése. Egy példa segít jobban megérteni mindezt.

Vegyünk egy római számot, egy tízes számrendszerbeli számot, és egy kettes számrendszerbeli számot tartalmazó egyelemű halmazt:$\{III\}\{3\}\{11\}$. Azonos-e ez a három halmaz egymással? Az első halmaz

[12] „Suppose for the moment that we do not assign any special interpretation to the identity symbol. We treat it like any other two place predicate. Let M be a structure for L and assume that Ref and LL are true in M. Call the relation defined in M by the conjunction of Ref and LL 'indiscernibility' (see Enderton 2000, for the definition of definability in a structure). There are three important points to note about the relationship between indiscernibility, and the relation $I(A, x, y)$. First, indiscernibility need not be the relation $I(A, x, y)$ (where A is the domain of the structure). It might be an equivalence relation E having the property that for some elements u, v, of the domain, $E(u, v)$ holds, although $I(A, u, v)$ fails. Secondly, there is no way to "correct for" this possibility. There is no sentence or set of sentences that could be added to the list beginning with Ref and LL that would guarantee that indiscernibility coincides with $I(A, x, y)$. This fact is usually expressed by saying that identity is not a first-order or 'elementary' relation. (For a proof, see Hodges 1983.) However, in a language such as set theory (as usually interpreted) or second-order logic, in which there is a quantifier 'all X' permitting quantification over all subsets of a given set, $I(A, x, y)$ is definable. Third, given any structure M for L in which Ref and LL are true, there is a corresponding structure QM, the 'quotient structure' determined by M, in which indiscernibility does coincide with $I(A, x, y)$. QM is obtained in roughly the following way: Let the elements of QM be the equivalence classes $[x]$, for elements x of M determined by indiscernibility in M. If F is a one-place predicate true in M of some object x in M, then define F to be true of $[x]$ in QM, and similarly for many-place predicates and constants. It can then be shown that any sentence true in M is true in QM, and vice versa. The existence of quotient structures makes it possible to treat the identity symbol as a logical constant interpreted in terms of $I(A, x, y)$." Deutsch, Harry, 'Relative Identity', The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/identity-relative/`

részhalmaza-e a római számok, míg a második az arab számok halmazának? A római számok halmaza és az arab számok halmaza számjegyeket tartalmaz, és nem számokat. E kettőnek nincs közös része, bár mindkettő számokat tartalmaz a szó elnagyolt értelmében. A kérdés tehát az, hogy a $\{III\}\{3\}$ halmazoknak mik az elemei, számok, vagy számjelek. A $\{III\}$ halmaz csak akkor része a római számok halmazának, ha számjel az eleme és nem szám, és ehhez hasonlóan a $\{3\}$ csak akkor része az arab számok halmazának, ha számjel az eleme, és nem szám. Ha számjelek az elemei, akkor nyilván nem azonosak egymással, ha viszont számok, akkor mindhárom halmaz azonos. A halmazelmélet tanítása szerint két halmaz azonos, ha egyazon elemeik vannak, azaz bármely x ami eleme $\{III\}$ -nak az $\{3\}$ -nak is eleme, és megfordítva. Figyeljünk föl arra, hogy a halmazok elemei nincsenek idézőjelben, így az elemek, az általuk megnevezett dolgokat képviselik. Ebből kiindulva jutunk el a válaszhoz. A $\{3\}$ halmaz nem részhalmaza az arab számok halmazának, viszont a $\{'3'\}$ halmaz már igen. Ez alapján a kérdésben szereplő három halmaz azonos.[13]

A második, amit fontos jól megérteni a halmazelmélet alkalmazásával kapcsolatban: az 'eleme' reláció időtlen reláció. Nem fordulhat elő, hogy $a \in H$ igaz kedden, de hamis szerdán, és az sem, hogy a '$a \in H$' formális nyelvi mondatban 'a' jel időben változtatja a jelentését, mert akkor H halmaz is változna az időben. De akkor miképpen értelmezhető a következő mondat: Cicero $\in$ a-nagy-szónokok-halmaza? Egyáltalán értelmes arról a halmazról beszélni, melynek elemei a nagy szónokok? Hiszen ezek közül sokan már nem is élnek, és még a jövőben is születhetnek nagy szónokok, kiknek a nevét sem ismerjük. Márpedig ha van olyan halmaz, ami a nagy szónokok halmaza, akkor minden dologról egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy eleme-e vagy sem, és a halmaz elemei nem bővülhetnek az idő múlásával, de ki sem hullhatnak elemek a halmazból a személyek elhunytával, mivel az eleme reláció időtlen viszony. Mi a megoldás?

A megoldás az, hogy a személyeket és más extra-matematikai objektumokat, négydimenziós létezőkként fogjuk föl. Ekkor pl. Cicero egész élete eleme egy halmaznak – beleértve a vele történt eseményeket, és azonkívül Cicero aktuális és diszpozicionális tulajdonságait, ezek időbeli változását – és ez a halmaz eleme a nagy szónokok halmazának. Épp így a jövőbeli nagy szónokok is a jövőbeli életükkel szerepelnek a halmaz elemi között – bár nem tudjuk, hogy kik azok. Ezt a szemléletet sokan joggal nevezik egyfajta 'isteni minden tudás' szemléletének, pedig nagyon is megszokott látásmód ez, csak a középiskolában nem figyelünk föl rá. Amikor a középiskolai fizikai tanulmányaink során az időbeli mozgást egy függvénnyel ábrázoljuk, akkor pontosan ezt a négydimenziós szemléletet alkalmazzuk. A mechanikai mozgás függvénnyel való leírásnál is időtlen viszonnyal írjuk le az időbeli viszonyokat, csak nem csodálkozunk rá ennek filozófiai jelentésére.

[13] „. . . egy halmazt nem változtatunk meg azáltal, hogy más módon (más nevekkel) adjuk meg elmeit, vagy ha valamely elemét többször említjük.” Ruzsa Imre, Matematika pszichológia szakos hallgatók számára - egységes jegyzet. [12], p.8.

Mi következik abból, hogy Cicero eleme a nagy szónokok halmazának? A nagy szónokok halmazát részletesebben így fejezhetjük ki:

A-nagy-szónokok-halmaza:= $\{x : x -$ nagy-szónok$\}$

azaz, mindazon x dolgok halmaza, mely x dolgokra igaz, hogy x nagy szónok – volt, van, vagy lesz. Az egyik lehetséges megfogalmazása ama ténynek, hogy Cicero egy ezek közül, a halmazelmélet nyelvén így fest:

$\exists x(x =$ Cicero $\& \, x \in$ a-nagy-szónokok-halmaza$)$

Ebben a megfogalmazásban x értékének lenni annyi, mint létezőnek lenni. Tehát, ha Cicero-t mint időben kiterjedt létezőt fogjuk föl, akkor létezőnek ismertünk el múltbeli eseményeket, jelen esetben Cicero életét. És ami igaz itt a múltra, igaz a jövőre is. Épp így létezőnek kell elfogadjuk a még meg sem született nagy szónokokat, és azok életét is. A filozófiában ezt az álláspontot, amelyik a jelennel megegyező ontológiai státuszt tulajdonít a múltnak és jövőnek, 'eternalizmus'-nak nevezik. Az ezzel vitatkozó koncepciót, miszerint csak a jelen létezik, a jövő még nem, a múlt pedig már nem, 'prezentizmus'-nak nevezik a metafizikai irodalomban. (Van olyan álláspont is, miszerint a múlt és a jelen létezik, csak a jövő nem.) A prezentizmus csak úgy egyeztethető össze a halmazelmélet alkalmazásával, hogy föltesszük, a múltbeli és a jövőben létező dolgok valamiképp a jelenben is léteznek, pl. absztrakt entitások. Filozófiai szempontból ez erőltetett megoldásnak tűnik, mivel Cicero egykori élete nem egy absztrakt entitás élete volt, hiszen absztrakt entitásként nem gyakorolhatna a mai napig hatást a jelenre.

Az eternalizmushoz és prezentizmushoz hasonlón kétféle módon értelmezhető az élőlények vagy makroszkopikus fizikai tárgyak léte. 'Perdurantizmus'-nak nevezik a négydimenziós tér-időben, időben kiterjedt dologként értelmezett élőlényeket vagy élettelen tárgyakat. Ezzel szemben az 'endurantizmus' az érzékelhető létezőknek olyan felfogása, amely szerint az élőlények és élettelen tárgyak a jelenben teljes egészében jelen vannak, nincsenek a múltba vagy jövőbe nyúló nyúlványaik.

A fizikai tárgyak endurantista és perdurantista felfogása közötti összefüggést a következőképpen fejezhetjük ki:

(perd.) $\forall x \forall y \forall t$: x, y fizikai tárgyak t időpontban $\rightarrow$ $.x = y \rightarrow \exists u \exists v(u = x$ időszelete $t -$ kor $\& \, v =$ y időszelete $t -$ kor $\& \, u = v)$

(end.) $\forall x \forall y \forall t$: x, y fizikai tárgyak t időpontban $\rightarrow$ $.\exists u \exists v(u = x$ időszelete $t -$kor $\& \, v = y$ időszelete $t -$ kor $\& \, u = v) \rightarrow x = y$

A fizikai tárgyak endurantista megközelítése szempontjából fontos hangsúlyozni, hogy a fizikai tárgyak mérhető (fizikai) jellemzői időben értelmezettek, mert a mérések időbeli események, a tér-idő egy pontján történnek. Csak némelykor hasznos leegyszerűsítésként fogadható el valamely tárgy jellemzőjének – pl. alakjának, helyének vagy hőmérsékletének – időtől független értelmezése. Ez még akkor is így van, ha egy tárgy anyagminőségéről beszélünk, amelyik mindaddig változatlan, ameddig a tárgy egyáltalán létezik.

Mindennek az a tanulsága, hogy ha matematikai eszközöket alkalmazunk a fizikailag érzékelhető (extra matematikai) világ leírása során, akkor az eternalizmus nagyon vonzó szemléletmód. A tudomány pontosan ezt teszi, tehát a tudomány eternalista. Az eternalizmus olyan jelentős képviselői, mint Quine vagy Russell épp azért voltak eternalisták, mert gondolkodásmódjukat mélyen meghatározta matematikusi látásmódjuk. A matematikai szemlélethez a fizikai tárgyak perdurantista felfogása áll közelebb, de összeegyeztethető az endurantizmussal is. Perdurantista megközelítésben a fizikai tárgyak és események megkülönböztetése azon alapul, hogy az előbbiek mindig rendelkeznek diszpozíciós tulajdonságokkal is, melyek megadják, hogy a fizikai tárgy környezetének változásaira miként reagál. Az endurantista értelmezés egyszerűbb, de csak akkor fogadható el, ha a személyek vagy makroszkopikus tárgyak változásai nem befolyásolják, hogy egy tárgy eleme a halmaznak vagy sem. Ahol a változás lényeges szerepet játszik, ott komplex struktúrák képviselik a tárgyakat. Ilyenkor a fizikai tárgyakat halmazok, relációk vagy véges automaták szimulálják, melyek a környezet időbeli bemeneti hatásaira, a tárgy állapotainak megfelelő időbeli kimenetet állítanak elő.

Azonosság és szükségszerűség

Vajon az azonosságot állító igaz mondatok azon túl hogy igazak, egyszersmind szükségszerűen is igazak-e? Vannak-e csak esetlegesen igaz azonossági állítások is? Az erre való válasz természetesen előfeltételezi a szükségszerűség és esetlegesség fogalmának értelmezését. A kérdéssel korábbi írásomban foglalkoztam, itt nem térek ki rá újra.

A bináris relációk alapvető tulajdonságai

Áttekintés

Vizsgálatunk tárgyát képező szavak viszonyokat írnak le, mégpedig olyan viszonyokat, melyek két különböző vagy nem különböző dolog között állnak fenn. Másképp fogalmazva e szavak logikai elemzésben olyan hiányos kifejezések, melyek két üres helyet tartalmaznak, és ha az üres helyeket szabályos módon kitöltjük, akkor mondatokat kapunk. Az ilyen szavakat klasszikus logikai elemzésben 'kétargumentumú predikátum'-nak, némelykor 'bináris reláció'-nak nevezik. Néhány példa rögtön érthetővé teszi mindezt. Értelmetlenség azt mondani minden összefüggés nélkül, hogy 'Péter kisebb.' viszont értelmes az a mondat, hogy 'Péter kisebb mint Pál.' A 'Péter kisebb' mondat csak olyan helyzetben értelmes, ha tudjuk, hogy valakiről beszélünk, adott esetben Pálról, és arról a kérdésről, hogy ki az a családban aki kisebb mint Pál. Ilyen esetben értelmes lehet egy egyszavas válasz is, vagy egy töredékes kifejezés is, mint az, hogy 'Péter kisebb.' Mindezzel azt emeltem ki, hogy a 'kisebb' szó viszonyt ír le, amelyik két dolog között állhat fenn. Ilyen esetekre gondolok, hogy 'A szomszéd háza kisebb mint a polgármester háza'; 'Az én autóm kisebb mint a te autód. 'Ez a körte kisebb mint az asztalon lévő körte'. A 'kisebb' szó használatát logikai-grammatikai szempontból tehát úgy jellemezhetjük, hogy 'x kisebb mint y' ahol az x és y változók helyén az előbb említett egyedi dolog: ház, autó, gyümölcs vagy 'Péter' és 'Pál' szerepelhet. Amikor azt állítjuk, hogy Péter kisebb mint Pál, akkor személyek közötti viszonyról beszélünk, és nem magyar személynevek viszonyáról. Magyar személyneveket használunk ennek a viszonynak a leírására, de amiről beszélünk, azok nyelven kívüli dolgok. Az 'egyforma, felcserélhető, hasonló, egyenlő, azonos' szavak az előbbi példához hasonlóan kétargumentumú predikátumok, tehát használatuk sémája ilyen: x egyforma y-al; x felcserélhető y-al; x hasonló y-hoz. Más betűket is használhatunk a szerkezet kifejezésére, pl. így: z egyenlő v-vel, vagy w_1 azonos w_2-vel. Még egy technikai, jelölésbeli kérdésre kell kitérjek, ami néha nehezíti a megértést. Azt a logikai-grammatikai szerkezetet, hogy 'x idősebb mint y' gyakran célszerű ilyen formában fölírni: idősebb mint(x, y). Az 'idősebb' viszonyszó helyére egy általánosságot kifejező nagybetűt írva ezt kapjuk: $\Re(x, y)$. Ezt tehát úgy kell érteni, hogy $x\Re$ viszonyban áll y-al, ahol '$\Re$' jelen esetben az 'idősebb mint' kifejezést jelenti. Ennek a jelölésmódnak a tömörség és az áttekinthetőség a haszna.

Tekintsük azt a predikátumot, hogy 'testvére'. Ennek a logikai-grammatikai szerkezete ilyen: x testvére y-nak. Ezen kívül arra a kérdésre is válaszolnunk kell, hogy mik állhatnak x és y helyén? Egyedi dolgok állhatnak, de ennél több is igaz. Nem állhatnak almák és körték, kavicsok vagy üveggolyók, viszont élőlények igen. Sőt még ennél többet is tudunk. Tudjuk, hogy ha x testvére y-nak, és x személy, akkor y-is

személy, vagy ha z testvére w-nek és z kutya, akkor w is kutya. A szó egy átvitt értelmében beszélhetünk testvérvárosokról is, de ez inkább csak színesíti a használatot. Nem követünk el súlyos hibát, ha úgy tekintjük, hogy a 'testvér' szó használata csak élőlények között értelmes. Úgy fejezhetjük ezt ki logikai szaknyelven, hogy a 'testvér' predikátum terjedelme élőlények rendezett párjainak halmaza. Ez semmi mást nem jelent, mint hogy mindig csak két dolog között áll fenn ez a viszony, és e dolgok élőlények. Még mást is tudunk a 'testvére' szó által meghatározott relációról. Azt is tudjuk, hogy szimmetrikus reláció, mert ha x testvére y-nak, akkor y is testvére x-nek. De ugyanakkor nem reflexív, mert senki sem testvére önmagának, azaz ha valaki egyedüli gyerek, akkor nincs testvére. Ennek viszont ellentmond, ha tranzitív relációnak tekintjük. Ez a következőképpen látható be. Bármely édestestvérekre, ha x testvére y-nak és y testvére z-nek, akkor x is testvére z-nek. Ez a tranzitív tulajdonság igaznak tűnik az édestestvérek halmazán. Ebből következik, hogy ha A és B testvérek, akkor B és A is testvérek, de mivel A testvére B-nek, és B testvére A-nak, akkor A is testvére kéne legyen A-nak, a tranzitív tulajdonság következtében. Ez pedig azt jelentené, hogy a 'testvére' reláció reflexív, amit az előbb kizártunk. Célszerű tehát a szó eredeti jelentését kissé megváltoztatva reflexív relációnak tekinteni a 'testvére' relációt, hogy a tranzitivitás tulajdonsága is érvényes legyen az édestestvérek között. Az így módosított értelemben a 'testvére*' reláció tehát reflexív is, szimmetrikus is és tranzitív is. Ezzel szemben aszimmetrikus reláció a 'felesége' vagy 'gyermeke', mert senki sem felesége vagy gyermeke önmagának, és ha x felesége y-nak, akkor fordítva nem áll; valamint ha z_1 gyermeke z_2-nek akkor z_2 nem gyermeke z_1-nek.

Lássunk egy másik példát. Az 'idősebb' kétargumentumú predikátum terjedelmébe személyek, növények és állatok is tartoznak, de épp úgy hajók, városok vagy borok és vallásos hitek vagy hangszerek, és zenei irányzatok, viszont nem tartoznak számok, vagy halmazok. Tudjuk azt is, hogy tranzitív relációt határoz meg az 'idősebb' viszony. Ez azt jelenti, hogy ha x idősebb mint y, és y idősebb mint z, akkor x is idősebb mint z. Az 'őse' predikátum által meghatározott reláció is tranzitív, hiszen ha x-nek őse y és y-nak őse z, akkor x-nek őse z is. Érdekes a következő példa. Különbözőféle relációkat határoz meg a 'szereti' predikátum – másképp fogalmazva a 'szereti' viszony – attól függően, hogy milyen emberek köréről beszélünk. Az önző, önelégült emberek halmazán ez egy pusztán reflexív reláció, mert az ilyen emberek csak önmagukat szeretik, a boldogtalan szerelmesek halmazán viszont aszimmetrikus, mert ha az egyik szereti a másikat, a másik sajnos nem szereti őt. Kiegyensúlyozott emberek baráti társaságában, ahol mindenki szereti a másikat és önmagát is, reflexív is és szimmetrikus is. Ez a példa bemutatta azt, hogy egy kétargumentumú predikátum – mint amilyen a 'szereti' – különböző halmazokon más-más bináris relációt határoz meg. A 'bináris' reláció dolgok párjai között áll fenn, ezzel szemben mondjuk a 'futballcsapat' egy értelmezése tizenegy tagú reláció a játékosok halmazán. Természetesen másképp is értelmezhetjük

a klubokat, beleértve a futballcsapatokat is. Ezek a legegyszerűbb esetben halmazok, más esetben, ha még a portások, takarító személyzet és az épületek is részei a modellnek, akkor meglehetősen bonyolult matematikai struktúrát kapunk.

Eddig egyedi tulajdonságait ismertük meg a relációknak. Vannak azonban olyan relációk is, melyekre több reláció tulajdonság is teljesül. Ezekre is mutatok néhány példát.

Milyen reláció az egybevágóság a geometriában? Nyilván reflexív – mert minden alakzat egybevágó saját magával – szimmetrikus – ha az egyik egybevágó a másikkal, akkor a másik is az egyikkel – és tranzitív, mert ha az első egybevágó a másodikkal, és a második a harmadikkal, akkor az első is a harmadikkal. Az ilyen relációkat, melyekre ez a három követelmény egyaránt teljesül, 'ekvivalencia reláció'-nak nevezik. Ilyen a módosított értelmű 'édestestvére' reláció is. A jól olvasható festékfoltok egy halmazán ekvivalencia relációt határoz meg a 'betű' fogalma. Ez azonban csak akkor igaz, ha nem érdekelnek bennünket a betűtípusok, vagy a kézírás azonosítása. Hasonlóan ehhez a hangok halmazán egy ekvivalencia osztályt határozza meg a 'szó' fogalma, ha csak a jelentés érdekel bennünket, és nem érdeklődünk a kiejtés által kifejezett érzelem iránt. Ha játékvasutunk van, akkor a sínek között is meghatározhatunk egy ekvivalencia relációt. Egyformák lesznek az egyenlő hosszúságú és azonos alakú sínek. Ekkor az egyforma sínek egymással fölcserélhetők is lesznek. Egyformák egymással az azonos működésű és teljesítményű, valamint azonos fajta foglalatot igénylő villanykörték, de épp így az egyforma esernyők vagy sapkák egy bolt árukészletében. Vajon az egyforma dolgok minden esetben fölcserélhetők egymással? Később visszatérek erre a kérdésre.

Relációk és predikátumok

A relációknak többféle értelmezése is használatos. Röviden bemutatom ezeket, mielőtt tovább haladok. Alapvetően a bináris relációkkal foglalkozom, de ennek megértéséhez szükséges néhány elvont fogalom használata. Ilyenek a 'rendezett pár' és a halmazok Descartes szorzata. A rendezett párok jelek kéttagú sorozatai, melyek esetében megkülönböztetjük a jelek sorrendjét. Tehát $\langle a, b\rangle$ különbözik $\langle b, a\rangle$-tól és $\langle a, a\rangle$ különbözik $\langle a\rangle$-tól. Két halmaz Descartes szorzatán pedig rendezett párok olyan halmazát értjük, melyek első eleme az első halmazba, második eleme a második halmazba tartozik. Pl. legyen a két nem üres halmaz A és B a következő módon meghatározott. $A = \{a, b\}$ és $B = \{a, c\}$ Ekkor $A \times B$ jelöli a halmazok Descartes szorzatát (direkt szorzatnak is nevezik), ahol $A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$ A legegyszerűbb értelmezés rendezett párok valamely halmazát tekinti relációnak. Ekkor a rendezett párok halmaza, mint egy kétargumentumú predikátum terjedelme értelmezendő. Egy másik értelmezés szerint a

relációk olyan rendezett hármasok: $\langle A, B, S\rangle$ ahol S részhalmaza $A \times B$-nek. S lehet üres halmaz is, és ha A és B közül az egyik üres, akkor S is üres. Ezt 'üres reláció'-nak nevezzük. Ebben a felfogásban 'homogén relációnak' nevezik az olyan relációkat, ahol A és B azonosak. Bármely bináris reláció úgy is tekinthető mint két halmaz egymáshoz való rendelése, ahol a hozzárendelést írják le az S halmaz elemeit jelentő rendezett párok. Más felfogásban éppen a leképezés az alapfogalom, és a relációkat értelmezik a leképezés fogalmának alkalmazásával. Én most egy harmadik utat követek. A következőkben a (bináris) relációk úgy értelmezettek, min egy $\langle M, S\rangle$ rendezett pár, ahol S részhalmaza $M \times M$-nek. Az előbb említett felfogásból nézve ezek tehát homogén relációk. Úgy is felfoghatjuk, hogy ebben az értelmezésben M az A és B halmazok egyesítése. Ettől a felfogástól csak a leképezések ábrázolásakor térek el, melyeket inhomogén relációknak fogom tekinteni. A relációkat mint 'predikátumok' által meghatározott struktúrákat értelmezem. Pl. a 'barátja' predikátum más és más barátokat határoz meg attól függően, hogy emberek mely körére szűkítjük le a vizsgálódás körét. A relációk tehát a mostani értelmezésben teljesen meghatározott matematikai struktúrák, ami azonban nem zárja ki, hogy maguk a relációk is rendszert alkossanak. Könnyen belátható, hogy a főváros lakosain értelmezett 'testvére' relációnak egy kibővítése az ország lakosain értelmezett 'testvére' reláció. És még ez utóbbi reláció is tovább bővíthető a kontinensek vagy a bolygó lakóinak irányába. Ennél is tovább lépve beszélhetünk az összes olyan relációról, melyek a 'testvére' relációhoz hasonlóan szimmetrikusak. Így eljutunk a 'reláció forma' fogalmához. Megjegyzem, hogy a következő gondolatok lényegét nem érinti, hogy melyik reláció felfogást fogadjuk el. Célszerű rögzíteni néhány további alapfogalmat a teljesség igénye nélkül.

Néhány fontosabb relációelméleti alapfogalom

$\Re$-üres reláció M halmazon := M halmaz semelyik két elem között nincs kapcsolat.

> $\Re$-reláció valamely x és y eleme összehasonlítható := ha vagy x $\Re$-relációban van y-al vagy fordítva, y -relációban van x-el. Röviden $x\Re y$ vagy $y\Re x$. Nem zavarjon meg bennünket, hogy a bináris relációkat kétféle módon is szokták jelölni: $x\Re y$ vagy $\Re(x, y)$.
>
> $\Re^{-1}$-reláció az eredeti $\Re$ reláció megfordítása := x akkor van kapcsolatban y-al, ha az eredeti reláció esetén $y\Re x$. Szokták ezt a reláció *konverzének* vagy *inverzének* is nevezni. Pl. a 'gyermeke' reláció megfordítása a 'szülője' reláció.
>
> $\breve{\Re}$-reláció az eredeti $\Re$ reláció tranzitív lezártja := Az eredeti $\Re$ relációt olyan módon egészítjük ki, hogy igaz lesz bármely három x, y, z elemére, hogy ha x kapcsolatban van y-al és utóbbi z vel, akkor x is kapcsolatban – relációban – van z-vel. Ennek a nem könnyen érthető meghatározásnak azért nagy

a jelentősége, mert segítségével értelmezhető az 'őse' vagy 'leszármazottja' reláció a 'gyermeke' reláció alapján. Ha x leszármazottja y-nak, akkor x vagy gyermeke y-nak, vagy gyermeke gyermekének, vagy gyermeke valamely gyermeke egy gyermekének, és a sor még tovább is folytatható.

A relációk szemléletesen ábrázolhatók táblázatokkal és nyilakkal is. Utóbbiakat a matematikában irányított gráfoknak nevezik. Legyen M halmaz két eleme 'a' és 'b' melyek között fennáll az $a\Re b$ reláció. (Mint említettem, ez így is felírható: $\Re(ab)$.) Ezt grafikusan is ábrázolhatjuk: $a \to b$. Ha fordított irányban is igaz a kapcsolat – $a\Re b$ ÉS $b\Re a$ – akkor így: $a \leftrightarrow b$. Ha viszont 'a' elem önmagával van kapcsolatban, akkor a belőle kiinduló nyíl önmagába tér vissza, és így mintegy hurokkal jelölhetjük ezt a relációt. A reflexív relációkat ilyen módon ábrázolva minden elemükön hurkot találunk.

Az alábbi táblázatokban szereplő '1' jel azokra a párokra áll fenn, amelyek között fennáll a reláció. A párokat vízszintes-függőleges sorrendben kell kiolvasni. Vajon miért írtam ugyanolyan sorrendben az alaphalmaz elemeit, mind a vízszintes, mind a függőleges oszlopban? Ezért, hogy szép szabályos ábrákat kapjunk bizonyos esetekben. Így a táblázatok ránézésre mutatják a relációk nevezetes tulajdonságait. Ha pl. egy reláció reflexív, akkor a relációt ábrázoló táblázat átlójában mindenütt '1'-jelet látunk. Ha nem azonos sorrendben lennének fölírva a táblázat vízszintes és függőleges oszlopában az elemek, akkor ez nem látszana ilyen szépen.

$\Re_1$	a	b	c	d
a	1			
b		1	1	
c			1	
d	1			1

3.3. táblázat. Reflexív reláció

Ahelyett, hogy azokat a rendezett párokat adom meg, amelyekre fennáll a reláció, megadhatom azokat is, amelyekre nem áll fenn, minden információveszteség nélkül. Természetesen a szokásokon túl, olyan szempontok is vezérelhetnek, hogy minél egyszerűbb legyen a táblázat. Ezért, ha majdnem minden négyzetbe '1'-et kell írnunk, akkor célszerűbb azokat a helyeket megadni, ahova nem kell '1'-et írnunk. Az is megeshet, hogy azoknak a pároknak a száma, amelyekre a reláció fönnáll, véges, ám azoké, amelyekre nem áll fenn, végtelen. Ilyenkor nyilván csak az egyik megadási mód a célszerű. Táblázat helyett megadhatjuk azon párok halmazát, amelyekre a reláció fönnáll (vagy nem áll fönn), valamilyen szabállyal is. Most a bináris relációk tulajdonságait csak táblázattal mutatom be, de célszerű gyakorlás képpen gráfokkal is ábrázolni a példákat. Legyen adott egy M halmaz melynek négy eleme az ABC első négy betűje által jelölt négy különböző dolog. Azaz $M = \{a, b, c, d\}$

$\Re_2$	a	b	c	d
a	1			
b			1	
c		1	1	
d				

$\Re_1$ reláció reflexív de nem szimmetrikus, mert d kapcsolatban áll a-val, de a nem áll kapcsolatban d-vel, és b kapcsolatban áll c-vel, de c nem áll kapcsolatban b-vel. Általánosságban: $\Re$ reflexív egy M halmazra nézve pontosan

akkor ha M bármely x elemére $\Re(x, x)$. Az azonosság egy olyan viszony – az egyetlen ilyen viszony – amely reflexív és csak reflexív relációt határoz meg az élőlények és élettelen tárgyak halmazain. Mivel bármely tárgy csak önmagával azonos, ezért a tárgyak valamely M halmazán ennek a relációnak a meghatározásához nincs szükség az azonosság fogalmára. Egyszerűen az M halmazbeli $\langle x, x\rangle$ párok halmaza. A reflexív reláció ellentéte az irreflexív reláció. Akkor az átlóban csupa 0-t látunk.

$\Re_3$	a	b	c	d
a			1	1
b				
c				1
d				

3.5. táblázat. Tranzitív reláció

$\Re_2$ reláció szimmetrikus, de nem reflexív, mert sem b sem d nincs kapcsolatban önmagával. Viszont M teszőleges x és y elemére, ha x kapcsolatban áll y-val akkor fordítva is igaz, azaz y is kapcsolatban áll x-el. Általánosságban: szimmetrikus egy M halmazra nézve pontosan akkor, ha M bármely x, y elemére $\Re(x, y)$, akkor $\Re(y, x)$. Ennek ellentéte az aszimmetrikus reláció. Ekkor a reláció x és y között legfeljebb csak az egyik irányban állhat fenn. Részleges ellentéte az antiszimmetrikus reláció. Ekkor ha x és y között mindkét irányban fennáll a reláció, akkor $x = y$.

$\Re_3$ reláció sem nem szimmetrikus, sem nem reflexív, viszont tranzitív, mert M teszőleges x, y és z elemére, ha x kapcsolatban áll y-val és yz-vel, akkor x is kapcsolatban áll z-vel. Általánosságban: $\Re$ tranzitív egy M halmazra nézve pontosan akkor ha M bármely x, y, z elemeire ha $\Re(x, y)$ és $\Re(y, z)$ akkor $\Re(x, z)$. $\Re_4$ reláció szimmetrikus, reflexív és tranzitív, melyet ekvivalencia relációnak neveznek. Figyeljünk föl arra, hogy az eredeti M halmazt olyan egymással nem keveredő részekre oszthatjuk, hogy azokon belül bármely két elem kapcsolatban fog állni egymással. Jelen esetben ezek az $\{a, b\}$ és $\{c, d\}$ részhalmazok.

$\Re_4$	a	b	c	d
a	1	1		
b	1	1		
c			1	1
d			1	1

3.6. táblázat. Ekvivalencia reláció

$\Re_5$	a	b	c	d
a	1	1		
b	1	1	1	
c		1	1	1
d			1	1

3.7. táblázat. Tolerancia reláció

Bebizonyítható, hogy bármely ekvivalencia reláció M alaphalamaza felosztható ilyen módon. Ezeket a részhalmazokat *ekvivalencia osztályoknak* nevezik. Tetszőleges két elem pontosan akkor van ekvivalencia relációban egymással, ha van olyan ekvivalencia osztály, melynek mindketten elemei. $\Re_5$ reláció szimmetrikus és reflexív, viszont nem tranzitív. Az ilyen relációkat tolerancia relációnak nevezik. A relációk most bemutatott tulajdonságai – reflexív, szimmetrikus, tranzitív – azért fontosak, mert ha egy alaphalmazon érvényesek, akkor azon belül minden szűkítésén is érvényesek. Ezek a reláció tulajdonságok tehát a szűkítést tekintve öröklődnek.

Két egyszerű példa

(i.) Rendeljük minden egész számhoz a kettővel való osztási maradékát. Ekkor egy olyan ekvivalencia relációt kapunk, ahol bármely két páros, illetve bármely két páratlan szám egyazon ekvivalencia osztályba tartozik. Két szám akkor lesz relációban, ha az osztási maradéka zérus, vagy ha az osztási maradéka nem zérus. Vegyük alapul csak az első tíz természetes számot, a nullát is beleértve. M a természetes számok egy részhalmaza, L a dolgokhoz rendelt jegyek – osztási maradékok – halmaza. $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $L = \{0, 1\}$ A következő 3.8 táblázat mutatja a számokat és alatta az osztási maradékot. [14]

Szám	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
osztási maradék	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

3.8. táblázat. Ekvivalencia reláció

mod	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1		1		1		1		1	
1		1		1		1		1		1
2	1		1		1		1		1	
3		1		1		1		1		1
4	1		1		1		1		1	
5		1		1		1		1		1
6	1		1		1		1		1	
7		1		1		1		1		1
8	1		1		1		1		1	
9		1		1		1		1		1

3.9. táblázat. Ekvivalencia reláció

Ha másképp rendezzük sorba az alaphalmaz elemeit, szemléletesebb ábrát kapunk. Két ekvivalencia

[14] Részletesen tárgyalja a relációk típusait Szakadát István: Reláció, szintaktika, szemantika (2004) in: Tudományos és Műszaki Tájékoztatás, 51. évf., 2004/12, p. 531-540.

osztályunk van: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ és $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ Figyeljük meg, hogy két szám ekvivalens – azonos a kettővel való osztási maradéka – ha egy ekvivalencia osztályba tartoznak. (ii.) Az 'azonos' kétargumentumú

mod	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9
0	1	1	1	1	1					
2	1	1	1	1	1					
4	1	1	1	1	1					
6	1	1	1	1	1					
8	1	1	1	1	1					
1						1	1	1	1	1
3						1	1	1	1	1
5						1	1	1	1	1
7						1	1	1	1	1
9						1	1	1	1	1

3.10. táblázat. Ekvivalencia osztályok

predikátum terjedelmét reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk alkotják. Beletartozik az összes 'hasonlóság' és 'egyformaság' reláció közös részét képező reflexív reláció, amit annak geometriai alakja alapján 'diagonális reláció'-nak is neveznek. (Ha nem azonos sorrendben lennének fölsorolva az elemek a relációt megadó táblázat soraiban és oszlopaiban, nem lenne értelme az elnevezésnek.) Az egyformaság és a hasonlóság a jeleken kívüli világ leírásakor élőlények vagy élettelen tárgyak közötti viszony. Ugyanezen tartományon az azonosság reláció használata az egyformaság elfajulása, annak szélső esete, a diagonális reláció. Ezért az azonosság sem a '=' jel két oldalán álló jelek, hanem a jelek által jelölt dolgok közötti viszony. Ezek adott esetben lehetnek fizikailag érzékelhető tárgyak, de lehetnek számok vagy halmazok is. Az '=' jel mást és mást jelent a geometriában vagy a programozási nyelvekben, bár a jelentések hasonlóak. Két háromszög oldalainak egyenlő hosszúsága semmiképp sem azt jelenti, hogy a két oldal azonos volna, csupán azt, hogy a hosszúságuk azonos. Hasonlóképpen, két fizikai tárgy egyenlő súlya vagy tömege sem azonosságot, csupán a fizikai jellemzőjükhöz rendelt számok azonosságát jelenti. Éppen ebben van a mérések haszna. A programozási nyelvekben a '=' jel gyakran nem relációt, hanem értékadást jelent.

Az azonosság egy nem triviális felcserélhetőséget (matematikai nézőpontból ekvivalencia relációt) határoz meg adott nyelven belül a jelek, számok, formulák világában, és amennyiben a jelek a külső fizikailag érzékelhető világra vonatkoznak, szintén nem triviális relációt a fizikai tárgyak világában. Hogy ez a reláció mennyire nem triviális, azt a tudomány és technikatörténet bizonyítja. Az azonosság által meghatározott fölcserélhetőség épp úgy kérdéseket vethet fel a jelek világán belül, mint az egyformaság és fölcserélhetőség viszonya a fizikai tárgyak világában.

Hasonlóságtól az egyformaságig

Áttekintés

A toleranciareláció reflexív és szimmetrikus, mert minden dolog hasonlít önmagához, és ha az egyik dolog hasonlít a másikhoz, akkor a másik is hasonít az egyikhez. Ha a toleranciát mint a 'hasonlóság' matematikai megfogalmazását tekintjük, akkor vitatható lehet a reflexivitás tulajdonsága. Ugyanis egy egyenesen irreflexív (irreflexív=nem reflexív), de szimmetrikus relációt is a hasonlóság kifejezőjének tarthatjuk. Ilyen reláció például a 'rímel' a magyar szavak halmazán. „Nyilván, hogy ha x szó rímel y szóval, akkor ez fordítva is igaz. A verselési hagyományok szerint azonban egy szó önmagával nem rímelhet, tehát ez a reláció irreflexív. ... Bár ellenpéldákat lehet találni egyes költőknél. Mint a Tinódi százötven 'valá' -ja ...".[15] Nyilvánvaló, hogy egy irreflexív, de szimmetrikus reláció nem lehet tranzitív. Konstruálható ugyanis olyan rímsorozat, ahol az egymást követő szavak rímelnek egymással, az első és utolsó azonban nem. Ha azonban el is vetjük a reflexivitást, a kapott reláció éppúgy megadható lesz, M halmaz elemeinek L halmaz elemeihez, a jegyekhez való hozzárendelésével, mint egy reflexív reláció.

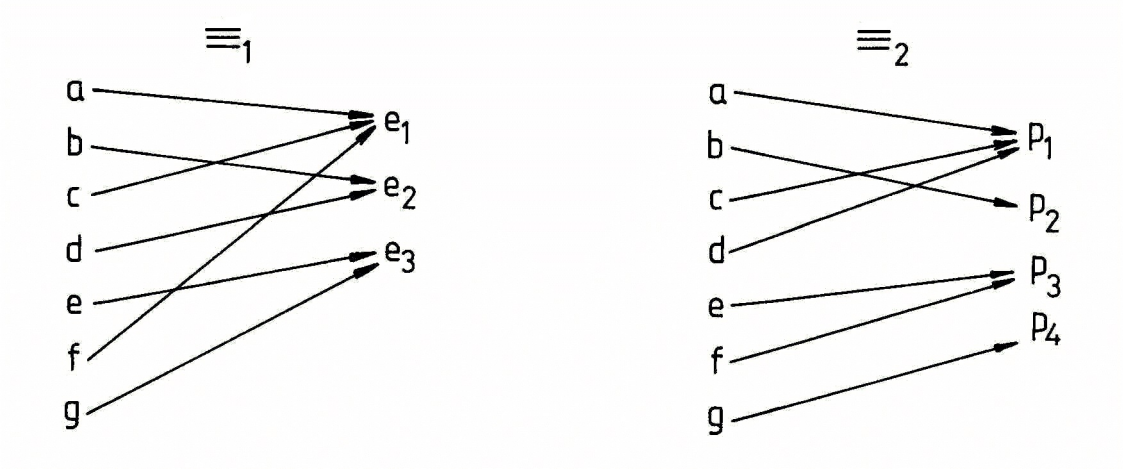
Az egyformaságot és hasonlóságot használati tárgyak, nyelvek, szavak, szokások, emberek és csillagok, általában tetszőleges objektumok között értelmezhetjük. Az egyformaság a hasonlóság szélső esete. „A hasonló objektumok nem bonthatók fel élesen olyan osztályokra, ahol az egy osztályon belüliek hasonlók, a különböző osztályokba tartozók pedig nem. A szituációk sokkal elmosódottabbak, nincsenek éles határok. Minden halmazbeli elem tartalmaz bizonyos információt a hozzá hasonló elemekről. De nem tartalmaz minden információt mint az egyforma elemek esetében. Nem úgy áll a probléma, hogy minden vagy semmi, teljes infor-máció vagy teljes információtlanság. Különböző fokozatai lehetnek annak az információnak, amit az egyik elem hordoz más elemekről."[16] Lássunk néhány példát.

A féltestvére reláció

Rendeljük az $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$-beli emberekhez hozzá az édesanyjukat, és legyenek egyformák azok az emberek, akiknek azonos az édesanyjuk. Az anyák halmaza $L_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Ezt a relációt $\equiv_1$ jelöli. Ehhez hasonlóan legyenek egyformák azok az emberek, akiknek azonos az édesapjuk. Az apák halmaza $L_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Utóbbi relációt $\equiv_2$ jelöli. Ebben a példában a szülők és gyerekek közötti reláció inhomogén reláció, mivel két különböző alaphalmazon van értelmezve a kapcsolat, míg a gyerekek relációi homogén relációk. Az emberek és szüleik relációit mutatja az alábbi a 3.5. ábra:

Ábrázoljuk táblázatokkal ezt a két ekvivalencia relációt. Az első ($\equiv_1$) azokat mutatja akiknek közös az

[15] Srejder i.m. 168. p.
[16] Srejder i.m. 153. p.



3.5. ábra. Testvére reláció

édesanyjuk, a második ($\equiv_2$) azokat akinek az édesapjuk.

$\equiv_1$	a	b	c	d	e	f	g
a	1		1			1	
b		1		1			
c	1		1			1	
d		1		1			
e					1		1
f	1		1			1	
g					1		1

3.11. táblázat. Közös édesanya

$\equiv_2$	a	b	c	d	e	f	g
a	1		1	1			
b		1					
c	1		1	1			
d	1		1	1			
e					1	1	
f					1	1	
g							1

3.12. táblázat. Közös édesapa

A táblázatokat más módon is elkészíthetjük, úgy hogy más sorrendben írjuk föl a halmazok elemeit.

Valójában ezek a relációk nem pontosan a 'féltestvére' kapcsolatot írják le, mivel úgy tekintik, hogy az egyedüli gyereknek is van féltestvére, éspedig önmaga. Tehát ezek a relációk egy reflexív relációval kibővített féltestvére relációt ábrázolnak. Ez hasznos a matematikai elegancia szempontjából, mert egyszerűbbé teszi az összefüggések tárgyalását. Ezek azután ábrázoljuk az 'édestestvére' és a 'féltestvére' relációt egy-egy táblázattal.

$\equiv_1$	a	c	d	b	e	f	g
a	1	1	1				
c	1	1	1				
d	1	1	1				
b				1	1		
e				1	1		
f						1	1
g						1	1

3.13. táblázat. Azonos édesanya

$\equiv_2$	a	c	d	b	e	f	g
a	1	1	1				
c	1	1	1				
d	1	1	1				
b				1			
e					1	1	
f					1	1	
g							1

3.14. táblázat. Azonos édesapa

Az 'édestestvére' reláció ekvivalencia reláció (azzal a kis hibával, hogy mindenki testvére önmagának), míg a 'féltestvére' reláció tolerancia reláció. Mindkét relációt meghatározzák az ekvivalencia illetve a tolerancia osztályok. Két elem akkor és csak akkor ekvivalens, ha van őket tartalmazó *ekvivalencia osztály*, és ehhez hasonlóan, két elem akkor hasonlít egymásra – akkor van tolerancia relációban – ha van őket tartalmazó *tolerancia osztály*. Az előbbiek a $\{a, c\}\{b\}\{d\}\{e\}\{f\}\{g\}$ halmazok, míg a tolerancia osztályok a következők: $\{b, d\}\{d, c, a\}\{c, a, f\}\{f, e\}\{e, g\}$. A példák elektronikus formában is tanulmányozhatók. Innen letölthetők:

`http://ferenc.andrasek.hu/modellek/hasonlosag.xls`

A látás

Legyen 'd' a szem felbontóképességének határa, olyan kis érték, amelyen belül lévő pontokat a szem nem tudja megkülönböztetni egymástól. Vegyünk fel egy egyenes szakaszon n osztáspontot úgy, hogy a szomszédos pontok egymástól való távolsága kisebb legyen, mint d. A szakaszon lévő egymás melletti pontok nyilván nem különböztethetők meg egymástól, de a szakasz távolabbi pontjai már igen. Nevezzünk két pontot hasonlónak, ha a szakaszon lévő távolságuk kisebb, mint d. A pontokat nevezzük el az első tíz természetes számmal, és tételezzük föl, hogy a szem azon pontokat tudja megkülönböztetni, amelyek három egységnél távolabb vannak. A három egységen belüli pontokat így hasonlónak fogjuk tekinteni. Ennek a relációnak a táblázatát mutatja a következő ábra. Az 3.17. ábrán jól látszanak az egymásba átfolyó tolerancia

édestestvére	a	c	b	d	e	f	g
a	1	1					
c	1	1					
b			1				
d				1			
e					1		
f						1	
g							1

3.15. táblázat. Édestestvére reláció

féltestvére	b	d	c	a	f	e	g
b	1	1					
d	1	1	1	1			
c		1	1	1	1		
a		1	1	1	1		
f			1	1	1	1	
e					1	1	1
g						1	1

3.16. táblázat. Féltestvére reláció

osztályok. Két pont összemosódik – nem megkülönböztethető – ha egy tolerancia osztályba esik.

Felbontóképeeség	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1							
1	1	1	1	1						
2	1	1	1	1	1					
3		1	1	1	1	1				
4			1	1	1	1	1			
5				1	1	1	1	1		
6					1	1	1	1	1	
7						1	1	1	1	1
8							1	1	1	1
9								1	1	1

3.17. táblázat. A szem felbontó képessége

Talán Wittgenstein volt az első, aki fölfigyelt a tolerancia relációk struktúrájára a nyelvi jelentés tanulmányozása során. A természetes nyelv képlékeny jelentés hálózatát sokkal jobb közelítéssel írhatjuk le tolerancia relációkkal, mint ekvivalencia relációkkal.[17]

[17] „66. Vizsgáld meg például egyszer azokat a folyamatokat, amelyeket 'játékok'-nak nevezünk. A táblajátékokra, kártyajátékokra, labdajátékra, küzdősportokra stb. gondolok. Mi a közös mindezekben? – Ne mondd, hogy 'Kell valami közösnek lennie bennük, különben nem hívnák őket 'játékok'-nak' – hanem nézd meg van-e valami közös mindben. Mert ha megnézed őket, nem fogsz ugyan olyasmit látni, ami mindben közös, de látsz majd hasonlóságokat, rokonságokat, mégpedig egész halomnyit. Szóval: ne gondolkozz, hanem nézz! – Nézd meg például a táblajátékokat és kiterjedt rokonságukat. Majd térj át a kártyajátékokra: itt sok megfelelést találsz ama első osztállyal, de sok közös vonás eltűnik, sok más viszont előtűnik. Ha pedig áttérünk a labdajátékokra, akkor egynémely közös vonás megmarad, de sok el is vész. – Minden játék szórakoztató'? Hasonlítsd össze a sakkot a malommal. Vagy talán mindenütt van nyerés és vesztés, és mindenütt versengenek a játékosok? Gondolj a pasziánszokra. A labdajátékokban van nyerés és vesztés; de ha egy gyermek a labdát a falnak dobja majd ismét elkapja, akkor eltűnik ez a vonás. Nézd meg,

Egyformaság és fölcserélhetőség

Áttekintés

A józan ész nem sorolja a szilárd testek tulajdonságaihoz térbeli helyüket, és egyes tulajdonságaik megváltozását sem, ha azok nem fontos változások. Egy asztal ugyanaz marad, ha máshová teszem, ha haraggal nézek reá, vagy más leltári jegyet ragasztok rá. Ezeket külső tulajdonságoknak nevezik, míg az asztal belső tulajdonságához tartozik, hogy a politúr egy kicsit megkopott vagy sem, vagy milyen az asztallábak formája és anyagminősége. Amennyiben kopottnak tartjuk, úgy tekintjük, hogy egy tulajdonsága megváltozott, nem pedig, hogy egy új asztal keletkezett. Képzeljük egy, hogy egy kerékpár alkatrészeit az évek során egymás után kicseréljük, a kicserélt hibás alkatrészeket pedig egy zsákban összegyűjtjük. A kerékpár időben szomszédos állapotait mindaddig hasonlónak tartjuk, amíg apró alkatrészeket cserélünk ki rajta. Mindaddig úgy véljük ez az eredeti kerékpár, csak felújítottuk. Mit mondunk azonban, ha a kerékpár vázát vagyunk kénytelenek kicserélni? Ekkor új kerékpárunk lesz és a régi megszűnik létezni, avagy a régit használjuk tovább új vázzal? És mi van a zsákban? Mi történik, ha a zsákban lévő kopott, hibás alkatrészekből összeszerelünk egy kerékpárt, ekkor melyik a mi kerékpárunk?[18] Nincs az ehhez hasonló kérdésekre általános válasz, mert nincs a tárgyaknak és a gyakorlati használattól és nyelvtől független lényege. Hogy mely szempontok alapján, mely jellemzők, mely jegyek, tulajdonságok alkalmazásával csoportosítjuk a tárgyakat és jelenségeket, gyakorlati céloktól függ, és nincs a szempontoknak egy eleve elrendelt, egyedül helyes osztályozási módja. A következőkben példákat mutatok arra, hogy miképp csoportosíthatók az egyforma dolgok különféle szempontok alapján.

Példa

Vegyük az emberek halmazát, és tekintsük egyformának azokat az embereket, akiknek azonos az életkoruk és foglalkozásuk. Ezt a relációt megadhatjuk oly módon, hogy minden egyes emberhez hozzárendeljük az

---

hogy milyen szerepet játszik az ügyesség és a szerencse. És milyen más az ügyesség a sakkban és a teniszben. S gondolj most a körjátékokra: itt megvan a szórakozás eleme, viszont mennyi más jellegzetes vonás eltűnt! És így mehetünk végig a játékok sok-sok más csoportján, s láthatjuk, amint hasonlóságok tűnnek fel és el. E vizsgálódás eredménye pedig így hangzik: az egymást átfedő és keresztező hasonlóságok bonyolult hálóját látjuk. Hasonlóságokat nagyban és kicsiben. 67. Ezeket a hasonlóságokat nem tudom jobb szóval jellemezni, mint hogy 'családi hasonlóság'-ok; mert így fedik át és keresztezik egymást azok a különböző hasonlóságok, amelyek egy család tagjai között állnak fenn: termet, arcvonások, a szem színe, a járás, a temperamentum stb., stb. – És azt állítom: a 'játékok' egy családot alkotnak. Éppígy alkotnak például a számfajták is családot. Miért nevezünk valamit 'szám'-nak? Nos, például mert közvetlenül rokon valamivel, amit eddig számnak neveztünk; és ezáltal, mondhatjuk, közvetve rokonságba kerül valami mással, amit szintén így nevezünk. És számfogalmunkat úgy terjesztjük ki, ahogyan egy fonál fonásakor az egyik szálat a másikhoz sodorjuk. A fonál erőssége pedig nem azon múlik, hogy valamely szál egész hosszában végigfut-e a fonálon, hanem azon, hogy elég sok szál fonódik-e össze egymással. De ha valaki azt akarná mondani: 'Tehát mindeme képződményekben van valami közös – tudniillik mindeme közös vonásoknak a diszjunkciója', akkor én azt válaszolnám: ez csak játék egy szóval. Éppígy lehetne mondani: van valami, ami az egész fonálon végigfut – tudniillik e szálak hézagmentes összefonódása." Ludwig Wittgenstein, Filozófiai vizsgálódások. Ford. Neumer Katalin [37], p. 57.

[18] V.ö: Noonan, Harold, 'Identity', The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2005 Edition), Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/archives/fall2005/entries/identity/`

életkorát és a foglalkozását. Egyformák lesznek azok az emberek, akikhez egyazon életkort és foglalkozást rendeltünk. Külön kérdés, hogy hogyan osztályozzuk a foglalkozással nem rendelkező embereket? Egy lehetséges megoldás az, hogy ezekhez 'foglalkozással nem rendelkezik' jegyet, rendeljük.

Példa

Vegyünk egy műszaki példát is. Az a feladatunk, hogy egy tartószerkezetben, amelyben néhány csavar tönkrement, a hibás csavarokat hibátlan csavarokkal helyettesítsünk. Ehhez meg kell határoznunk a csavarok azon tulajdonságait, amelyeknek igaznak kell lennie azon csavarokra, amelyeket a hibásak helyébe tehetünk. Tehát osztályoznunk kell a raktárunkban található csavarokat. Az osztályozás több jegy alapján fog történni. Ha ezek után megadják, hogy mely jellemzők, paraméterek a lényegesek a tartószerkezet egy adott helyén, akkor meg tudjuk határozni azon csavarok halmazát, amelyek ott fölhasználhatók. Az egyforma csavarok halmazai egy ekvivalencia relációt határoznak meg. A csavarokat egyformának tekinthetjük, minden egyes jellemzőjük alapján külön-külön, majd ennek alapján megadhatjuk a jellemzők bármely együttesére nézve az egyforma csavarok osztályait.

Példa

Az ekvivalencia reláció fogalmával értelmezhető a jeltípus fogalma is. Az egyforma jelpéldányok egymással fölcserélhetők, ezért a jelpéldányok halmazán értelmezünk egy ekvivalencia relációt a jelpéldányok tipográfiájának bizonyos egyforma tulajdonságai alapján, és az egy ekvivalencia osztályba sorolt jelek adják egy jeltípus terjedelmét. Bizonyos egyforma festékfoltok ekvivalencia osztályai a számjelek, és az egyforma számot megnevező számjelek ekvivalencia osztályai a számok. Hasonló összefüggés áll fenn a hangok, szavak és fogalmak között. Ezt mutatja az alábbi táblázat.

Jelpéldányok	Jelek	Gondolatok
Festékfoltok, képernyő fénypontok alakzatai, megnyilatkozások, hangok, tapintási érzetek, kézjelek látványai	Szavak, számjelek, azokat tartalmazó kifejezések, mondatok	Számok, fogalmak, propozíciók

3.18. táblázat. Jelek és jelpéldányok

A XX. század előtt az ábrák, hangok nem, vagy csak körülményesen voltak továbbíthatók, és ezért különös hangsúlyt kapott a nyelv írott formája. A jelpéldányok azonban sem az írott, sem a szóbeli nyelven nem kommunikálhatók, ezért kellet megalkotnunk a 'számjegy', 'szó' és 'mondat' fogalmát, ahonnan már csak egy lépés volt a 'szám', 'fogalom' és 'gondolat' fogalma. Pl. az 1, a $sin(\Pi/2)$, $lg(10)$ jelek egyazon számot nevezik meg, így ezek fölcserélhetők és ezért egy ekvivalencia osztályba tartoznak. A szavak és

kifejezések az általuk kifejezett fogalom, míg a mondatok az általuk kifejezett gondolat alapján sorolhatók az egyformaság ekvivalencia osztályaiba. Az, hogy a számokat jelek ekvivalencia osztályai neveinek tekintjük, vagy ideális létezőknek melyeket megneveznek az ekvivalencia osztályok elemei, filozófiai álláspont kérdése.

Mire használható, mit jelent az egyformaság a gyakorlatban?

Gyakorlati alkalmazások

Az egyformaság némelyik esetben a tárgyak, objektumok fölcserélhetőségét határozza meg. Egy elektronikai áramkörben egy alkatrész, pl. egy $1k\Omega$-os ellenállás kicserélhető vele azonos értékű, elektromos teljesítményű és zajtényezőjű másik ellenállással. Figyelmünk kiterjedhet még a lábak vastagságára és a geometriai méretekre, valamint az elrendezésre is, de lehet, hogy az ellenállás színe, vagy az ára már nem érdekel bennünket. A geometriai méretek közül is csak néhány alapvetően fontosra terjed ki a figyelmünk. Ha viszont ez az ellenállás egy modern képzőművészeti alkotásban szerepel, akkor a színe és alakja is lényeges lehet. De nem mindig ilyen egyszerű a helyzet. Lehetséges, hogy egy rendszer valamely tagjával sikerül egyforma tagot találnunk, de a rendszer nem viseli el a két tárgy közötti felcserélés során keletkezett átmeneti állapotot. Más esetben a rendszer a beavatkozás során csak úgy válik ismét működőképessé, ha egy x alkatrészét egy olyan y alkatrészre cserélik ki, amelyik éppen nem egyforma x alkatrésszel, hanem attól valamilyen szempontból eltér. Erre példa, ha egy szöget kihúzunk a helyéről, akkor nem célszerű oda sem ugyanazt a szöget, sem más vele egyforma szöget visszakalapálni, hanem csak valamivel nagyobbat. Ha egy nagy megbízhatóságot igénylő berendezésből vizsgálat céljára kiforrasztunk egy alkatrészt, akkor gyakran előírják, hogy ugyanazt az alkatrészt, (tehát a már egyszer kiforrasztott alkatrészt) nem szabad visszaültetni a helyére, hanem csak egy vele egyforma (azonos), de új alkatrészt. Itt láthatóan nem teljesül a felcserélhetőség reflexív jellege. Vegyünk szemügyre jó sok csavart és csavar anyát. A csavarokat jellemzi az átmérő, a menetemelkedés, az anyagminőség, a felületkezelés, a hossz, a csavarokat a fej formája, az anyacsavar alakja, és talán még az is, hogy új-e a csavar és anya vagy használt. A használattól függően egyes jegyek, jellemzők fontosak lehetnek, mások meg nem. Kritikus alkalmazáskor még azt is előírhatják, hogy minden egyes csavart egyenként meg kell vizsgálni a fizikai szilárdság szempontjából, és ilyenkor ez is egy fontos jegy, egy fontos jellemző lesz. Lényeges lehet még a csavar ára is, vagy a beszállítási idő, ha a költségek és a gyártási idő nem mellékesek. Figyeljünk föl arra, hogy nincs eleve elrendelve, hogy mely csavarok egyformák és melyek nem. A lényeges jellemzőket (jegyeket) nekünk kell kellő körültekintéssel meghatározni, valamiféle fogalmi elemzés ebben nem lehet segítségünkre. Ismét a gyakorlati alkalmazás dönti el a lényeges és lényegtelen jellemzők, tulajdonságok megkülönböztetését.

Felcserélhetők-e egymással az egyforma csavarok? Ne hamarkodjuk el a választ. Képzeljünk egy hidat, ahol a feladatunk a rozsdás, elöregedett csavarok ellenőrzése, és kicserélése. Vajon ekkor fölcserélhetők-e egymással az egyforma öreg csavarok, vagy akár egy rozsdás csavar önmagával? Lehetséges, hogy egy beteg szívű embernek a szívével egyforma szívet sikerül találni, olyat, amelyik minden szükséges szempontból megfelelő egy szívátültetés céljára, nem vált ki pl. immunválaszt a szervezetből. Ez azonban még nem jelenti, hogy a beteg megoperálható, hisz lehet, hogy más okok – pl. a beteg kora – az operációt nem teszi lehetővé. Az is nyilvánvaló, hogy egy szívátültetés során nem a régivel teljesen egyforma másik beteg szívet operálnak a testbe, hanem éppen ellenkezőleg egy egészséges szervet. Látható, hogy két objektum felcserélhetősége nem mindig ekvivalencia relációt határoz meg. Mindezekből levonhatjuk azt a következtetést, hogy a felcserélhetőség korántsem jelent mindig egyformaságot.

Azonosság és fölcserélhetőség

A matematika gyakorlatilag lehetetlenné válna az azonosságpredikátum (azonosság reláció) alkalmazása nélkül. A matematika számait kapcsolatba hozzuk a valósággal, és ilyen módon hasznos adatokat tudunk átadni egymásnak, és némelykor még bizonyos eseményeket is előre ki tudunk számolni formulák (képletek) segítségével. Az azonosság predikátumra tehát nem csak azért van szükség, mert néha egy dolognak két neve is van, hanem hogy összekapcsoljunk dolgokat és jeleket.[19] Az azonosság haszna az, hogy lehetőséget ad a kifejezések átalakítására az igazság megváltozása nélkül, de a kifejezés praktikus használhatóságának jelentős megváltozásával. Az 'a azonos b-vel' séma akkor és csak akkor igaz, ha az 'a' és 'b' individuum nevek ugyanazt az individuumot nevezik meg. Világítsa meg ezt a tételt két példa. Gr. Széchenyi István Naplóját olvasva megállapíthatjuk, hogy Széchenyi br. Eötvös Józsefet gyakran 'Eötvös Pepi' néven említi. Nem szükséges kifejteni a 'Pepi' és a 'József' közötti stiláris, hangulati különbséget. Ezt úgy fejezi ki a logikai szaknyelv, hogy az 'Eötvös József' és az 'Eötvös Pepi' nevek jelentése különböző – intenzionálisan nem azonos –, bár az általuk megnevezett dolgok – az extenziójuk, vagy más szóval faktuális értékük – azonosak. Mi azonban most nem törődünk az intenziókkal, figyelmünk az extenziókra irányul. Ezért a hangulati, jelentésbeli különbség ellenére csak a jelöletekre figyelve a két nevet azonosnak tekintjük. Tehát: br. Eötvös József = Eötvös Pepi. Ehhez hasonló a következő példa. Radnóti Miklós bizonyos műveit álnéven írta. Ez alapján állítjuk, hogy Radnóti Miklós = Eaton Darr. Ám, ha ez igaz, akkor igaz kell legyen a következő is: Radnóti Miklós munkái és Eaton Darr munkái azonosak. Ez hamisságnak tűnik, hisz Radnóti csak bizonyos munkáit írta álnéven. Amit álnéven írt, azt álnéven írta és nem a valódi nevén.

[19] A korai Wittgenstein tehát téved amikor ezt írja: 5.533 „Tehát az azonosságjel nem lényegi alkotórésze a logikai szimbolikának. 5.534 És most már látjuk, hogy az olyan látszatkijelentések, mint: '$a = a$', '$a = b.b = c. \supset a = c$', '$(x).x = x$', '$\exists x.x = a$' stb., a helyes logikai szimbolikában egyáltalán le sem irhatók." Wittgenstein, Logikai-filozófiai értekezés. ford. Márkus György [36] p. 157.

Hamisságnak tűnik, de mégsem az. Amire ugyanis ez az érv utal, az a következő állítás lenne: A 'Radnóti Miklós' néven írt munkák azonosak az 'Eaton Darr' néven írt munkákkal. Ez az utóbbi állítás valóban hamis, de nem ekvivalens (felcserélhető az igazság megsértése nélkül) az előzővel. Az előzőnél ugyanis a neveket használjuk – a nevek jelölt értelemben szerepelnek, és e egykor élt valóságos személyre utalnak, aki bizonyos verseket írt – míg az utóbbi esetben a neveket említjük, amit kiemel az idézőjelek használata.

Egy rossz tanuló is tudja, hogy $1 = 1$, viszont nyilvánvalóan nem igaz, hogy egy rossz tanuló is tudja, hogy $1 = sin(\Pi/2)$. Az olyan szavak, mint 'tudja', 'hiszi', 'gondolja' megváltoztatják az utánuk következő szavak, kifejezések használati módját. Nem használják a szavakat (jeleket), hanem említik, és ilyen esetben nem érvényes az azonosak felcserélhetőségének törvénye.[20]

A felcserélhetőség tehát a tárgyak világához hasonlóan a jelek világában sem triviális kérdés. Más szempontból sem az. A matematika egész története azt bizonyítja, hogy a jelek világában milyen fáradtságos munkával lehet az azonosságot felismerni, nem is szólva a régóta megoldatlan matematikai kérdésekről. Az azonossággal kapcsolatos filozófiai kérdések közül az egyik legérdekesebb, hogy az azonosság olyan alkalmazásai mondanak gyakran legtöbbet a tárgyi világról, amelyek tisztán a jelek, pl. a matematika világán belül maradnak. A felszínes gondolkodás azt hihetné, hogy ha az azonosságot valamely, a tárgyaktól távoli tartományban használjuk – pl. a mátrixok világában – akkor annak már nagyon kevés köze lehet a 'valósághoz'. Ennek épp az ellenkezője az igaz. Miközben a fizikus matematikai formába önti a fizikai világról való teóriáit, és ez alapján jóslásokat végez, akkor nem tesz mást, mint, hogy alkalmazza az azonosságpredikátumot tisztán a matematikai formulák világában, azaz számításokat, levezetéseket, átalakításokat végez. Az azonosság kapcsolata különös módon épp ott a legtermékenyebb a tárgyi világgal, ahol a felületes szemlélő a legnagyobb távolságot látja. Ha a matematikát csak és kizárólag önkényes játékszabályok gyűjteményének tekintjük, akkor megfoghatatlan marad, hogy miképp lehetséges ez?

Önazonosság a fizikai tárgyak világában

A tér-időbeliség elve (Space-Time Principle)

Az elv endurantista felfogásban:

[20] Ennek a problémának átfogó ismertetése található a következő helyeken: Ruzsa Imre „Extenzionális és intenzionális problémák a logikában", MFISZ, 1972/1.; Ruzsa Imre, Klasszikus, modális és intenzionális logika. (1984) , Akadémiai kiadó, Budapest, 44. p.

(STP-end)

$$\forall x.x - \text{makrofizikai tárgy vagy élőlény} \rightarrow (\exists t \exists Y(Y(x,t) \,\&\, t - \text{ időpont})$$
$$\rightarrow \exists k \exists v(v\ k\text{-koordináta rendszerben } x\text{-világvonala})).$$

Egyszerűen fogalmazva, bármely élőlény vagy makrofizikai tárgy az időben létezik, és ameddig létezik, mindig van helye.

Az elv a fizikából származik, de nem ismeretelméleti jellegű kikötés. Egy makrofizikai tárgynak akkor is van helye, ha csak pontatlanul vagy egyáltalán nem tudjuk meghatározni azt. A K koordinátarendszer feltételezése nem jelenti az abszolút tér föltételezését, csak azt, hogy fizikai tárgyak – és ebbe most a mikrofizika tárgyai is beleértendők – nem létezhetnek téren és időn kívül. Ezt a metafizikai föltevést megfogalmazhatjuk perdurantista felfogásban is:

(STP-perd)

$$\forall x.x\text{-makrofizikai tárgy vagy élőlény} \rightarrow$$
$$\exists y \exists k \exists t(y = x\text{-időszelete } t - \text{kor } k\text{-koordinátarendszerben} \rightarrow$$
$$\exists z(z = x\text{-helye } t - \text{kor } k \text{ koordináta rendszerben}))$$

Gyengített Lockiánus elv (Weak Lockean Principle)

Térjünk rá az azonosság vizsgálatára a fizikai tárgyak, azon belül a makroszkopikus fizikai tárgyak egy meghatározott köre vizsgálatára.[21] Feltételezzük, hogy ezek a tárgyak szilárdak és tömörek, tehát pl. nem folyadék cseppek. Az ilyen objektumok közül semelyik kettő nem lehet egy időpontban egyazon helyen, de még közös részeik sem lehetnek. Élőlények esetén ez a kikötés nem feltétlen teljesül, gondoljunk csak a sziámi ikrekre. Összetett tárgyak esetén sem mindig teljesül, pl. lehet két lakásnak közös helysége. Természetesen feltételezzük, hogy egyazon koordináta rendszert használunk a tárgyak helyének meghatározása során, különben a kikötés triviálisan hamis volna. Ezt a feltevést mind endurantista, mind perdurantisa módon megfogalmazhatjuk:

[21] 'There cannot be two or more indiscernible things with all the same parts in precisely the same place at the same time. ... I call this the Weak Lockean Principle since it resembles a principle suggested by Locke, but this is considerably weaker and more compelling than Locke's principle. The restriction to objects of the same kind is supposed to indicate that the principle of interest here is not one (much more controversial) aimed at ruling out the co-location of (say) the sculpture and the clay from which it is formed - involving objects of different kinds. Making this kind of restriction is fairly standard in the literature.' Robin Jeshion, i.m.

(WLP-end1)

$$\forall x \forall y \forall t.(x, y - \text{ makroszkopikus fizikai tárgy } \& \, t - \text{időpont }) \rightarrow$$
$$(\text{helye}(x, t) = \text{helye}(y, t) \rightarrow x = y)$$

Ha két tömör makroszkopikus tárgynak egyazon időpontban megegyezik a helye, akkor az egy tárgy.[22]

(WLP-perd1)

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall t.((x, y - \text{makroszkopikus fizikai tárgy } \&$$
$$t - \text{időpont}) \rightarrow ((u = x \text{ időszelete } t - \text{kor } \& \, v = y \text{ időszelete } t - kor$$
$$\& \, \text{helye}(u, t) = \text{helye}(v, t)) \rightarrow u = v)$$

Mivel a fizikai tárgyak időben keletkeznek és megszűnnek létezni, ezért időbeli jellemzőik – pl. a helyük – parciális függvények. A fenti tétel megfordítását is igaznak tartjuk: egy makroszkopikus fizikai tárgy nem létezhet egy időpontban egynél több helyen:

(WLP-end2)

$$\forall x \forall y \forall t.(x, y - \text{makroszkopikus fizikai tárgy } \& \, t - \text{időpont}) \rightarrow$$
$$(x = y \rightarrow \text{helye}(x, t) = \text{helye}(y, t))$$

Ha két makroszkopikus tárgy azonos, akkor bármely időpontban megegyezik a helyük.

(WLP-perd2)

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall t.(x, y - \text{makroszkopikus fizikai tárgy } \&$$
$$t - \text{időpont}) \rightarrow ((u = x \text{ időszelete } t - \text{kor} \, \& \, v = y \text{időszelete } t - \text{kor}$$
$$\& \, u = v) \rightarrow \text{helye}(u, t) = \text{helye}(v, t))$$

Ha feltételezzük, hogy egy tárgy mindaddig amíg létezik, addig folyamatosan létezik, akkor azt a tárgyat egyértelműen azonosítja a világvonala, azaz a tér-idő függvénye. Összetett tárgyak részeikre bontva

[22] A gondolat már Kantnál fölmerül: „Ily módon teljeséggel elvonatkoztathatunk két vízcsepp minden belső (mennyiségi és minőségi) különbségétől: elegendő ugyanabban az időpontban különböző helyeken látnunk, hogy számszerű értelemben különbözőnek tekintsük.” TÉK, B320=A265. ford. Kis János, Papp Zoltán, [16], p. 278.

megszűnnek létezni, viszont újra konstruálásuk esetén ismét léteznek. Ha egy tárgy megszűnik létezni, majd később újra folytatja létezését, akkor nem teljesül az a kikötés, hogy világvonaluk egyértelműen azonosítja őket, mivel a világvonalukban szakadás van, és kérdéses lehet, hogy mely tárgynak folytatása a következő folytonos világvonal szakasz. Az viszont általánosan igaz, hogy egy helyen egyazon időpontban nem lehet két makroszkopikus tárgy, azok világvonalai nem metszhetik egymást. (Egy elemi rész átszáguldhat egy kavicson, de egy másik kavics nem.) A fizikában szokásos föltevés az is, hogy a tárgy fizikai jellemzői változásának minden időpillanatban meghatározott értéke van – azaz matematikai nyelven szólva az összes fizikai jellemzőjét leíró függvény differenciálható függvény – amely erősebb kikötés annál, hogy a jellemzők változásait folytonos függvények írják le. A makroszkopikus fizikai tárgyak körében önazonosság fogalmunk az ideális merev testekhez kapcsolódik. Azért kapcsolódik az ideális merev testekhez, mert azok hasonlítanak legjobban az olyan örök és változatlan tárgyakhoz, melyekkel kapcsolatban azt reméljük, hogy az önazonosság kérdése nem vet föl problémákat. Aztán amint kezdünk eltávolodni a merev testektől és megérkezünk az összetett tárgyak és élőlények birodalmába, egyre nehezebb kérdésekkel szembesülünk. Kezdjük a legegyszerűbb esettel.

Változatlan tárgyak

Legyen két ideális merev testünk a és b, melyekről a következőket feltételezzük:

a és b tárgy tömör, nem összetett, a helyén kívül nem szenved el semmiféle változást. A két tárgy a helyét leszámítva egyforma, megkülönböztethetetlen, és olyan pontos fizikai jellemzőkkel leírható, mint alak, tömeg, anyagminőség, keménység vagy elektromos vezetőképesség. Tegyük fel továbbá, hogy a és b világvonala meghatározható egyazon koordináta rendszerben. Az ilyen tárgyak körében érvényes a megkülönböztethetetlenek azonosságának elve.

Egy ellenvélemény

Azt állítottam az imént, hogy az ilyen ideális fizikai tárgyak körében problémamentesen alkalmazható az azonosság fogalma, mert azonosíthatóak a világvonalukkal. Nem minden filozófus ért egyet ezzel. Max Black szerint ha a fent jellemzett a és b tárgyakat egy izolált világban képzeljük el, akkor nem tudjuk megkülönböztetni azokat. (Black három ellenérvéből csak egy elsővel foglalkozom.) Az érv működéséhez ki kell hagyni az 'a-val azonosnak lenni' és 'b-vel azonosnak lenni' tulajdonságokat a tárgyak tulajdonságai tartományából, ami azonban nem jelent lényeges megszorítást. Az érv lényege az, hogy mivel a két tárgy a helyüket leszámítva tökéletesen egyforma, csak a helyük ismeretében tudnánk megkülönböztetni azokat. Kérdés azonban, hogy meg tudjuk-e határozni a helyüket, másképp fogalmazva, van-e azonosításra alkalmas

helye a két tárgynak? A válasz attól függ, hogy a teret abszolút térként vagy relatív térként képzeljük-e el. Első eset. Ha van abszolút tér ebben a világban, akkor létezik olyan kitüntetett K_0 koordináta rendszer, amelyben a két gömb helyét minden időpontban egy számhármas jellemzi. Ebben az esetben valóban meg tudjuk különböztetni a és b tárgyakat a helyük alapján, csakhogy K_0 koordináta rendszer föltételezésével hallgatólagosan becsempésztünk még valamit ebbe a világba, ahol semmi sem létezik a két tárgyon kívül. Egy koordináta rendszert ugyanis lehetetlen elképzelni egy merev test nélkül, amihez rögzítve van az origó pontja. A koordinátarendszer origó pontját vagy a gömbhöz vagy b gömbhöz rögzíthetjük. Honnan tudjuk melyikhez rögzítettük? A kérdés lényeges, hiszen eltérő koordinátákat kapunk az eltérő kezdőpontok választásával. Csak akkor tudnánk, hogy melyikhez rögzítettük a koordináta rendszert, ha azonosítani tudnánk a két gömböt, de azonosítani csak a helyük alapján tudjuk. Ezzel a kör bezárult, nem tudunk abszolút teret meghatározni ebben az elképzelt világban.

Második eset. A teret relatív fizikai jellemző gyanánt fölfogva sem láthatunk különbséget a két tárgy közöblack-identitytt, hiszen az egyik épp olyan távol van a másiktól, mint a másik az egyiktől. Mindebből az következik, hogy ebben a világban a tárgyakat nem tudjuk megkülönböztetni a tulajdonságaik alapján, még akkor sem, ha a belső tulajdonságaikon kívül hozzá vesszük a térbeli helyüket, mint külső tulajdonságot.[23] Fontos megjegyezni, hogy az a korábbi érv, miszerint 'egyik épp olyan távol van a másiktól, mint a másik az egyiktől' vitatható, ugyanis nem vektorként, hanem skalárként, puszta távolságként értelmezi a teret. Amennyiben a teret vektorokkal írjuk le, akkor az a-ból a b-felé mutató vektor különbözni fog a b-ből az a-ba mutató vektortól, és így nem egyezik meg a két tárgy minden tulajdonságában.

Jobban érthető a probléma, ha szimbolikus (formális) logikai nyelvet használunk. A példa egy olyan izolált világot képzel el, amely pontosan és kimerítően leírható három formulával: $G(a); G(b); \Re(a, b)$. Ebből a három formulából valóban nem vezethető le sem az, hogy $a = b$, sem az hogy $a \neq b$. Megváltozik a helyzet, ha kikötjük, hogy az '$\Re$' reláció irreflexív. Az irreflexivitást akkor tartjuk evidenciának, ha a formulákat pl. így interpretáljuk: $G(x) := x$ tömör adott tömegű vasgömb; $\Re(x, y) := x$ 2km-re van y-tól. Az '$\Re$' relációt a 'távolsága' fizikai jellemzővel, azaz egy függvényével kifejezve ezt kapjuk: 2km=távolsága(x, y) ahol a 'távolsága' függvényről feltételezhetjük, hogy: 0=távolsága(x, y) akkor és csak akkor ha $x = y$. Ebből valóban következik, hogy mivel $0 \neq$ 2km, és 2km=távolsága(x, y) tehát $x \neq y$. Ez a feltevés nem logika igazság, hiszen két hanghullám vagy két illatfelhő lehet egy helyen. Viszont az iménti (WLP-end1-2) és (WLP-perd1-2) posztulátumok alapján igazolható hogy $a \neq b$, mivel a két tárgy közötti távolság nagyobb mint nulla, ezért a két tárgy helye nem azonos minden koordináta rendszerben. Ha

[23] Max Black 1952, The Identity of Indiscernibles, [2]
`http://www.alfanos.org/pdfs/03_intro_philo_spr09/05_Black.pdf` Max Black e példáját alaposan elemzi Boda Mihály (2006) Az azonosság egy jellemzője: a Leibniz-elv. Pro Philosophia Füzetek [22]

viszont a két tárgy helye nem azonos, akkor a korábbiak alapján két tárgy sem azonos. Az viszont továbbra is kérdés, hogy rögzített koordináta rendszer nélkül, ebben a világban tudjuk-e azonosítani a két tárgyat? Nyilvánvaló, ha valaki képzeletben fölcserélné a tárgyakat, semmilyen módon nem vennénk észre. Tehát bizonyítható, hogy van két tárgyunk, de azonosításuk lehetetlen térbeli koordináták nélkül. Elfogadhatjuk azt az ismeretelméleti érvet, hogy ebben az elképzelt világban nem állnak rendelkezésünkre a makrofizikai tárgyak tér-időbeli koordinátái, azaz világvonalai. Ez viszont nem cáfolja meg azt a korábbi ontológiai kikötésünket – lásd a korábbi (SPT) föltevést – hogy minden makrofizikai tárgynak van világvonala, azaz van helye mindaddig, amíg létezik. Ha azt is föltételezzük, hogy van olyan közös koordináta rendszer, amelyben mindkét tárgynak van helye, akkor a két tárgy egy mindentudó lény számára – azaz ontológiai szempontból – azonosítható, bár mi az azonosításra képtelenek vagyunk, és így az érv elesik.

Változékony fizikai tárgyak

Miképpen lehet egy időben változékony fizikai tárgy vagy élőlény azonos önmagával? Vizsgálódásunk elején, a 3.1. és 3.2. ábrák kapcsán már említettem a folyamatos létezés metafizikai elvét. (Nem tévesztendő össze az idő folytonosságának feltételezésével, ami ennél erősebb kikötés. A folytonosság diszkrét időpontok tartományán is értelmezhető.) A makroszkopikus tárgyak egy részével kapcsolatban hiszünk ebben az elvben.

A folyamatos létezés elve:

> Mindig létezik a tárgy változásának olyan rövid időtartománya, hogy abban a tartományban csak egyetlen tárgy hasonlít a legjobban a tárgyhoz, és az a tárgy a tárgy korábbi állapotának egyértelmű leszármazottja. Föltételezzük, hogy a tárgy korábbi állapotának leszármazottja, a korábbi állapothoz nagyon közeli helyen található. Föltételezzük, hogy van olyan hasonlósági reláció a fizikai tárgyak időszeleteinek halmazán, hogy ha x hasonló y-hoz, akkor x és y egyazon tárgy időszelete.

A korábbi (STP-perd) és (STP-end) posztulátum a makroszkopikus fizikai tárgyakat világvonalukkal azonosítja. A fenti axióma csak egy sajátos bővítése ennek a két posztulátumnak. Ez alapján a fizikai tárgyak időszeleteinek halmazán adott egy hasonlósági reláció – amelyik nem tranzitív – és szintén adott egy leszármazási reláció – amelyik viszont tranzitív. (Feltételezzük, hogy ennek a hasonlósági relációnak a tranzitív lezártja megegyezik az időszeletek halmazán értelmezett leszármazási relációval.) Ha x tárgy-időszelet leszármazottja y és y tárgy-időszelet leszármazottja z, akkor x leszármazottja z. Eszerint a leszármazási reláció tranzitív, ami együtt a hasonlósági relációval egy ekvivalencia relációt határoz meg

a tárgyhoz tartozó tárgy-időszeletek halmazán. Egy ilyen ekvivalencia osztály neve az endurantizmus tárgy fogalma. Létezik tehát egy szürjektív leképezés a perdurantizmus tárgy-időszelet halmazából, az endurantizmus tárgyainak halmazába. (A halmaz leképezése B halmazba szürjektív, ha A minden elemének van egy és csak egy képe B-ben, és B minden eleme képe A valamely elemének. Ilyen pl. a gyermekek leképezése az édesanyák halmazába.) Ez a leképezés ekvivalencia osztályokat képez le azok neveihez. Az élőlények vagy makrofizikai tárgyak időbeli változása mind endurantista, mind perdurantitsa módon kifejezhető. Ezt egy könnyen általánosítható példa segítségével mutatom be.

Legyen $s :=$ Szókratész, $S := \ldots$ Szókratész $\ldots$ időpontban, $F := \ldots$ felnőtt ember, $G := \ldots$ gyermek, $B := \ldots$ bölcs, t tetszőleges időpont Szókratész tér-idejében. Föltevés: Szókratész=$\{x : \exists t S x t\}$

Endurantista megközelítés:

$\exists t(G(s,t) \,\&\, \sim B(s,t)) \,\&\, \sim \exists t(F(s,t) \,\&\, \sim B(s,t))$ (Szókratész gyermekkorában néha nem volt bölcs, viszont felnőtt korában mindig bölcs volt.) Egy táblázat segít jobban megérteni mindezt:

Bölcs	gyerekkor	ifjúkor	felnőttkor
Szókratész	0	1	1
Melétosz	0	0	0
...	...	...	...

3.19. táblázat. Felnőtt és gyermekkkor

Perdurantista értelmezés:

$\exists t \exists x(S(xt) \,\&\, G(x) \,\&\, \sim B(x)) \,\&\, \sim \exists t \exists y(S(yt) \,\&\, F(y) \,\&\, \sim B(y))$

(A gyermek Szókratész nem volt bölcs, viszont az érett férfi bölcs volt.) Emlékeztetek arra, hogy ebben a felfogásban Szókratész időszeletei nem azonosak, hanem csak ekvivalensek egymással, azaz egyformák abból a szempontból, hogy egyazon személyhez tartoznak. Egy táblázat segít jobban megérteni mindezt:

Bölcs	Nem bölcs
	gyermek Szókratész, a gyermek Melétosz ...
az ifjú Szókratész	az ifjú Melétosz
a felnőtt Szókratész	a felnőtt Melétosz
...	...

3.20. táblázat. Bölcsesség és butaság

Egy ellenvélemény

Úgy tűnik a változás feltételezése endurantista felfogásban a személyek vagy fizikai tárgyak belső tulajdonságait illetően ellentmondásra vezet. A bölcsesség minden személy belső tulajdonsága, így azé a

személyé is akit Melétosz megvádolt. Szókratészről egyszer azt állítjuk, hogy bölcs, másszor meg hogy nem bölcs. Ez nyilvánvaló ellentmondás, tehát a változás föltételezése ellentmondást szül. Csakhogy Szókratész nem matematikai objektum, így tulajdonságai – még az a tulajdonsága is, hogy 'ember' – nem léteznek időn kívül. Időben értelmezve pedig épp az imént láttuk hogyan értelmezhető az, hogy felnőtt kora előtt nem volt mindig bölcs.[24] Perdurantista felfogásban pedig hiba összekeverni az azonosság relációt egy ekvivalencia relációval.

Átalakuló tárgyak

Harmadik lépcsőben tegyük föl, hogy van egy olyan d tárgyunk, amelynek összetevői is változhatnak az időben, esetleg fokozatosan valamennyi tulajdonsága megváltozhat. (Ilyenek az élőlények.) Nehezítsük a helyzetet annak a föltevésével, hogy d tárgynak t' időpontban keletkezik egy d' hasonmása is. Hogyan tudjuk megkülönböztetni d-t és d'-t?

Az ilyen tárgyak esetén nem érvényes a korábbi világvonal azonosításon alapuló elv, sem a gyönge Lockiánus elv, és ami ennél is fontosabb: nincsenek általános szabályok az azonosításukra nézve. Az, hogy N.N. úr azonos-e a harminc évvel korábbi önmagával döntés kérdése. N.N. úr azonos vagy nem azonos egykori önmagával mint jogi személy, mint egykori barát vagy ellenség, mint munkaerő vagy mint élőlény. Hasonló nehézségek merülnek föl renovált épületek vagy műkincsek önazonossága esetén, és ezt a kérdést feszegeti a 'Thészeusz hajója' filozófiai fejtörő is. Ezekben az esetekben nekünk kell megfogalmazni az önazonosság kritériumait, mégpedig olyan módon, hogy ne keveredjünk önellentmondásba. Némely filozófus relatív azonosságról beszél a kérdéskörrel kapcsolatban, ami valójában egy ekvivalencia relációt jelent, amely reláció valóban relatív abban az értelemben, hogy interpretációra szorul, míg az azonossággal kapcsolatban ennek föltételezése fölösleges bonyodalmakat okoz. A problémával egy külön tanulmányomban foglalkozom.

Mikrofizikai objektumok, elemi részek

A mikrofizikai objektumokra nem teljesül a korábbi előfeltevésünk kiinduló pontja: nincs minden időpillanatban egy jól meghatározott helyük és egyéb fizikai jellemzőik sem határozhatók meg egyértelműen, csak valamilyen statisztikus eloszlással. Így aztán nem áll a rendelkezésünkre egy azonosításukra alkalmas tér-idő függvény. Amiből az következik, hogy kérdéses, mennyiben alkalmazható velük kapcsolatban az „önazonosság" fogalma. Ezzel a kérdéskörrel most nem foglalkozom, a probléma inkább az elemi részek

[24] A fizikai tárgyak belső (intrinzikus) tulajdonságai nem csak az idő dimenzióban lehetnek relációsak. Vegyük Szókratész ama tulajdonságát, hogy a lába hosszabb volt, mint a keze. Ez nyilvánvalóan belső tulajdonsága volt Szókratésznek, ami egy viszonyt határoz meg.

filozófiai problémája tárgykörébe tartozik, amely terülten nem vagyok kompetens.

3.2. Thészeusz hajója metafizikai vizekre téved

A rejtvénynek magyarul is jelentős irodalma van, melyek világosan bemutatják a problémát és a megoldás nehézségeit, némelyek szerint a megoldás lehetetlenségét.[25] A rejtvénynek valóban nincsen logikailag ellentmondás-mentes és a józan ész elvárásainak megfelelő, egyszerű, nyilvánvaló megoldása, ahol az olvasó a homlokára csap: hát persze, most már értem! Azért nincs, mert a probléma szorosan kötődik a „kupac" paradoxonhoz (Sorites Paradox): hány babszem egy halom? Viszont logikailag koherens és konzisztens megoldása van, feltéve, hogy nem tévedünk el már az elején a kérdéskör útvesztőjében. Jennifer Wang előadása (angolul) szemléletesen mutatja be a problémát, és ő lát logikailag konzisztens megoldást, ellentétben pl. Bács Gáborral, aki nem lát.[26] Viszont szerintem valamennyien egy hibás előfeltevésből indulnak ki, melyet Tőzsér János és Gébert Judit így fogalmaz meg[27]:

> „. . . Nem kizárt, hogy az Olvasó nem ért egyet ezzel. Hanem azt állítja: van egy meghatározott százaléka az eredeti hajó összes alkatrészének, amely százalék alatti alkatrész kicserélése esetében a renovált hajó még azonos az eredeti hajóval, de amely százalék feletti alkatrész kicserélése esetében már nem azonos vele. E javaslat nem tartható. Tegyük fel, hogy a kérdéses százalékot 5 százalékban állapítjuk meg. Azt mondjuk: ha az eredeti hajó összes eredeti alkatrészének 5 százalékánál kevesebb alkatrészét cseréljük ki, akkor a renovált hajó még azonos az eredeti hajóval, ha viszont 5 százalékánál több alkatrészét cseréljük ki, akkor a renovált hajó már nem azonos az eredeti hajóval. Nevezzük az eredeti hajót E-nek, a renováltat R-nek, és tegyük fel, hogy E hajó alkatrészeinek 4 százalékát cseréljük ki. Ebben az esetben ugye: E hajó azonos R hajóval. Tegyük fel továbbá, hogy R hajó alkatrészeinek szintén kicseréljük 4 százalékát, és így kapjuk H hajót. Ebben az esetben ugye: R hajó azonos H hajóval. Mármost, mivel elfogadjuk az azonossági viszony tranzitivitását, amely szerint – mint láttuk – ha „$a = b$ és $b = c$, akkor $a = c$", úgy azt kell állítanunk, hogy R hajó azonos H hajóval. Csakhogy, E hajó és H hajó nem lehet azonos egymással, hiszen E és H hajó alkatrészének több mint 5 százaléka különbözik. Egészen pontosan 8 százaléka. (Feltéve persze, hogy másik 4 százalékot cseréltünk ki.) Ellentmondáshoz jutottunk: egyrészről az azonossági viszony tranzitivitása miatt azt kell állítanunk, hogy E hajó azonos H hajóval,

[25] Tőzsér János, Metafizika [15] p.:129-135, Bács Gábor, „Az intelligens nagynéni segédlete Thészeusz hajójához" (2011) In: Perlekedő rokonok? Analitikus filozófia és fenomenológia. [40] pp., 111-131

[26] https://www.khanacademy.org/partner-content/wi-phi/metaphys-epistemology/v/ship-of-theseus

[27] Tőzsér János – Gébert Judit, „Egy filozófiai fejtörő" (2011. febr. 18.)ÉS 2011/6., http://www.es.hu/cikk/2011-02-20/tozser-janos8211gebert-judit/egy-filozofiai-fejtoro.html Az én nagyon rövid válaszom: „Egy filozófiai fejtörő megoldása" (2011. március 4.) ÉS 2011/9 http://www.es.hu/cikk/2011-03-06/andras-ferenc/egy-filozofiai-fejtoro-megoldasa.html

másrészről azonban – lévén E és H hajó több mint 5 százalékában különbözik – azt kell állítanunk, hogy E hajó nem azonos H hajóval. Mondanunk sem kell: bármekkora százalékot állapítunk meg, az ellentmondás elkerülhetetlen. ...”

Bevezetés

Thészeusz, miközben hosszú, kanyargós útról vezetett hazafelé, meglátott egy autó szervizt az út mentén. Mivel régóta rossz volt a fékje, gondolta betér és megjavíttatja.

- Mi a baj az autóval, tisztelt uram? Kérdezte a szerelő
- Nem fog a fék, veszélyesen megnőtt a fékút.
- Amikor megvette az autót akkor fogott?
- Igen, akkor tökéletesen működött, de azóta elkopott.
- Tisztelt uram, ön bizonyára téved. Amikor megvette az autót, jó volt a fék, mert jó volt a fékbetét. Másnap láthatatlan mértékben kopott egy kicsit, ezért egyforma volt az előző napival, következésképpen a fékbetét jó volt. A harmadik napon szintén kopott egy kicsit a fékbetét az előző naphoz képest, egyforma volt az előző napival, tehát ismét jó volt. És ez így folytatódott minden nap, egészen a mai napig. Következésképpen a fékbetét ma is egyforma a tegnapival, és jó, nincs semmi baja.

Mi a baj a szerelő filozófiai érvelésével?

1. A fék esetén a kopás változása kumulatív folyamat. Ha a kopás mértéke az első nap Δ, akkor a második nap $2 \times \Delta$, és az n-edik nap $n \times \Delta$.
2. A változást jelen esetben nem az előző naphoz, hanem a kiinduló állapothoz, a mintához képest kell mérni. Ha elér egy határt, akkor már nem igaz rá a ‘jó’ predikátum. Van a kopásnak bizonyosan elfogadhatatlan szintje, amikor a fékbetét nem jó. A jó szerelők filozófiai könyvek nélkül is tudják, hol van az a határ.
3. Ha az előző állapothoz hasonlítjuk a kopást, akkor hasonlóság relációt kapunk, amelyet matematikai nyelven tolerancia relációval írhatunk le. Ha a mintához, a kezdetei állapothoz hasonlítjuk a kopást, akkor egyformaság relációt kapunk, amelyet matematikai nyelven ekvivalencia relációval írhatunk le.

Hasonló a probléma Thészeusz hajója esetén, csak ott nem kopásról, hanem a deszkák vagy más kopott alkatrészek kicseréléséről van szó. Ha a kopás mértéke az első évben Δ, akkor a második évben $2 \times \Delta$, és az n-edik évben $n \times \Delta$. A változás, amennyiben az előző állapothoz hasonlítjuk, tolerancia relációt határoz meg, amelyik reflexív és szimmetrikus, de nem tranzitív reláció, következésképpen ellentmond az önazonosságnak. Az azonosság ugyanis tranzitív reláció. Ha a változást a mintához hasonlítjuk, akkor viszont ekvivalencia relációt kapunk, melyik összhangban áll a feltételezett ön-azonossággal. Ameddig a hajó deszkáinak kevesebb mint a felét cseréltük ki, addig a hajót egyformának tekintjük a kezdeti állapottal, azon túl nem. Ha a felénél több hajó palánkot cseréltünk ki, akkor Thészeusz hajója megszűnik létezni, bár a deszkái fennmaradhatnak mint emlékek, vagy annak részei. Amíg azonban a palánkok kicserélése a határérték alatt marad, addig a hajó létezik, és azonos önmagával. Az önazonosság fennállása nem zárja ki a hajó állapotának fokozatos romlását, ami ha elér egy határt, akkor a megszűnését jelenti. A hajó tehát az időben kiterjedt, változó valami, és mint időben kiterjedt valami azonos önmagával. Egy négydimenziós objektum, amelyik időszeletekből áll.

A kiállított hajó

Mások az azonosítási és fennállási kritériumok az úton lévő hajó, és mások a kiállított hajó esetén. Az út során akár a hajó valamennyi alkatrészét is kicserélhetik, ez nem jelent azonosítási problémát. Thészeusz hajójának az az azonossági kritériuma, hogy rajta utazik a hős hazafelé. Ha út közben váltogatná a hajókat, akkor nem lenne értelme a hajójáról beszélni. Az úton lévő hajó élőlényhez hasonlatos, minden beépített alkatrész a részévé válik, a hajóból kidobott alkatrész, pedig nem. A kiállított hajó esetén azonban más a helyzet, ott a változatlanul való fennmaradás a cél. Thészeusz hajója hazafelé az úton, közlekedési eszköz, miután kiállították, a múlt rekvizitumává vált, megszűnt közlekedési eszköz lenni. A kiállított hajó Thészeusz hajója volt, de most már nem az, a hős miután hazaért, új hajót kapott. Döntenünk kell, hogy meddig, a romlás milyen mértékéig tekintjük a híres utat megjárt hajó leszármazottjának a kiállított hajót. Utána is mondhatjuk, hogy a megmaradt rom hasonlít az eredeti hajóra, de az egyformaságot már tagadjuk. A hasonlóság és egyformaság megfogalmazásához föltételezzük, hogy valamiképp mérhető két hajópéldány eltérése az előző állapottól, illetve a kezdeti állapottól, a mintától. A továbbiakban Thészeusz hajóján a kiállított hajót értjük.

Amie L. Thomasson vizsgálódásait követve a következő alternatívák merülnek fel: alkalmazási feltétel – járműről vagy emlékről van szó; azonosítási kritérium – ez Thészeusz hajója vagy volt Thészeusz hajója; újra alkalmazási feltétel – ez ugyanaz a hajó mint a korábbi.

Tegyük fel hogy tíz lépésben Thészeusz hajójának valamennyi alkatrészét kicserélik. A legfeljebb 10% renovált alkatrészt tartalmazó hajópéldányt '10'-el, a legfeljebb 20% renovált alkatrészt tartalmazó példányt '20'-al jelölöm, stb. Ezek alapján az összes lehetséges kiállított, fokozatosan romló hajópéldány halmaza: $S = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$ A hajó történetének diszkrét időpontjai halmaza T. Nem feltételezzük a kiállított hajó folyamatos létezését. Előfordulhat, hogy darabokra szedik, majd később újra összerakják, mint emléket. Ekkor az alábbi definíciót alkalmazhatjuk:

Def.1. valamely $x \in S$ hajópéldány hasonlít $y \in S$ hajópéldányra, ha alkatrészeikben csak d% eltérés van egymáshoz képest d értékét gyakorlati szempontok – és nem apriori elvek – figyelembe vételével célszerű meghatározni, jelen esetben $d = 30$. Az 3.21 táblázatban a hasonló idő szeleteket hajókat 1, a nem hasonlókat 0 jel jelöli. $x \approx y :=$ x és y hasonló idő szeletek

$\approx$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
20	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
30	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
40	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
50	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
60	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
70	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
80	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
90	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
100	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

3.21. táblázat. Hasonlóság

Figyeljük meg, hogy a hasonlóság reláció reflexív és szimmetrikus, de nem tranzitív, eltérően az egyformaságot kifejező ekvivalencia relációtól. Jelen esetben két hajópéldány hasonló, ha a közöttük lévő eltérés legfeljebb 30%. Ekkor abból, hogy $a \approx b$ és $b \approx c$ nem következik, hogy $a \approx c$, ellentétben az azonosság vagy egyformaság relációval.

A hajó példányok egyformaságát ekvivalencia relációval fejezzük ki. Célszerű úgy döntenünk, hogy még a hajó darabokra szedése esetén se fordulhasson elő, hogy több rivális példánya létezzen Thészeusz hajójának. Ha megengednénk $d = 50$-et, akkor előfordulhatna, hogy két egyforma hajónk lenne, mindkettő fele-fele arányban tartalmazna eredeti alkatrészeket, és nem tudnánk eldönteni, hogy melyiket tekintsük az eredeti hajó utódjának. Ekkor vezessük be a következő definíciót:

Def.2. x hajó egyforma $y$hajóval Thészeusz hajóját alapul véve $:=$ x is és y is kevesebb mint 50%-ban

tér el az eredeti hajótól vagy $x = y$. $x \cong y := x$ egyforma időszelet $y -$ al

$\cong$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
20	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
30	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
40	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
60	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
70	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
80	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
90	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

3.22. táblázat. Egyformaság

A 3.22 táblázat mutatja a parton kiállított hajót. Thészeusz hajója túlél bizonyos mértékű fokozatos változást. A táblázat ekvivalencia osztályai tartalmazzák az egyforma hajópéldányokat: a '10,20,30,40' hajópéldányok egyformák Thészeusz hajójával – bármely kettő ugyanaz a hajó, csak eltérő időpontban – de a későbbiek már olyan jelentősen eltérnek az eredetitől, hogy különbözőnek tekintendők. Ez az ekvivalencia osztály: $S_T = \{10, 20, 30, 40\}$. Az '50,60,70,80,90,100' hajópéldányok is tekinthetőek hétköznapi tárgyaknak, pl. Thészeusz hajója romjai'-nak. Ezek alapján Thészeusz hajója (a kiállított hajó) perdurantista felfogásban az alábbi módon definiálható:

Thészeusz hajója$_{perdurantizmus} := \langle T, S_T, R\rangle$, ahol $R \subseteq T \times S_T$

$\forall t \forall x. t \Re x := t \in T \wedge x \cong 10$

(x Thészeusz hajója $t \in T$ időpontban pontosan akkor, ha x egyforma az eredeti kiállított hajóval. Valójában az R reláció T halmaz leképezése S_T halmazba.)

Bizonyos gondolatokat az endurantizmus felfogásában egyszerűbben megfogalmazhatunk, de a hajó létezésre vonatkozó kijelentést – a hajó adott időpontban megsemmisült, egy időpont után már nem létezik – a klasszikus logika keretei között nem, vagy csak körülményes módon tudjuk kifejezni. A 't_h' individuum név a kiállított hajót jelöli endurantista felfogásban.

Alkalmazás

A perdurantizmus felfogásában nem tudjuk egy hétköznapi tárgyról hogy micsoda, amíg még történhetnek vele új események. Ezen a kiállított hajó esetében úgy enyhíthetünk, hogy csak annyit feltételezünk, hogy

létezik $\Re$ függvény reláció, de azt nem, hogy teljesen ismerjük $\Re$ függvény relációt, azaz nem tudjuk előre a hajó történetét. Ilyen módon több tényt is megfogalmazhatunk a hajóval kapcsolatban:

(1) Ha egyáltalán létezik a kiállított hajó egy időpontban, akkor csak egyetlen létezik belőle:

(perd 1) $\forall x \forall y \forall t((t\Re x \wedge t\Re y) \rightarrow x = y)$

(end 1) $\forall x \forall y((x = t_h \wedge y = t_h) \rightarrow x = y)$

(2) A kiállított hajó Thészeusz hajója volt:

(perd 2) $\forall t \forall x(t\Re x \rightarrow$ Thészeusz hajója-volt$(x))$

(end 2) Thészeusz hajója-volt(t_h)

(3) Egyre romlik a kiállított hajó állapota:

(perd 3) $\forall t_1 \forall t_2 \forall x \forall y((t_1\Re x \wedge t_2\Re y \wedge t_2$ későbbi időpont mint $t_1)$
$\rightarrow y$-rosszabb-állapot-mint-$x)$

(end 3) $\forall t_1 \forall t_2 \forall x \forall y((t_2$ későbbi időpont mint $t_1 \wedge x =$ állapota t_h at $t_1 \wedge y =$ állapota t_h at $t_2)$
$\rightarrow y$-rosszabb-állapot-mint-$x)$

(4) A kiállított hajó egy idő után megsemmisült:

(perd 4) $\exists t_1 \forall t_2(t_2$ későbbi időpont mint $t_1 \rightarrow \neg\exists x(t_2\Re x))$

Összefoglalás

A hétköznapi tárgyak időn átívelő önazonosságát a tárgyak időpéldányai egyformaságával fejezhetjük ki. Az egyformaság egy mintához képest értelmezett, nem pedig az előző állapothoz képest. Az egyformaság abból a nézőpontból áll fenn, hogy ezek a példányok egyazon tárgy időbeli metszetei, és a változás mértéke adott határon belül marad. A hajó példányok bizonyos jellemzőikben eltérhetnek egymástól, nincsenek gyakorlattól független általános érvényű apriori elvek az önazonosság meghatározására, a nyelvhasználók közössége dönt. Az egyformaságot leíró reláció formális logikai szempontból ekvivalencia reláció, pontosan úgy, ahogyan az azonosság reláció is az. A hétköznapi tárgy egy időtartománynak – ameddig a tárgy létezik – az ekvivalencia osztály részhalmazába való leképezésével azonos. Amikor a tárgy időn átívelő azonosságáról beszélünk, akkor a tárgyhoz tartozó időtartományban egy ekvivalencia osztály elemei időbeli sorozatáról beszélünk.

(lásd `http://www.andrasek.hu/ferenc/modellek/theszeusz-hajoja.xls`)

Írásom angol verziója picivel részletesebb:

`http://ferenc.andrasek.hu/papers/notes-sth9.pdf`

4. fejezet

Zárszó

4.1. A filozófiai problémák tipológiája

Megérkezik egy kicsi zöld emberke a Marsról azzal a feladattal, hogy miután a marslakók fölmérték a földlakók matematikai, fizikai és orvostudományi ismereteit, próbálja megfejteni, hogy mit jelenthet az un. „filozófia”, amivel az emberi lények ezredévek óta foglalkoznak, de úgy tűnik hasztalan. A mi kicsi zöld emberkénk be is gyűjt találomra kiválasztva a könyvtárakból olyan könyveket, amelyeket ‘filozófia’ címkével láttak el. Ezek az írások kerültek a keze ügyébe:

Arisztotelész: Organon

Szent Ágoston: Vallomások

Aquinói Szent Tamás: A létezőről és a lényegről

Spinoza:Etika

Kant: A tiszta ész kritikája

Hegel: A szellem fenomenológiája

Engels: Anti-Dühring

Nietzsche: Imígyen szóla Zarathusztra

Martin Buber: Én és Te

Heidegger: Lét és idő

Carnap: The Logical Syntax of Language

Wittgenstein: Logikai-filopzófiai értekezés

Ryle: A szellem fogalma

Michel Foucault: A szavak és a dolgok

Barbara Vetter: Potentiality, From Dispositions to Modality

A kis zöld ember figyelmesen tanulmányozta ezeket az írásokat, hogy választ találjon a következő kérdésekre:

Ha mindezek az írások filozófiai művek, akkor

1. mik azok a közös témák, közös kérdések, amelyekkel foglalkoznak?

   Ha mindezek az írások filozófiai művek, akkor

2. mi az a közös háttér tudás amit ezeknek a szövegeknek a megértése feltételez?

   Ha mindezek az írások filozófiai művek, akkor

3. mi az a közös nyelv és fogalmi készlet amit ezek a szövegek használnak?

   Ha mindezek az írások filozófiai művek, akkor

4. mi az a gondolkozásmód, kutatási és probléma megoldási eszköztár, elmélet és gyakorlat, amit ezeknek a szövegeknek a filozófiai írói használnak?

Kis zöld emberkénk éles elmével bírván hamar fölismerte, hogy az egyes szövegek között csak a hasonlóságok és leszármazási viszonyok laza hálózata fedezhető föl, nincsen bennük közös lényeg. (A kis zöld emberke Wittgenstein késői filozófiáját is megértette.) Ez a fölismerés azonban korán sem nyugtatta meg. Tanácstalanságában kollégájához fordult, aki az emberi lények olyan különös, a marslakók számára tökéletesen értelmetlen tevékenységét próbálták megérteni, mint a zenehallgatás. Kollégája, aki a zene természetét próbálta megérteni, történetesen türkiz zöld színű volt, és így szólt. Lejátszom neked egy hang átalakító berendezés segítségével az alábbi levegő rezgéseket, melyek leírásának differenciál egyenleti nekem semmilyen örömet nem okoznak, de érthetetlen módon, ezek a földlakók vonzódnak a levegő rezgésekhez. Kapcsold a fejedhez, hasonló élményben lesz részed, mint amit az emberek zenehallgatásnak hívnak. Nekik ez valamiért tetszik.

Machaut: Messe de Nostre Dame

Frédéric Chopin: c-moll „Forradalmi” etűd

Kálmán Imre: Csárdáskirálynő

Bartók Béla: Concerto

Dave Brubeck: Take five

Beatles: Sárga tengeralattjáró

Türkiz zöld emberkénk azon törte a fejét, hogy mi lehet az a szép, amit ezekben a nagyon különböző rezgésekben, un. „zenékben”, szépnek tartanak az emberi lények? Azt az egyszerű kérdést fogalmazta meg magának: vajon lehetséges-e olyan emberi lény, aki mindezeket a zenéket egyformán szereti, mindezeket a zenéket egyformán szépnek és értékesnek tartja? Zöld marslakónk a türkiz zöld lényhez nagyon hasonló kérdéssel szembesült: vajon lehetséges-e olyan emberi lény, aki a korábban fölsorolt filozófiai írásokat egyformán szereti, mindezeket a műveket egyformán bölcsnek és értékesnek tartja?

Bármi is a marslakók válasza, az alábbi tipológia csak a probléma orientált filozófiai irányzatokra érvényes, azokra, amelyek logikus, racionális választ keresnek a kérdésekre.

Ez nem jelenti azt, hogy a filozófusok többségének az a véleménye amit a 4.1 táblázat mutat, nem jelenti azt, hogy a többség is így látja ezeket a problémákat. Ez az én véleményem.

A filozófiai problémák természetére vonatkozó álláspont maga is filozófiai álláspont, amely vitatható, megkérdőjelezhető. Így a jelen sorok által kifejtett álláspont olyan gondolatmenet, melynek igazsága részben önmagától is függ. Amiből az következik, hogy maga ez a tipológia is önmagára vonatkozik. Ez kétségtelenül tipikus jele a szemantikai paradoxon fölbukkanásának. A paradoxon feloldásának azonban lehetséges útja, hogy a jelen tipológiát határozottan *filozófiai válasz*-nak tekintem. Épp úgy mint az iménti esetben, fontos annak a fölismerése is, hogy a filozófia belső természeténél fogva paradox vállalkozás. Miért?

A filozófia – ami alatt most elvont, elméleti filozófia értendő, és nem az un. könnyebben érthető, gyakorlati filozófia – racionális válaszokat keres alapvető, nagyon általános, nagyrészt világnézeti, vagy ahhoz közvetve kapcsolódó kérdésekre, melyek többnyire érzelmileg is erősen motiváltak. Ezek a kérdések gyakran gondolkozásunk, világlátásunk, fogalmi sémánk alapjait érintik. A filozófiában nincsenek tabuk, mindenre rákérdezünk. Még a racionális gondolkodás természetére is, a logika, a helyes érvelés alapjaira is rákérdezünk – kérdés, hogy milyen alapon? (Milyen játékot játszunk, ha nem egyezünk meg a játékszabályokban?) Ebből azonban az is következik, hogy a filozófiában nincsen szilárd pont. A filozófia nem vallás, a filozófia oda tart, ahonnan a vallások elindulnak.

Ám, még ha ki is jelölnénk valamilyen szilárd pontot, biztos alapot, még akkor is számos filozófiai probléma olyan, hogy a problémára adott válasz magára a problémára, vagy a probléma és a válasz megfogalmazójára is vonatkozik, és ez az önreferencia (önmagára való vonatkozás) az igazságértékkel kapcsolatos – különben nem lenne szükségszerűen paradox jellegű. Így viszont a filozófia alapkérdései a létezésről

és a megismerésről elkerülhetetlenül (legalább részben) szemantikai paradox jellegűek, és megoldhatatlan problémát jelentenek. Ezért javasoltam az oksággal, az emberi szabadsággal vagy az elme materialista elméletével kapcsolatban azt, hogy az ezzel kapcsolatos filozófiai álláspont, sőt az ezzel kapcsolatos filozofálás – mint időbeli esemény – „kívülről" történjen, hogy kitörjünk az ördögi körből, elkerüljük az igazságértékkel kapcsolatos körbeforgást.

Mindebből nem következik, hogy a filozófiában nem lehetségesek végső válaszok, örök igazságok, mint a matematikában. Az hogy a filozófusok több ezer év után sem jutottak egyetértésre, rossz érv, mert történeti érv, aminek legfeljebb valószínűségi értéke van, bizonyító ereje nincs. Nyilvánvaló, hogy egy olyan nézet, miszerint semelyik filozófiai nézet nem bizonyos, azaz minden filozófiai nézet kétséges, mivel maga is filozófiai nézet, önmagát cáfoló, paradox gondolat, következésképpen elvetendő – feltéve, hogy nem vagyunk dialetisták (dialetheism).

Hazai filozófiai körökben népszerű a relativizmus, népszerű a historizmus, népszerű az az álláspont, hogy a filozófiai nem ad, és nem is adhat végleges válaszokat. (Heller Ágnes anno még a tudomány-áltudomány megkülönböztetést is elutasította.) Ez azonban ideológia, korszellem, és a matematikai és természettudományos megismerés félremagyarázásán alapul. Nem hiszem hogy Arisztotelész, Aquinói Szent Tamás, Kant vagy akár Quine örvendezve elfogadna egy ilyen metafilozófiai álláspontot. De bárhogy is van, én elutasítom, hibásnak, sőt károsnak tartom. A filozófiában vannak végső válaszok. Ezek részben trivialitások, részben annak a belátása, hogy némely filozófiai kérdés valójában értelmetlenség. De ezek a válaszok mégis hasznosak, értékesek, és semmiképp nem értékmentesek.

Hogy manapság mi számít filozófiai problémának, arra közvetett, fölsoroláson alapuló, de jól érthető válasz található az alábbi könyvben: Michael Bruce and Steven Barbone: Just the arguments – 100 of the Most Important Arguments in Western Philosophy (2011) Wiley-Blackwell.

A probléma neve vagy leírása	Száma: $V \times J \times L$	V : Világos a probléma megfogalmazása, vagy csak homályos érzés, álköltészet? (0=nem érthető a kérdés 1=a kérdés világos)	J : Van a józan észnek válasza a kérdésre? Egyáltalán adható a kérdésre a józan észnek megfelelő válasz? (3=nem 5=Józan észnek megfelelő válasz lehetséges)	L : Logikus? Adható a kérésre (problémára) logikailag korrekt, legalább ellentmondás mentes válasz? (7=nem 11=igen)
Mozgás	55	1	5	11 (Newton)
Változás	55	1	5	11
Thészeusz hajója	33	1	3	11
Hány dolog van a szobában?	35	1	5	7
Miért van annyi létező és nem sokkal inkább semmi?	33	1	3	11 (Tarski)
Mitől jó egy emberi cselekedet?	...	1	?	11 (Kant)
Léteznek-e számok?	33	1	3	11
Van-e Isten?	...	1	?	?
...	...	...	...	...
Van-e tipológiája a filozófiai kérdéseknek?	55	1	5	11

4.1. táblázat. A filozófiai problémák tipológiája

4.2. Utóhang

Az analitikus filozófia, probléma orientált filozófia. Részben újra fogalmazza az évezredes filozófiai kérdéseket, némely esetben eliminálja az eredeti filozófiai problémát, olykor értelmetlenségnek minősítve az adott filozófiai kérdést, témát. Ez egy vitatkozó filozófiai irányzat és stílus, ami lehetőség szerint érvekkel és ellenérvekkel próbál előre haladni. Gyökerei az un. logikai pozitivizmusig (logikai empirizmusig) illetve a mindennapi nyelv filozófiájáig nyúlnak vissza, de mára jelentősen átalakult ez az irányzat. E sorok írója azonban rendületlenül úgy gondolja, hogy a filozófia problémák vizsgálatát jelenti, és annak alapvető módszere a nyelvi-logikai elemzés, és ahol lehetséges, hasznos a formális-logikai, matematikai nyelv és eszközök használata. Azon túl a kérdések, problémák történeti bemutatása sokban segíti, olykor nélkülözhetetlen a filozófiai viták, elméletek megértéséhez. Ilyen vizsgálódásokat azonban nem tartalmaznak az írásaim, ezeket más szerzők munkáiban találhatja meg az olvasó.

Szerintem a filozófiai problémák egy részére adható konkluzív – vagy legalább episztemikusan valószínű – válasz, ahol nem annyira az újdonság, hanem a megfogalmazás pontossága, világossága a fő érték. Ilyen írásokat tartalmaz ez a könyv. A filozófiai problémák egy másik részére úgy tűnik vagy nem adható konkluzív válasz, vagy csak erős, önkényesnek tűnő előfeltevésekkel, vagy egész egyszerűen eddig még nem találtunk egyetlen meggyőző választ sem. Ez utóbbi kérdéscsoporttal egy másik könyvemben foglalkozom.

5. fejezet

Logikai szimbólumok, ábrák jegyzéke

Formális jel	Magyarázat	Megnevezés
$\sim$ vagy $\neg$	Nem igaz, hogy ...	tagadás, negáció
& vagy $\wedge$	... és ...	és, konjunkció
$\vee$	... vagy ... (megengedő értelemben)	vagy, alternáció, diszjunkció
∇	vagy ... vagy ...	kizáró vagy
$\rightarrow$	Ha ... akkor ...	kondicionális, materiális implikáció
$\leftrightarrow$	akkor és csak akkor, pontosan akkor ha	bikondicionális, materiális ekvivalencia
$\vdash$	... ból megengedett átalakításokkal levezethető ...	logikai levezethetőség
$\Rightarrow$	Az előtag igazsága minden megengedett értelmezésben maga után vonja az utótag igazságát	logikai következmény
$\Leftrightarrow$	Következmény mindkét irányban	logikai ekvivalencia
$=$	Igaz, amikor a jel két oldalán ugyanannak a neve szerepel	azonosság, identitás reláció
$\neq$	Igaz, amikor a jel két oldalán különböző dolgok nevei szerepelnek	nem azonosság, különbözőség
$\equiv$	Egyformaság, egybevágóság	ekvivalencia reláció
$\cong$	Hasonlóság	tolerancia reláció
$\in$	Az Euler féle szám eleme a valós számok halmazának	eleme reláció
$\notin$	Az Euler féle szám nem eleme a racionális számok halmazának	nem eleme reláció
$\subseteq$	Emberi lények halmaza $\subseteq$ civilizációt alkotó lények halmaza	részhalmaza
$\subset$	ikrek $\subset$ testvérek	valódi részhalmaza
$\Re$	Két vagy több dolog viszonya.	reláció
$\check{\Re}$	A gyereke reláció tranzitív lezártja a leszármazottja reláció.	reláció tranzitív lezártja

Bekarikázott számokkal jelölöm egy kifejezés üres, kitöltendő helyeit: (1) korábbi vagy egyidejű (2) -el

Formális jel	Magyarázat	Megnevezés
f	Az elevenszülők gyermekeihez hozzárendeli az anyjukat (a mesterséges beavatkozásoktól eltekintünk.) A gyermekek halmaza a függvény értelmezési tartománya, az anyák halmaza a függvény értékkészlete.	függvény
$\forall$	Minden ...	univerzális kvantor
$\exists$	Van olyan ...	egzisztenciális kvantor
$\exists!$	Van pontosan egy olyan ...	unicitás kvantor
$\imath$	Az a dolog ...	deskriptor
$\Box$	Szükségszerű, hogy ...(Bárhogy is alakulnak vagy alakulnának a körülmények, az állítás igaz marad.)	szükségszerű operátor
$\Diamond$	Lehetséges, hogy ...(Bizonyos körülmények között az állítás igaz.)	lehetséges operátor

Ábrák jegyzéke

1. i

2.1. Álló és mozgó nyil 14
2.2. Drót helye az időben 34
2.3. Venn diagrammal ábrázolva 39
2.4. Lágy drót 40
2.5. Rugó modell 40

3.1. Mintavétel 59
3.2. Közelítés 59
3.3. Nagyítás 60
3.4. Behatárolás 60
3.5. Testvére reláció 80

Táblázatok jegyzéke

1.1. Az (i.) szabálynak megfelelő f_1 függvény . . . 7

1.2. Az (ii.) szabálynak megfelelő f_2 függvény . . . 8

2.1. A nyíl paradoxon egyszerű levezetése . . . 13

2.2. A nyíl paradoxon pontosabb levezetése . . . 13

2.3. A newtoni fizika megoldása . . . 16

2.4 Angie Hobbs rekonstrukciója . . . 20

2.5. Az azonosak megkülönböztethetetlensége törvénye . . . 33

2.6. Drót alakjának táblázata . . . 36

2.7. Drót alakjának ellentmondásos táblázata . . . 36

2.8. Lágy drót belső állapot átmenet . . . 40

2.9. Lágy drót kimeneti függvény . . . 41

2.10. Rugó belső állapot átmenet . . . 41

2.11. Rugó kimeneti függvény . . . 41

2.12. A szükségszerűség téves levezetése . . . 45

2.13. A szükségszerű azonosság levezetése . . . 46

2.14. Noonan esetleges azonosság cáfolata . . . 50

2.15. Evans cáfolata . . . 51

2.16. Levezetés tolerancia reláció alkalmazásával . . . 53

2.17. Forrásban lévő víz . . . 54

3.1. Az azonosság reflexivitása . . . 62

3.2. Leibniz törvénye . . . 63

3.3. Reflexív reláció . . . 75

3.4. Szimmetrikus reláció . . . 75

3.5. Tranzitív reláció 76
3.6. Ekvivalencia reláció 76
3.7. Tolerancia reláció 77
3.8. Ekvivalencia reláció 77
3.9. Ekvivalencia reláció 77
3.10. Ekvivalencia osztályok 78
3.11. Közös édesanya 80
3.12. Közös édesapa 80
3.13. Azonos édesanya 81
3.14. Azonos édesapa 81
3.15. Édestestvére reláció 82
3.16. Féltestvére reláció 82
3.17. A szem felbontó képessége 82
3.18. Jelek és jelpéldányok 84
3.19. Felnőtt és gyermekkkor 93
3.20. Bölcsesség és butaság 93
3.21. Hasonlóság 99
3.22. Egyformaság 100

4.1. A filozófiai problémák tipológiája 107

Könyvek

[3] George Edward Hughes Maxwell John Cresswell. *A new intorduction to modal logic*. New York: Routledge, 1996. ISBN: 0-415-12600.

[5] Nicholas Fearn. *Zénón és a teknősbéka*. Akadémiai Kiadó, 2011, 240. old. ISBN: 978-963-059-096-9.

[7] André Gallois. *Occasions of Identity – A Study in the Metaphysics of Persistence, Change and Sameness*. Clarendon Press, OUP, 1998, 296. old. ISBN: 0-19-823744-8.

[8] André Gallois. *The Metaphysics of Identity*. New problems of Philisophy. Routledge, 2016, 215. old. ISBN: 978-0-415-84343-0.

[10] Maurer Gyula Virág Imre. *Bevezetés a struktúrák elméletébe*. Kolozsvár: Dacia könyvkiadó, 1976.

[11] Ruzsa Imre. *A matematika néhány filozófiai problémájáról*. Világnézeti nevelésünk természettudományos alapjai VI. Tankönyvkiadó, 1966, 65 –66. old.

[12] Ruzsa Imre. *Matematika pszichológia szakos hallgatók számára – egységes jegyzet*. Budapest: Tankönyvkiadó, 1975. ISBN: -.

[13] Ruzsa Imre. *Bevezetés a modern logikába*. Osiris tankönyvek. Osiris Kiadó, 2001, 391. old. ISBN: 963-379-978-3.

[15] Tőzsér János. *Metafizika*. Budapest: Akadémiai Kiadó, 2009. ISBN: 978-963-05–8788-4.

[16] Immanuel Kant. *A tiszta ész kritikája, előszó a második kiadáshoz, (BXIII, BXIV)*. Mesteriskola. Budapest: Atlantisz, 2004, 30 –31. old. ISBN: 963-9165-71-9.

[17] G. Havas Katalin. *Az azonosság törvénye a hagyományos és a modern formális logikában*. Akadémiai Kiadó, 1964, 135. old. ISBN: 046-900-123-347-1.

[18] Lánczos Kornél. *Számok mindenütt*. Gondolat Kiadó, 1972, 202. old.

[19] Saul Kripke. *Megnevezés és szükségszerûség*. Filozófiai Írók Tára. Budapest: Akadémiai Kiadó, 2007. ISBN: 978-963-05-8546-8.

[26] Willard Van Orman Quine. *A logika módszerei*. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1968. ISBN: -.

[27] Agustín Rayo és Gabriel Uzquiano. *Absolute Generality*. Oxford University Press, 2006.

[28] Bertrand Russell. *Our Knowledge of the External World*. Routledge, 1929.

[29] Bertrand Russell. *Filozófiai fejlődésem*. Gondolat Kiadó, 1968.

[30] R. Mark Sainsbury. *Paradoxonok*. Typotex Kiadó, 2012, 195. old. ISBN: 978-963-2797-05-2.

[32] Jurij Anatoljevic Srejder. *Egyenlõség, hasonlóság rendezés*. Budapest: Gondolat, 1975. ISBN: 963-280-129-6.

[33] Tuboly Ádám Tamás. *Advocatus diaboli – Quine és a modális logika*. L'Harmattan Kiadó, 2019, 378. old. ISBN: 9789634145196.

[34] Alfred Tarski. *Bizonyítás és igazság – válogatott tanulmányok*. Budapest: Gondolat, 1990, 74–78. old. ISBN: 963-282-800-5.

[35] Forrai Gábor Margitay Tihamér. *Tudomány és történet*. Typotex Kiadó, 2004, 413. old. ISBN: 978-963-9326-28-6.

[36] Ludwig Wittgenstein. *Logikai-filozófiai értekezés*. Akadémiai Kiadó, 1963.

[37] Ludwig Wittgenstein. *Filozófiai vizsgálódások*. Atlantisz Kiadó, 1992.

[39] Tim Crane Katalin Farkas (eds.) *Metaphysics – A Guide and Anthology*. Oxford: Oxford University Press, 2004. ISBN: 0-19-926197-0.

[40] Bács Forrai Molnár Tőzsér (szerk.) *Perlekedő rokonok? analitikus filozófia és fenomenológia*. L Harmattan Könyvkiadó Kft., 2011, 220. old. ISBN: 978-963-236-461-2.

[41] Farkas Katalin Huoranszki Ferenc (szerk.) *Modern Metafizikai Tanulmányok*. Budapest: ELTE Eötvös Kiadó, 2004. ISBN: 978-963-463-735-3.

Tanulmányok

[1] Jc Beall. „Is Yablo's Paradox Non-Circular?": *Analysis* 61 (2001), 176–187. old.

[2] Max Black. „The Identity of Indiscernibles". *Mind* 61.242 (1952), 153–164. old. ISSN: 00264423, 14602113. URL: http://www.jstor.org/stable/2252291.

[6] Thomas Forster. „The Significance of Yablo's Paradox without Self-Reference". (1996 October 30), 2. old. URL: http://www.dpmms.cam.ac.uk/âĹijtf/yablondjfl.ps.

[9] Laurence Goldstein. „Fibonacci, Yablo, and the Cassationist Approach to Paradox". *Mind* 115.460 (2006), 867–889. old. ISSN: 00264423, 14602113. URL: http://www.jstor.org/stable/4121874.

[14] Robin Jeshion. „The Identity of Indiscernibles and the Co-Location Problem". *Pacific Philosophical Quarterly* 87.2 (2006), 163–176. old. DOI: 10.1111/j.1468-0114.2006.00253.x.

[20] David Lewis. „Vague Identity: Evans Misunderstood". *Analysis* 48.3 (1988), 128–130. old. ISSN: 00032638, 14678284. URL: http://www.jstor.org/stable/3328214.

[21] Penelope Mackie. „Persistence and modality". *Synthese* (14 May 2018), 14. old. DOI: https://doi.org/10.1007/s11229-018-1776-x. URL: https://rdcu.be/celDz.

[22] Boda Mihály. „Az azonosság egy jellemzője: a Leibniz-elv". *Pro Philosophia Füzetek* 3 (2006).

[23] Nikoletta Nemesi. „Kritikai megjegyzések Harold W. Noonan kontingens azonosságról alkotott koncepciójáról". *Különbség* 16.1 (2016), 143–155. old. DOI: https://doi.org/10.14232/kulonbseg.2016.16.1.208. URL: http://www.kulonbsegfolyoirat.hu/index.php/kulonbseg/article/view/208/0.

[24] Harold W. Noonan. „Indeterminate Identity, Contingent Identity and Abelardian Predicates". *The Philosophical Quarterly (1950-)* 41.163 (1991), 183–193. old. ISSN: 00318094, 14679213. URL: http://www.jstor.org/stable/2219592.

[25] Graham Priest. „Yablo's Paradox". *Analysis* 57.4 (1997), 236–242. old. ISSN: 00032638, 14678284. URL: http://www.jstor.org/stable/3328081.

[31] Wolfgang Schwarz. „Contingent Identity". *Philosophy Compass* 8.5 (2013), 486–495. old. DOI: https://doi.org/10.1111/phc3.12028.

[38] Stephen Yablo. „Paradox Without Self-Reference". *Analysis* 53.4 (1993), 251–2. old. DOI: 10.1093/analys/53.4.251.

Alphabetical Index

a meghatározottság axiómája, 66

a megkülönböztethetetlenek azonossága, 65

abelardi predikátum, 50

Alfred Tarski, 1

Amie L. Thomasson, 99

André Gallois, 22

Angie Hobbs, 20

antiszimmetrikus reláció, 76

Aquinói Szent Tamás, 11, 62, 104

Arend Heyting, 6

Arisztotelész, 104

asszimetrikus reláció, 76

Az azonosak megkülönböztethetetlensége törvénye, 24, 33

azonosság, 22, 58, 61, 78

Barbara Vetter, 104

Bartók Béla, 105

Beatles, 105

belső tulajdonság, 29, 94

Benedek András, 16

Bertrand Russell, 1, 15

bináris reláció, 71

Boda Mihály, 91

Brian Weatherson, 65

Bács Gábor, 97

Carnap, 104

Casey D. McCoy, 19

Chris Mortensen, 19

Cicero, 68, 69

Dave Brubeck, 105

David Hilbert, 6

David Lewis, 27, 43

de dicto, 46, 55

de re, 44, 46, 55

egyformaság, 100

ekvivalencia osztályok, 77

ekvivalencia reláció, 73, 76, 77, 80, 83, 100

endurantizmus, 69, 93, 101

Engels, 104

Epimenidész, 1

eternalizmus, 67

Eötvös József, 87

felcserélhetőség, 83

fizikai tárgyak önazonossága, 32

fizikai és filozófia, 35

folyamatos létezés, 93

Forrai Gábor, 31

Frédéric Chopin, 105

G. Havas Katalin, 62
Garaczi Imre, 57
Gareth Evans, 43
Georg Cantor, 1
Graham Priest, 8
gyengített Lockiánus elv, 88
gyönge Lockiánus elv, 89
Gébert Judit, 97

Hao Wang, 62
Harold Noonan, 83
Harold W. Noonan, 43
Harry Deutsch, 62, 67
hasonlóság, 53, 79, 99
hazug paradoxon, 1
Hegel, 16, 104
Heidegger, 104
homályos azonosság, 51
Hume, 58

index, 30
intrinzikus tulajdonság, 29, 94

Jan Brouwer, 6
Jc Beall, 8
Jennifer Wang, 97
Jon Barwise, 3
Jurij Anatoljevic Srejder, 79

Kant, 104, 106
kontingens azonosság, 48
külső tulajdonság, 29, 66

Lambda absztrakció, 44
Laurence Goldstein, 8
Lehár Ferenc, 105
Leibniz, 22
Leibniz törvénye, 33, 62
Lonard Mlodinov, 32
Ludwig Wittgenstein, 11
Lánczos Kornél, 61

Machaut, 105
makroszkopikus tárgy, 90
Martin Buber, 104
Marx, 16
Maurer Gyula, 64
Max Black, 91
merev jelölő, 54
Michael Bruce, 106
Michel Foucault, 104
Mihálydeák Tamás, xi
Milétoszi Eubulidész, 1
mozgás, 11

nem jól fundált halmazelmélet, 64
Nemesi Nikoletta, 43
Newton, 16, 106
Nicholas Fearn, 11
Nietzsche, 104
Nuel Belnap, 3

perdurantizmus, 38, 69, 93, 101
Peter Aczel, 64
Pontius Pilátus, 1

R. Mark Sainsbury, 11
Radnóti Miklós, 87

reflexív reláció, 75
relatív azonosság, 66, 67
reláció, 73
reláció alaphalmaza, 78
reláció inverze, 74
reláció tranzitív lezártja, 74
Robert Merrihew Adams, 58
Robin Jeshion, 61
Rudolf Carnap, 11, 44
Ruzsa Imre, 1, 15, 43, 63
Ryle, 104

S. Marc Cohen, 17
Saul Kripke, 3, 44, 47
Spinoza, 104
Stephen Hawking, 32
Stephen Yablo, 5
Steven Barbone, 106
Szakadát István, 77
Szent Péter, 5
Szent Ágoston, 104
szimmetrikus reláció, 75
Széchenyi István, 87
Szókratész, 93

Tarski, 106
Thomas Forster, 8
Thészeusz hajója, 32, 100
Timothy Williamson, 58
tolerancia reláció, 53, 77, 81, 82, 99
tranzitív reláció, 75
tér-időbeliség elve, 87
Tőzsér János, 32, 97

Venn diagramm, 38
világvonal, 89, 90
Virág Imre, 64
változás, 22
véges automata, 40, 41

Weak Lockean Principle, 88
Willard Van Orman Quine, 43
Willard van Orman Quine, 59
Wittgenstein, 82, 86, 104
Wolfgang Schwarz, 43, 47

Zermelo-Fraenkel halmazelmélet, 63
ZF halmazelmélet, 63
Zénón, 11

üres reláció, 74

A könyv LaTeXszövegszerkesztővel készült.