Máté András matematika-logika történeti áttekintése

Bevezetés

Az európai kultúra belső összefüggéseinek történetében a matematika és a filozófia viszonyát kivételes hely illeti meg: bár a megismerésnek ez a két területe első látásra vagy a közvélekedés szerint egymástól meglehetősen távol áll, történetük kétezer ötszáz éve mégis igen szoros kapcsolatukat és kölcsönhatásukat tanúsítja. A görög matematikában kialakult axiomatikus-deduktív módszer -- melyet ma is általában a matematika általános módszerének, a valódi, tudományos matematika megkülönböztető jegyének szoktunk tekinteni -- a módszeres filozófiai érvelés megszületésével szoros összefüggésben alakult ki. (Szabó Árpád ennek az összefüggésnek a kutatása során egészen addig a hipotézisig jutott, hogy az eleai filozófia indirekt bizonyítási módszerét illeti a prioritás, és az axiomatikus-deduktív módszer kialakulása ennek a matematikába való átvételével vette kezdetét. Lásd erről: A görög matematika kezdetei.)

A filozófia történetében Platón az első, aki műveiben komoly teret szentel és filozófiájában lényeges szerepet juttat a matematikának. A hagyomány szerint a platóni Akadémia bejáratán a ,,Geometriában járatlanok ne lépjenek be'' felirat állt. A dialógusokban rengeteg utalást találunk a kor matematikájának nevezetes eredményeire és problémáira. A *Theaitétosz* című dialógusban a szakaszok, illetve a rájuk emelhető négyzetek összemérhetőségének problémájáról olvashatunk (147b -- 148b). A szakasz matematikatörténeti értékelése vitatott, de az biztos, hogy az ifjú Theaitétoszt a geometriai tanulmányaiban mutatkozó éleselméjűsége teszi alkalmassá arra, hogy Szókratész partnere legyen a megismerés mibenlétének kutatásában.

Ennél is lényegesebb a *Menón* híres rabszolgajelenete (82b -- 85b), melyben Szókratész egy tanulatlan fiút vezet rá a négyzet megkettőzése problémájának megoldására, s ezzel demonstrálja azt a nézetét, hogy vannak olyan ismereteink, amelyeket nem tapasztalás útján szerzünk és nem is másoktól tudunk meg, hanem önmagunk önmagunkban fedezzük fel azokat, mintegy visszaemlékezésképpen. Az ismeret homályosan meg van bennünk születésünktől kezdve, a tanítónak csak az a feladata, hogy a visszaemlékezést, a homályos kép kitisztulását segítse kérdéseivel, tehát ne oktasson (az ismeretközlés értelmében), hanem felfedeztessen. A dialógus fő kérdése az erény taníthatósága, Szókratész érvelésének pedig kulcsfontosságú eleme, hogy az erény *ebben az értelemben* tanítható.

Nézzük, mi is történik a matematikában a 19.sz.-ban. Igazából korábban kezdődik a dolog, mint a múlt század vége; a matematikatörténeti vonatkozások még a legszűkebben véve is legalább a 19.sz. első évtizedeiig nyúlnak vissza. Bizonyos fejlemények következtében megrendül a hagyományosnak mondható kép a matematikáról. Eszerint az Arisztotelészre visszavezethető kép szerint a matematika valamilyen okból igen biztosnak tekintett kiindulópontokból jut el, kizárólag logikai levezetés útján a tételeihez. Ennek folytán a matematika a biztos és tökéletesen megalapozott igazságok birodalma, amelyet abszolút megbízható módszere révén kivételes hely illet meg a tudományok között. Látni fogjuk, hogy a megrendülés után felmerülő filozófiai álláspontok skálája rendkívül széles, onnan kezdve, hogy egyesek megpróbálják fönntartani, erőteljes átértelmezések árán, a matematika tételei számára a különösen erős vagy biztos igazságok státuszát, egészen odáig, hogy mások szerint egyáltalán nincs értelme a matematika tételeire az ‘igaz’ kifejezést használni.

Mik a matematikán belüli tényezői ennek a változásnak? Próbáljuk meg végigzongorázni a matematika három hagyományos nagy területét. A geometriában azt hiszem, hogy mindenkinek eszébe jut a nem-euklidészi geometriának a megjelenése. Természetesen a megrendítő dolog itt nem az, hogy különc emberek megpróbálnak a párhuzamossági axióma tagadásából és a többi euklidészi axióma megtartásából újabb rendszereket fölépíteni, hanem az 1850-es évektől kezdve kiderül, hogy igazából az euklidészi és a Bolyai–Lobacsevszkij–féle geometria között a matematika módszerével nem lehet választani. Ha az egyik ellentmondásos, akkor a másik is az, és viszont, tehát biztosan nem fog sikerülni, hogy a párhuzamossági axióma tagadásából ellentmondást vezessünk le és ezzel indirekte igazoljuk a párhuzamossági axiómát. Empirikus úton ugyancsak nem lehetséges a döntés, bár nem kisebb matematikus, mint Gauss erre is kísérletet tesz, csillagászati mérések útján.

A másik és szintén elég lényeges probléma az, hogy némiképp megrendül a bizalom az euklidészi axiomatikában, amely kétezer éven keresztül mintaszerűnek számított a szigorúságával. Kiderül, hogy az euklidészi *Elemek*ben vannak úgynevezett rejtett axiómák. Nevezetes példa erre a Pasch-féle axióma, mely szerint ha egy egyenes belső pontban metszi egy háromszögnek az egyik oldalát, akkor ugyanígy metszi valamelyik másik oldalt is, vagy pedig átmegy a szemben lévő csúcson. Ezt a kijelentést bizonyára mindenki, akinek van valami középiskolai szintű naiv elképzelése a geometiáról, hajlandó magáról értetődően igaznak elfogadni; viszont nem vezethető le az *Elemek* axiómáiból, ezért teljesen megérdemli az axióma nevet az arisztotelészi értelemben. Kiderült az, hogy Euklidész bizonyos tételeit enélkül nem lehet bebizonyítani, viszont Euklidész ilyen állítást nem mond ki az axiómái között. Az *Elemek* bizonyításaiba itt-ott becsempésződnek, kimondatlanul felhasználásra kerülnek ilyesmik; ezeket hívjuk rejtett axiómáknak. A történet természetesen alapjában véve logikai kérdést vet föl: azt, hogy hogyan lehet az ilyen baleseteket elkerülni. A nem-euklidészi geometria viszont az igazság és bizonyosság kérdését veti fel: melyik az igazi, van–e egyáltalán igaz geometria?

A matematikai analízisben, azaz a sorozatok elméletében, a differenciál- és integrálszámításban nem botrány tör ki, hanem több mint fél évszázados folyamat révén tisztázódik és lezárul egy régi botrány. Ezt a matematikai ágazatot Leibniztől kezdve az euklidészi szigorúság mellőzésével, a végtelen kis mennyiségekkel való számolásra, egyszerűen a közönséges aritmetika analógiájára építették föl. Bár Leibniz maga a végtelen kis mennyiségeket csak kényelmes jelölésnek, rövidítésnek tekintette, de a követői, az analízis művelői az úgynevezett infinitezimálisokat már valódi számokként kezelték. Az így kialakult kalkulus egyrészt nagyszerűen alkalmazható volt a fizikában és műszaki téren, de másrészt nem kellően értő kézben mindenféle paradoxonokat, nyilvánvalóan hibás eredményeket produkált, mégpedig anélkül, hogy egyetlenegy kimondott szabályt is megsértettek volna. Tehát nem volt világos kritérium, hogy mikor jó egy levezetés vagy számítás, mikor nem jó. Ebben az értelemben nem volt euklidészi az analízis. A múlt században lényegében a végtelen kis mennyiségek kiküszöbölése történik meg: fokról fokra aritmetizálták, végső soron a természetes számok aritmetikájára vezették vissza a matematikai analízist. A természetes számokból föl lehetett már építeni a racionális számokat, különböző magasabb fokú módszerekkel az irracionális számokat, határérték fogalmat stb. Tehát ami történt, az egy tisztázódási folyamat, csakhogy maradék problémákat hagyott maga után. Az egyik maradék probléma az ilyenfajta paradoxonok visszatérésének a lehetősége, más szóval, hogy a természetes számok aritmetikájának vannak-e valamilyen értelemben abszolút biztos alapjai? Ez a kérdés Frege és kortársai előtt. A másik maradék kérdés egy kicsit homályosabb, ha úgy tetszik, ontológiai probléma. Azt továbbra is gondoljuk, hogy természetes számok vannak, és ugyancsak létezik minden, amit belőlük föl lehet építeni, egészen az irracionális számokig; de a végtelen kis mennyiségekről ezek után nem kell azt gondolni, hogy azok léteznek. Mi itt a kritérium, hol a határ? Különböző válaszok lehetségesek; rögtön lehetséges az a válasz, hogy biztosan nem létezik az, aminek a létezésének a feltételezése ellentmondásra vezet, és ezért nem léteznek a végtelen kis mennyiségek. De itt megint garancia kérdések merülnek föl. Honnan tudjuk azt, hogy a természetes számok létezésének a feltételezése nem vezet ellentmondásra? Mi az a minimális egzisztenciafeltevés, amellyel ki lehet jönni a matematikában?

A legnagyobb maradék probléma, amelynek a 20. sz. matematikájának kialakulásában aztán igen nagy szerepe lesz, a végtelen sokaságok problémája. A végtelen mennyiségektől az aritmetizálással, azzal, amit a ma analízist tanulók ,,epszilonozásnak” neveznek, meg lehetett szabadulni, de a végtelen sokaságoktól nem. Bernard Bolzano, akinek nagy szerepe volt az analízis aritmetizálásában, a halála előtt egy évvel, 1847-ben befejezett egy könyvecskét *Paradoxien des Unendlichen* (a végtelen paradoxonai) címmel. Ebben annyira lehangoló eredményekre jutott, hogy ő maga nem is adta ki, hanem csak 1854-ben, a halála után egy tanítványa. Lényegében oda lyukad ki, hogy a végtelen beengedése a matematikába mindenképpen feloldhatatlan ellentmondásokhoz vezet. Részben fölhozza a még nem teljesen aritmetizált analízis problémáit, amelyeknek a kiküszöbölésére ő maga is meglehetősen sokat tett, de ő még úgy látta, hogy ez a munka nem fejezhető teljesen be; ilyen irányú kételyeire a következő néhány évtized fejlődése választ adott. Másrészt viszont végignézi számos arcát egy egyszerűen megfogalmazható problémának: annak, hogy hogyan lehet nagyság szerint különbséget tenni végtelen halmazok között. Van egy euklidészi axióma, miszerint az egész mindig nagyobb, mint a rész. Bolzano ezt alapigazságnak tekinti; de viszont van egy olyan egyszerű elv is, hogy ha két halmaz között kölcsönösen egyértelmű leképezés lehetséges, akkor azok (nagyságukat tekintve) egyformák. Ez az elv jóval régebben megvan a matematikában, mint a modern halmazfogalom (persze korábban másképp fogalmazták), és Bolzano hosszan érvel amellett, hogy fönn is kell tartani. De a természetes számok és a nem negatív páros számok egyszerű módon kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, csak meg kell feleltetni minden természetes számnak a kétszeresét. Ez nyilvánvalóan kölcsönösen egyértelmű, és a természetes számok halmazát a saját felével hozza megfeleltetésbe. Az okfejtés így nagyon is egyszerű, szinte primitív; Bolzano érvelésében az az érték, hogy bebizonyítja: a problémától semmiféle kézenfekvő vagy körmönfont kerülő úton nem lehet megszabadulni. Egyetlenegy megoldás maradna: elvetni azt, hogy az egész nagyobb, mint a rész. Ez előtt a lépés előtt Bolzano megtorpan; ennek megtétele Georg Cantorra marad.

Az algebrában nem a problémák és paradoxonok befolyásolják a matematika képének megváltozását, hanem a végbemenő óriási fejlődés. A 19. században az algebra elszakad attól, hogy a különböző fajta számokon végzett műveletek tudománya legyen, és absztrakt művelettudománnyá válik. Mondják, hogy a 19. sz. matematikájának legnagyobb felfedezése a csoport fogalma. A csoport olyan halmaz, amelynek elemei között definiálva van egy művelet; nevezhetjük szorzásnak és jelölhetjük egymás mellé írással. A szorzás asszociatív kell, hogy legyen, azaz az *a(bc) = (ab)c* azonosságnak érvényesnek kell lennie. A halmaz egyik eleme egységelem, azaz ha bármelyik másik elemet megszorzunk vele, akkor a szorzat ez a bizonyos másik elem. A halmaz mindegyik elemének van inverz eleme, amivel őt összeszorozva megkapjuk az egységet. A pozitív számok a közönséges szorzásra nézve nyilván csoportot alkotnak, melyben az 1 az egységelem és a reciprok az inverz; de ugyancsak csoportot alkot az összes valós szám az összeadásra, mint műveletre, csak ott az egységelem nem az 1 lesz, hanem a 0, az inverz pedig az ellentett. Az összes valós szám a szorzásra nem alkot csoportot, hiszen a 0-nak nincsen inverze. Vannak nem kommutatív csoportok is, azaz olyanok, amelyekben *ab = ba* nem mindig igaz. Csoportot alkotnak például elég nagy és fontos függvényhalmazok a függvényösszetételre nézve (tehát az *fg* szorzatfüggvény értéke az *x* helyen az, amit *f* a *g(x)*-hez rendel); itt egységelem az a függvény, ami mindenhez önmagát rendeli. A geometriai transzformációkon belül igen fontos csoportok vannak az egymás után elvégzésre, mint műveletre. A csoportok elméletében az az újdonság, hogy a műveletek tulajdonságait vizsgáljuk, függetlenül attól, hogy min végezzük a műveleteket. Azok a kijelentések, amelyeket előbb leszögeztünk, hogy ti. a szorzás asszociatív, létezik egységelem és inverzelem, a csoportelméletnek axiómái abban az értelemben, hogy az elmélet csak azzal foglalkozik, hogy mi következik ezekből. De mit jelent az, hogy ezek igazak? Egyes struktúrákban igazak, azok csoportok, más struktúrákban nem igazak, azok nem csoportok. A csoportelmélet nem azzal foglalkozik, hogy hol igazak az axiómái és hol nem, hanem azzal, hogy mi következik belőlük. Ezek a következmények aztán persze minden egyes konkrét csoportban igazak lesznek. Van-e jogunk azt mondani, hogy konkrét csoportoktól függetlenül, önmagukban igazak azonban? Ez a kérdés az algebrista számára valójában nem túlzottan értelmes; tehát itt az igazságfogalom megrendül, ill. átalakul.

Lássunk a csoporton kívül egy másik nagyon fontos absztrakt struktúrát: a Boole–algebrát. Ez már egészen másképp működik, mint a számok közötti műveletek algebrája. Van benne két olyan művelet, amelyeket bizonyos mértékig analógiába lehet hozni a szorzással, illetve az összeadással; csakhogy ezek többek közt kölcsönösen disztributívak egymásra nézve. Azaz nemcsak a számoknál jól ismert *a(b+c) = ab + ac* azonosság áll fenn, hanem *a+bc =(a+b)(a+c)* is. Ez nem valami Istentől elrugaszkodott dolog, hanem ez is egy konkrét interpretációból nő ki; valójában nem is egyből, hanem háromból. Először is lehetnek az alaphalmaz elemei kijelentések, az összeadás a ‘vagy’–gyal, a szorzás pedig az ‘és’–sel való összekapcsolás; másodszor, legyenek az alaphalmaz elemei maguk is halmazok, szorzás a közös rész, az összeadás az egyesítés; harmadszor, a valószínűségszámításban az alaphalmaz elemei események, a szorzat az együttes bekövetkezés, az összeg pedig az az esemény, hogy legalább az egyik esemény bekövetkezik. Egyébként a Boole–algebrák fontos tulajdonságait és az első két interpretációt megtaláljuk Leibniz kiadatlan írásaiban, úgy 150 évvel Boole előtt; ezt azért említem meg, mert úgy tudom, Leibniznek ezekben az írásaiban merül fel először az a gondolat, hogy egy formális rendszert többféleképpen is lehet interpretálni.

De térjünk vissza a múlt század végére, amikor a különféle algebrai struktúrák már polgárjogot nyertek; kézenfekvő gondolatnak tűnhetett, hogy a természetes számokat ilyenfajta, az algebrában szokásos axiómák segítségével ragadjuk meg. Ekkor azonban felmerül a kérdés, hogy a természetes számok műveleteinek az elméletét valamilyen különleges státusz illeti-e meg a matematikán belül, vagy pedig ugyanaz a helyzet, mint a csoportok vagy a Boole–algebrák elméletére, hogy ez az elmélet is konkrét esetek, konkrét struktúrák egész légiójára igaz. Az alternatívánk tehát az, hogy a természetes számoknak, mint műveleti struktúrának az axiómarendszere más természetű, mint más algebrai struktúráké, amennyiben ezek az axiómák egy konkrét, létező halmazt írnak le, *a* természetes számokat (mint ahogy az euklidészi geometria a régebbi felfogás szerint *a* teret írja le), vagy pedig több konkrét struktúrára is igazak az axiómák, és akkor a matematika eszközeivel nem tudjuk kiválasztani, melyiket alkotják az igazi (?) természetes számok.

A természetes számok elméletének részben az algebrai elméletek módjára való felépítése Giuseppe Peano nevéhez fűződik, a múlt század végén. Az ő rendszerében az alaphalmaz elemei között van egy speciális elem, a 0, és egyetlen egyváltozós művelet van, a rákövetkezés. Csakhogy van Peano rendszerében egy axióma, ami egészen más jellegű, mint az algebrai axiómák, mégpedig a teljes indukció axiómája. Ez nem műveleti tulajdonságokat ír le, hanem lényegében azt, hogy a természetes számok mindegyik elemét el lehet érni úgy, ha a nullától elindulva egyenként továbbszámolunk. Ez nem műveleti tulajdonság, hanem az algebrai jellegű axiómáktól teljesen eltérő természetű állítás, amely a számsor végtelenségének sajátos természetével függ össze.

S akkor itt átjutottunk a negyedik területre, ami új terület, és ami a felvetett problémákkal kapcsolatban születik meg. A végtelen halmazok elméletéről van szó, amely Georg Cantor nevéhez fűződik. Már említettem, hogy ő lépi meg annak az euklidészi axiómának az elvetését, hogy az egész nagyobb, mint a rész. Ha két halmaz között van kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor azok egyforma nagyok, még ha az egyik valódi része is a másiknak. Cantor először is bebizonyítja azt, hogy ez nem annyit jelent, hogy a végtelen halmazokat mind egyforma nagynak tekintjük. Sőt, kidolgozza a végtelen számosságok elméletét, melynek az egyik alapvető, viszonylag egyszerű tétele éppen az, hogy minden végtelennél létezik nagyobb végtelen, sőt, végtelenek egy adott, növekvő sorozatánál is van nagyobb és így tovább.

Cantor halmazelmélete egyfelől, a nagy végtelenek aritmetikájával, meglehetősen fantasztikus építménynek tűnik. Másfelől azonban megvan az a jelentősége, hogy a matematikában rejtetten mindenütt jelenlevő fogalmakra épül, és ezért képes a leibnizi értelemben vett *mathesis universalis* szerepét is játszani. Olyan elmélet, amelyben leírható, modellezhető a matematikának bármelyik területe s ezért ha volna egy tökéletesen megbízható halmazelméletünk, akkor az összes kérdés az igazsággal és a bizonyossággal kapcsolatban meg volna oldva. Igen ám, csakhogy még maga Cantor észreveszi azt a kellemetlen tényt, ami aztán elsősorban Bertrand Russel révén vált nevezetessé: hogy ez a halmazelmélet egyáltalán nem tökéletes, hanem ellentmondásos.

Cantor a halmazfogalmat sok, kissé ködös pszichologizáló magyarázaton túl igazából arra az elvre építi, hogy akármilyen, tisztességesen definiált tulajdonsághoz van egy olyan halmaz, amely az összes, ilyen tulajdonsággal bíró objektumból áll. A másik lényeges elv, amire épített, az, hogy a halmazképzés iterálható, ismételhető, tehát halmazokból is alkothatók halmazok, mivel a halmazoknak is vannak tulajdonságaik; más szóval a halmazok, a halmazok halmazai, a halmazok halmazainak halmazai, és így tovább a végtelenségig (sőt, azon túl) ugyanúgy objektumoknak tekinthetők, következésképp tulajdonságaik alapján halmazokba sorolhatók, mint azok az objektumok, amelyekből kezdetben kiindultunk.

Russell voltaképpen erről a két egyszerűnek és magától értetődőnek látszó elvről derítette ki, hogy együttesen ellentmondásra vezetnek. Vegyük ugyanis azt a halmaztulajdonságot, hogy ‘önmaga elemének lenni’. Ha feltételezzük, hogy van egy olyan halmaz, ami ennek a tulajdonságnak a terjedelme, ebből könnyedén ellentmondásra lehet jutni. Cantor erre azt mondta, hogy akkor az ilyen tulajdonságok terjedelme nem halmaz, hanem inkonzisztens sokaság.

A mai halmazelmélet úgy szabadul meg az önellentmondástól, hogy nem tételezi fel eleve minden tulajdonsághoz halmaz létezését, hanem csak azt posztulálja, hogy bizonyos halmazképzési műveletekkel nem lépünk ki a halmazok közül, Cantor inkonzisztens sokaságainak veszélyes világába. Voltaképpen két kritériumunk van, egy pozitív és egy negatív. Egyfelől, a halmazelmélet axiómáiból következik bizonyos sokaságokra nézve, hogy halmazok, másfelől pedig, ha tudjuk egy tulajdonságról, hogy ellentmondást eredményezne, ha halmazt rendelnénk hozzá, akkor annak a tulajdonságnak a terjedelme inkonzisztens sokaság (ma inkább valódi osztálynak hívjuk az ilyeneket). Cantor számára, mint filozófiai írásaiból kiderül, ez az eljárás azért lett volna elfogadhatatlan, mert nincs előre alkalmazható kritérium arra, hogy a sokaságok vagy osztályok közül mi halmaz és mi inkonzisztens sokaság. Nem vagyunk biztosítva az ellen, hogy valamely sokaság halmaz-voltának feltételezéséből, vagy akár az egész halmazelméletből a későbbiekben ellentmondás süljön ki. Cantor, amikor az inkonzisztens sokaságokról írt, azt szerette volna, hogy néhány ilyet, mint bűnöst, eleve zárjunk ki a halmazelméletből és utána már menjen minden azon a módon, ahogy korábban gondolta. A Russell-paradoxon kiküszöbölésének ez a módja azonban nemcsak hogy nem túl elegáns, hanem nem is járható.

Ezek tehát a matematika történetében azok a körülmények, amelyek között matematikusok és filozófusok elkezdenek ,,az alapok válságáról” beszélni. Nézzük meg a továbbiakban, hol vannak itt a filozófiai kérdések, és azokra milyen válaszok lehetségesek, ill. milyen válaszok merültek fel.

Az első kérdés az, hogy hogyan lehet biztosítani a logikai zártságot, tehát hogyan lehet tökéletesíteni az euklidészi módszert, kiküszöbölni rejtett axiómák fellépését. Ez aktuális kérdés a 19. század végének matematikusai számára, a megválaszolásához pedig arra kellene kritériumot adni, hogy mikor következménye egy tétel az adott axiómáknak. Az nem lesz jó kritérium, hogy akkor, ha a levezetése kategórikus szillogizmusokból áll, hiszen a matematika szükségleteihez képest Arisztotelész szillogisztikája messze túl gyenge logikai elmélet; és túlzottan gyengék ehhez még a szillogisztika akkortájt megszületett általánosításai is, így George Boole logikai algebrája vagy de Morgan és Peirce relációelmélete is. A másik, nehezebb és mélyebb kérdés az, hogy lehet-e eleve biztosítani egy matematikai elmélet ellentmondásmentességét, s ha igen, hogyan? A harmadik, és már jóval filozofálóbb kérdés az, hogy mi a matematika tárgya. Többek közt azért mondtam el az előzőeket, hogy megmutassam: ez a kérdés fölmerül matematikusok számára is. Az euklidészi és a nem-euklidészi geometriák közötti döntésnek a kizárt volta fölveti azt, hogy a geometria valójában a teret tanulmányozza-e? Az algebra fejlődése pedig nyilvánvalóan a konkréttól, a nyilvánvalóan felismerhető tárgytól való elrugaszkodás. A negyedik kérdés az, hogy mi a tételek természete. Tartható-e, hogy a matematika tételei abszolút biztos igazságok? Netalán inkább olyanfajta igazságok, mint a természettudományok állításai, azaz újabb tények felmerülése esetén korrekcióra, pontosításra szorulhatnak? Esetleg egyáltalán nincs értelme itt bármiféle igazságfogalmat használni, tekintsük inkább a matematikát a formulákkal való manipulálás művészetének, s azt a kérdést, hogy ezek a formulák igazak-e, sőt, azt is, hogy miről szólnak, szorítsuk a matematikán kívülre? Újra fölmerül, mint probléma, hogy a kanti ítéletosztályozáson belül hol a helye a matematika tételeinek; tartható-e, hogy szintetikus a priori igazságok, vagy sem.

Ezek a kérdések az alapkérdések; a rájuk adott válaszok képezik a különböző matematikafilozófiai iskolák programját. Azt, hogy mi a tartalma a válaszoknak, talán jobban meg lehet érteni, ha megfogalmazunk néhány további kérdést. Ezek nem ilyen általános jellegűek, de mintegy tesztként szolgálhatnak, működés közben mutathatják be a különböző felfogásokat. Ötödik kérdésünk az legyen, hogy mik a természetes számok? Vannak-e olyanok, és ha igen, mik azok? A hatodik kérdés az, hogy mi a logika. A hetedik kérdés a halmazelmélet paradoxonaihoz való viszony. (Az említett, Russell-féle paradoxonnak létezik néhány testvére; ezek többé-kevésbé felfoghatóak ugyanazon gondolat más megfogalmazásának is.) Ki kell-e egyáltalán küszöbölni ezeket a paradoxonokatt, s ha igen, hogyan?

Nézzük tehát a válaszokat a kérdésekre, azaz tekintsük át a különböző matematikafilozófiai felfogásokat. Ezeket hagyományosan három iskolára szokás osztani; mint minden beskatulyázást, ezt is lehet bírálni, de a felosztással szembeni ellenvetéseket most hagyjuk.

Az iskolák közül a legtradicionálisabb a logicizmus, amit matematikai platonizmusnak is szoktak nevezni. Van egy ősapja, Leibniz; vezető figurái pedig Frege, Russell és Rudolf Carnap. Van egy fő jelszava, mint mindegyik iskolának; a logicizmus fő jelszava az, hogy az aritmetika, avagy az egész matematika a logika része, az aritmetika semmi más, mint továbbfejlesztett logika. Az első kérdés ezzel kapcsolatban persze az, hogy mi az, hogy logika. Semmiképpen nem az arisztotelészi logika, hanem egy ennél lényegesen fejlettebb és többet tudó logikai rendszer az, ami a földi mása az *igazi* logikának. Abban nem lehetünk biztosak, hogy ismerjük az igazi logikát —mint ahogy az kiderült —, de hogy van ilyen, az biztos. A logika, ahogy Leibniz, Frege és egy darabig Russell is tekinti, időtlen igazságokat tartalmaz ideális tárgyakról. (Ideális tárgyakról szólva olyasmikre kell gondolni, mint a gondolatok, azaz a kijelentések tartalmai, valamint ilyeneknek a strukturális részeire.) Ha tehát sikerül bebizonyítani, hogy az aritmetika levezethető a logikából, ezzel az aritmetika (és vele az egész analízis) törvényeinek is bizonyítottuk az időtlen és abszolút igaz voltát. Frege filozófiai célkitűzése logicista programjával éppen az, hogy a korabeli empirista filozófiai áramlatokkal szemben bizonyítsa olyan igazságok fennállását, amelyek soha nem fognak empirikus alapon megdőlni vagy az evolúció következtében megváltozni.

Amikor Frege megfogalmazza a maga logicista programját, akkor az aritmetika ügyében élesen szembefordul Kanttal. Frege nem tekinti az egész matematikát továbbfejlesztett logikának, hanem csakis az aritmetikát; még azt is írja Kantról, hogy ,,ő fedezte fel a geometria igazi lényegét”, amikor a geometriai tételeket szintetikus a priori igazságoknak minősítette. Az aritmetikát illetően azonban ugyanezt a minősítést tévedésnek tekinti, és megkísérli kimutatni, hogy az aritmetika alapvető fogalmai definiálhatóak, alapigazságai pedig levezethetőek a tiszta logikán belül maradva. Ebben Kanttal szemben Leibniz eszméihez nyúl tudatosan vissza, mint ahogy sok más kérdésben is Leibniz követője. Frege alkotja meg a modern logika első teljes értékű formális nyelvét, de ebben is Leibniznek a *characteristica universalis*-ról való elképzelése szolgál számára iránymutatásul. Leibnizzel egyezik meg az álláspontja abban is, hogy szerinte a logika törvényei egyáltalán nem üresek, semmitmondóak; nem tautológiák abban az értelemben, ahogy ezt a szót mint negatív minősítést szokás alkalmazni. (Ebben is szemben áll például Kanttal, de a Bécsi Körnek a matematikát egyébként szintén logicista módon értelmező gondolkodóival is.) Természetesen a kengurukról semmit nem tudunk meg attól, ha kimondjuk, hogy ‘a kenguruk erszényesek vagy nem erszényesek’. Ámde a kijelentésekről igenis megtudunk valamit azzal, hogy ha tudjuk azt, hogy tetszőleges kijelentést tekintve vagy maga a kijelentés, vagy a tagadása igaz. Azok a kengurukról szóló kijelentések, amelyek logikai szükségszerűséggel igazak, egyben tartalmatlanok is; de azok a kijelentésekről szóló kijelentések, amelyek megmondják, hogy mely kijelentések lesznek logikai igazságok, azok ideális tárgyakról szóló nagyon is tartalmas megállapítások. Ez a jelleg vezetődik aztán tovább az aritmetikára.

Frege programjának megvalósítása azzal kezdődik, hogy állítsunk fel egy elég erős, elég általános logikai elméletet, amelynek nyelve semmiféle aritmetikai konstanst nem tartalmaz, tehát nem tartalmazza a 0-t meg a rákövetkezést, mint Peano axiómarendszere. A nyelv egyszerű kifejezései vagy logikai konstansok, mint a ‘nem igaz, hogy’, az ‘és’, a ‘ha–akkor’, a ‘minden dologra igaz, hogy…’, vagy pedig változók. Frege állítása az, hogy ezen a nyelven definiálható a 0 és a rákövetkezés-reláció, ha pedig az aritmetika alapigazságait ezeknek a definícióknak az alapján lefordítjuk a logika nyelvére, logikai igazságokat kapunk. A logikai konstansok között viszont ez az erős logikai elmélet tartalmaz egy függvényt, aminek a jelentése valami olyasmi, hogy ‘terjedelme’; azaz ez a függvény (többek között) bármely, az elmélet nyelvén megfogalmazható tulajdonsághoz hozzárendel egy olyan objektumot, ami nagyjából az illető tulajdonsággal rendelkező dolgok osztályának felel meg. Ebből viszont közvetlenül következik, hogy Frege logikája ugyanúgy és ugyanazért ellentmondásos, mint Cantor halmazelmélete.

Az ellentmondás felismeréséig Frege erre az elméletre támaszkodva állítja, hogy az aritmetika nem szorul sem empirikus tudásra, sem szintetikus a priori megalapozásra. Tehát itt egyik oldalról az empirizmustól, pl. John Stuart Milltől, másik oldalon Kanttól határolja el a saját felfogását. Kant a szintetikus a priori alapok szükségességét az aritmetikához végső soron azzal indokolja, hogy különben az aritmetika állításai éppoly tartalmatlanok lennének, mint a logikai igazságok; Mill felfogása szerint az aritmetika egyszerű összefüggései, akár az is, hogy 2 + 2 = 4, tapasztalati megfigyelésekből származnak többszörös absztrakció és általánosítás útján. Frege mind a két nézetet tagadja. Szerinte az tény, hogy ha két almát meg két almát összeadunk, négy alma lesz, nem úgy függ össze a 2 + 2 = 4-gyel, mint egy bizonyos konkrét kengururól szóló állítás egy erszényesekről szóló, a biológia által kimondott általános kijelentéssel. A biológiai tétel minden erszényesről szól, többek közt az illető kengururól is; a 2 + 2 = 4 viszont nem almákról szól, hanem számokról. Ezért ha lehet is mindkettőnek esetében alkalmazásról beszélni, mégis másról van szó. Frege azt mondja, hogy az aritmetika törvényei nem természeti törvények, hanem a természettörvényeknek a törvényei, pontosan abban az értelemben, ahogy a logika törvényei sem kengurukról szóló állítások, hanem olyan állítások, amelyek más állításokról szólnak, többek közt a kengurukról szóló állításokról is.

Még egy kérdést hadd említsek meg Frege felfogásával kapcsolatban: az, hogy miért igazak a logika törvényei. A logika maga is deduktív módszerrel épül föl, azaz vannak kiinduló állításai, amelyek biztosítják a többinek az igazságát; de miért igazak a kiinduló állítások és ezt honnan tudjuk? Nehéz erre megtalálni a választ, de semmiképpen sem arról van szó, hogy önkényesen fogadjuk el őket, vagy hogy valamilyen tapasztalatból le tudjuk vonni, hogy igazak. Frege válasza körülbelül az, hogy a logikai alapigazságok feltételezése nélkül mindenféle értelmes kommunikáció lehetetlen. Ez nem olyan vad állítás, mint amilyennek látszik. arról van szó, hogy ha nem tételezem föl azt, hogy egy állítás nem lehet egyszerre igaz is, meg hamis is, akkor a közléseimnek többé nem lesz tartalma. Például ha azt mondom, hogy ott áll az a hamutartó, akkor ezzel nem utasítottam volna el azt, hogy az a hamutartó nem áll ott. Ha egy állítás lehet igaz is meg hamis is, akkor igazából nem mondtam semmit, hiszen amellett, hogy állítom, hogy az a hamutartó ott áll, egyúttal állíthatnám azt is, hogy nem áll ott. Tehát valamilyen értelemben az emberi kommunikáció szerkezetében vannak a logikai igazságok megalapozva; nem a kommunikációt leíró igazságokként, hanem előfeltételekként.

Ennyit mondanék Frege logicizmusáról. A korábbiakban felsorolt hét kérdés közül az elsőt Frege máig érvényesnek tekinthető módon válaszolta meg. Ha egy tétel levezetése az axiómákból formalizálható az ő logikájának a nyelvén, és az egyes levezetési lépések mind az ő rendszerében megengedett lépéseknek bizonyulnak, akkor a levezetésben biztosan nincs rejtett axióma. A második kérdésre Frege válasza az, hogy a jó matematikai elméletek igaz axiómákra épülnek és ezekből helyesen következtetve jutnak el tételeikhez, tehát a tételek igazak, ezért közöttük ellentmondás sem léphet föl. A logika és az aritmetika Frege szerint, mint láttuk, időtlen, ideális objektumokkal foglalkozik; éppen ezért nevezhető joggal az ő álláspontja, meg a későbbi rokon álláspontok matematikai platonizmusnak. Hadd tegyem hozzá, hogy szerinte az euklidészi geometria az a priori térszemléleten alapuló abszolút igazságokat mond ki, a nem-euklidészi geometriák pedig puszta logikai játékok. A tételek természetét illetően tehát Frege igen konzervatív állásponton van, mindenképpen fenn akarja tartani abszolút igaz voltukat. Arról, hogy minek tekinti a természetes számokat, legyen most elég annyi, amennyit eddig elmondtam. A logika Frege felfogásában a logikai objektumok, különösképpen az igazság helyes elmélete; tehát egyetlen igazi logika van, amit a logikus feladata felfedezni. Ebből adódik a paradoxonhoz való viszonya; a Russell-paradoxont úgy értékeli, hogy ezek szerint az ő logikai elmélete nem az igazi logika, hanem ki kell javítani.

A logicizmusnak, mint a matematika alapjait érintő programnak a további története azért érdekes, mert azt mutatja, hogy egy matematikafilozófiai álláspont nagyon különböző nézetekkel férhet össze a filozófia általános, nagy kérdéseit illetően. Azt, hogy Frege rendszerében ugyanaz a paradoxon lép fel, mint Cantornál, Bertrand Russell ismeri fel. Frege fő művének, *Az aritmetika alaptörvényei*nek 1894-ben jelenik meg az első kötete, 1903-ban a második. Ennek utószavában jelenti be Frege, hogy Russell egy őhozzá írott levele szerint az első kötetben felállított logikai rendszer ellentmondást rejt, és rögtön vázol is egy (vélt) kiutat. Russellnek, aki ekkor még Frege platonisztikus filozófiájához hasonló nézeteket vall, elvben ugyanez a hozzáállása: jobb, óvatosabb, érzékenyebb logikára van szükség. A kivitelezésben ő sikeresebb, mint Frege; megalkotja a típuselméleti logikát, majd Whiteheaddel közösen írott, *Principia Mathematica* c. nagy művében felépít erre egy olyan matematikát, amely legalábbis a Russell-paradoxontól már mentes. Az érdekesség azonban az, hogy matematikafilozófiai koncepciója akkor sem változik meg, amikor eltávolodik attól a nézettől, hogy a logika és a matematika ideális tárgyakra vonatkozó, időtlen igazságokból áll és egy határozottan empirista filozófia felé fordul. A Bécsi Kör, Carnap és társai ugyancsak radikálisan empirista felfogásában a matematika még mindig továbbfejlesztett logika, a matematika törvényei összetett következtetési szabályok. Csakhogy az ő számukra a logika egyáltalán nem tartalmi igazságokat közöl, hanem tautologikus természetű; a nyelvhasználat szabályai explikálódnak benne. Az ellentmondástalanság és a kizárt harmadik törvénye nem időtlen igazságok valamilyen ideális világról, hanem egyszerűen a ‘nem’ szó jelentését fejtik ki.

A logicizmus a későbbiekben is olyan irányzatnak bizonyul, amit sok kudarc ér, ennek ellenére vannak folytatói. 1931-ben Kurt Gödel bebizonyítja, hogy ,,a *Principia Mathematica*-ban és vele rokon rendszerekben” nem lehet megválaszolni minden, az aritmetika nyelvén megfogalmazható kérdést. Nos, Gödel logicista volt; eléggé platonisztikus nézeteket vallott a matematikáról. Szilárdan hitt abban, hogy a matematikának vannak tőlünk függetlenül létező tárgyai, s ennek következtében minden értelmes kérdésre van egyetlen helyes válasz; holott senki nem bizonyított nála többet arról, hogy milyen lényeges kérdések vannak, amelyekre sohasem fogjuk a választ megismerni.

Vegyük most sorra a másik két iskolát is. A formalizmust jelszószerűen azzal lehet jellemezni, hogy a matematikát módszere és nem tárgya határozza meg. Ennek is megvannak az alapok válsága előtti időre visszanyúló gyökerei. A 19. században mindenekelőtt az aritmetika biztos megalapozásának a problémájához szól hozzá és az algebra forradalma ihleti meg. A formalisták azzal próbálkoznak, hogy az aritmetikát jelekkel, mint fizikai objektumokkal végzett műveletek rendszereként építsék fel. Legyen mondjuk a hármas szám a három vonásból álló sorozat, a négy a négy vonásból álló, az összeadás pedig az, hogy két ilyen sorozatot egymás után fűzünk. Az aritmetika kiinduló állításai nem valami ideális tárgyra vonatkozó igazságok, hanem azt írják elő, hogyan kell ezekkel a fizikai objektumokkal manipulálni. Leginkább a játékszabályokra hasonlítanak, s ezért nemigen mondhatók igaznak vagy hamisnak. A tételek a különféle manipulációk közötti összefüggéseket állapítják meg, és azért megbízhatóak és ellenőrizhetőek, mert fizikai objektumokról szólnak. Ezt a nézetet felülvizsgálva azt alighanem el kell vetnünk, hogy az aritmetika tárgyai konkrét vonások vagy számológolyók, számolókövecskék lennének. Azt viszont elfogadhatjuk, hogy a vonalak, golyók, kövecskék egyaránt alkalmasak a természetes számok *reprezentálására*, a matematika szempontjából egyforma joggal tekinthetőek számoknak, mert ugyanazok szerint a szabályok szerint lehet összeadást ,,játszani” mindegyikkel.

A példa nagyjából szemlélteti a formalizmus matematikaképét. A matematika lényege a formális módszer: az, hogy különféle jelrendszerekkel, azok átalakítási szabályaival foglalkozik, függetlenül attól, hogy a jelek mire vonatkoznak, illetve vonatkoznak-e valamire. A matematika megbízhatóságát két dolog szavatolja: az egyik, hogy ezek a jelrendszerek maguk fizikailag realizálhatóak, azaz a véges tapasztalás számára hozzáférhető objektumok, a másik pedig az, hogy az átalakítási szabályok effektívek, azaz tisztán a jelek szintaxisának terminusaiban vannak megfogalmazva, mégpedig úgy, hogy alkalmazásuk helyessége minden konkrét esetben véges sok lépésben ellenőrizhető. Nézzünk egy konkrét példát. A logika legegyszerűbb következtetési szabálya az, hogy egy “Ha A, akkor B” alakú, azaz feltételes állításból, és az A állításból lehet B-re következtetni. A logicistát elsősorban az érdekli, hogy ez a szabály szemantikailag helyes, azaz igaz premisszákból igaz konklúzióra vezet, akárhogyan formalizáljuk is. A formalista számára a szabály csak formalizált alakban elfogadható, és a következőképpen hangzik: Ha van egy jelsorozatom, amely egy A részsorozatból, a ‘’ jelből (a ‘ha – akkor’ egyik szokásos jelölése) és a B részsorozatból áll, valamint külön rendelkezésemre áll az A jelsorozat, akkor továbbléphetek a B jelsorozatra. A szabályt tehát úgy fogalmaztuk meg, hogy teljesen figyelmen kívül hagytuk a ‘’ jelentését, meg azt, hogy A és B kijelentések. Továbbá az is igaz — és ez a lényeg —, hogy ha valaki azt állítja, hogy ennek a szabálynak az alkalmazásával jutott el két jelsorozatból egy harmadikhoz, állításának helyességét véges sok lépésben, csakis a jeleket vizsgálva ellenőrizni lehet.

A formalizmus egy kiemelkedő matematikus, David Hilbert kezében válik az alapok válsága leküzdésének egyik programjává. Hilbert nem kívánja a matematikát teljes egészében véges jelrendszerekkel való játékok összességének tekinteni; ellenkezőleg, kivételes jelentőséget tulajdonít a matematika fogalmai között a végtelennek. Sokat idézett mondata, hogy ,,sosem fogjuk engedni kiűzni magunkat abból a paradicsomból, amelyet Cantor teremtett számunkra”, értsd: a végtelen halmazok birodalmából. Fölveti azonban egy új matematikai diszciplína, a metamatematika megteremtésének szükségességét. Ez a diszciplína minden egyes matematikai elméletet úgy tekint, mint véges jelsorozatok (kijelentések, tételek) struktúráját, és így tesz fel vele kapcsolatban kérdéseket. A metamatematika kérdései közé tartozik, hogy egy adott elmélet ellentmondásos-e, azaz a tételnek nevezett jelsorozatok között van-e olyan A sorozat, hogy ~A is a tételek közé tartozik. (A ‘~’ szimbólum a negáció szokásos jele, de ezt a metamatematika nem használhatja ki, hanem csak és kizárólagosan a vele kapcsolatos szabályokat veheti tekintetbe.) Másik feltehető kérdés, hogy az elmélet teljes-e, azaz igaz-e, hogy egy A, ~A kijelentéspár egyik tagja biztosan tétele az elméletnek. Egy harmadik, régebben vizsgált és sikeresebben vizsgálható kérdés, hogy az elmélet axiómái függetlenek-e, azaz nincs-e az axiómák osztályának olyan valódi részosztálya, amelyből már minden tétel levezethető. (Függetlenségi vizsgálatokat geometriai axiómarendszereket illetően már korábban is végeztek, és az ilyen vizsgálatoknak mindig is az az alapgondolata, hogy tekintsünk el az elmélet alapfogalmainak szokásos interpretációjától, tekintsük őket puszta nyelvi jeleknek, melyekhez önkényesen más interpretációt is rendelhetünk. Hasonló vizsgálatok vezettek el az euklidészi és a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria logikai egyenértékűségének felismeréséhez is. Talán nem véletlen, hogy Hilbert pályája első korszakában a geometria axiomatikájának megújításával foglalkozott.) Hilbert szerint tehát a matematikus általában nemcsak véges jelsorozatok rendszereivel foglalkozik, hanem olyan fogalmakkal is, mint végtelen halmaz, euklidészi tér, stb.; de szükséges, hogy az ilyen fogalmakat tárgyaló elméletének a nyelve olyan legyen, amelyben a kijelentések, az axiómák, a tételek halmaza világosan és szintaktikai eszközökkel jellemezve van, s ezáltal metamatematikai vizsgálat tárgyává tehető. A metamatematika már csak véges objektumokkal (jelekkel, jelsorozatokkal) foglalkozik, s így nem kell olyan ingoványos talajra merészkednie, mint pl. a halmazelméletnek. Ezért van értelme a halmazelméletnek, mint matematikai elméletnek a megbízhatóságát a metamatematikában vizsgálni. A metamatematika megbízhatóbb módszerekkel dolgozik, mint más matematikai elméletek, mert amíg a halmazelmélet a maga véges nyelvén végtelen komponensekből álló struktúrákat ír le, a metamatematika nyelve arra való, hogy azon más nyelveket, azaz (egy jól meghatározható értelemben) véges struktúrákat írjanak le. A metamatematikának éppen az a dolga, hogy mintegy legalizálja a ,,veszélyes” fogalmak, mint a végtelen halmaz fogalmának a használatát, kimutatva egy adott elméletről, hogy olyan módon használja az illető fogalmat, ahogy az nem vezet ellentmondásra.

Hilbert programjának megvalósítása ugyanolyan fényes kudarccal végződött, mint Fregeé. A kudarc minden tréfán kívül fényes, mert a megvalósítási kísérletek rendkívüli értékű felfedezésekkel gazdagították a matematikát; de mégiscsak kudarc, mert az eredmények az ellenkezőjét jelentik annak, amit ezeknek a programoknak a megfogalmazói eredetileg reméltek. Hilbert programjával kapcsolatban kiderült, hogy egy elmélet ellentmondásmentességét általában csak az elméletnél magánál erősebb, kevésbé megbízható elméletben lehet bizonyítani; a teljességgel kapcsolatban Gödel óta azt tudjuk, hogy a matematikai elméletek kevés és egyszerű kivételtől eltekintve nem lesznek teljesek.

Nézzük megint a tesztkérdéseket. Hogyan lehet biztosítani a logikai zártságot? Erre egy kicsit különbözik a logicizmustól a válasz annyiban, hogy nem egy mindenek felett álló logika van, hanem nyitva áll az a lehetőség, hogy magunk válasszunk a különböző rivális logikák közül, amikor egy matematikai elmélet felállítása során megadjuk a levezetés fogalmát (sőt, elvben azt is megtehetnénk, hogy nem egy kész logikai elméletre hivatkozunk közben, hanem magunk találunk ki valami újat). A levezetési szabályok effektív voltára esik a nagyobb hangsúly, tehát arra, hogy pusztán a jelek struktúrája alapján ellenőrizhető szabályok legyenek. Az ellentmondásmentesség kérdésére tudjuk a választ; egészítsük ezt ki annyival, hogy a formalizmus számára, nem lévén olyan módon elkötelezettje a matematikai elméletek igazságának, mint a logicizmus, elfogadhatóbb a modern matematika tényleges gyakorlata: az, hogy előre alkalmazható kritériumunk az ellentmondásmentességre nem lévén, mintegy hipotézisként fogadjuk el egy adott elmélet ellentmondásmentességét, s ha ez a hipotézis megcáfolódik, majd akkor megnézzük, mit lehet tenni.

Mik a matematika tárgyai? Azzal kezdtem, hogy erre van egy válasz: nincsenek. Talán leginkább a 19. században megindult absztrakt algebrai kutatásoknak a tanulsága, hogy a matematikai elméletekben, mint formális rendszerekben éppen az a jó, hogy sokféleképpen interpretálhatók, és semmi közük ahhoz, hogy ide vagy oda húzzuk rá őket. Tehát, ebből általánosítva, egy matematikai elmélet soha nem egy bizonyos tárgyról szól, hanem valamilyen struktúráról, ami a legkülönfélébb tárgyakban fellelhető lehet.

Mi a tételek természete? Világos és az előzőből következik, hogy egy elmélet tétele az, ami az illető formális rendszerben, azaz elméletben levezethető; a matematika nem igazságokkal, hanem levezetésekkel és tételekkel foglalkozik.

Mik a természetes számok? Nem tudjuk, hogy vannak-e természetes számok, mint olyanok. Van a természetes számok elmélete; ennek minden modelljét, azaz minden olyan struktúrát — akárhol találjuk is — amely a természetes számok elmélete axiómáinak eleget tesz, egyforma joggal nevezhetjük a természetes számok rendszerének. A metamatematika és a halmazelmélet különféle eredményeiből tudjuk a következőket: Nem lehet a véges halmazokra is vonatkozó halmazelméleti axiómákból bebizonyítani, hogy vannak végtelen halmazok. Mivel a természetes számok, ha vannak, végtelen sokan vannak, végtelen halmaz létezését el kell hinni, posztulálni kell. Ha viszont létezik végtelen halmaz, akkor a természetes számok elméletének van legalább egy modellje, amely a halmazelméleten belül definiálható. Ha viszont van egy modellje, akkor sok modellje van, és ezek elég lényegesen különböznek, habár a különbség a természetes számok elméletén belül nem megragadható. Az aritmetikának az egyik modell elvben éppolyan jó, mint a másik, nem tud közöttük különbséget tenni (habár szólnak amellett tartalmi érvek, hogy azt a bizonyos halmazelméleti modellt, amelyre most céloztam, a természetes számok elmélete standard modelljének, azaz nagyjából az „igazi” természetes számok rendszerének tekintsük). Mindez nyilvánvaló, hogy a logicista megközelítéssel szemben inkább a formalizmus javára szól.

Mi a logika? A formalista számára, a logicista megközelítéssel szemben, nem egy logika van; nincs olyan kitüntetett elmélet a formális rendszerek között, amely a többi rendszer számára megszabná a levezethetőség szabályait. Vannak olyan matematikai rendszerek, amelyeket logikaként lehet interpretálni. Ez annyit jelent, hogy a bennük előforduló jelek nem számok vagy halmazok, hanem kijelentések és logikai műveletek jelének értelmezhetőek. Az viszont, hogy egy rendszer megenged-e ilyen interpretációt, az összes többi interpretációs kérdéshez hasonlóan nem matematikai kérdés. Az ilyen, logikainak nevezhető rendszereket persze lehet a matematikán belül is alkalmazni, többek között és kiváltképpen éppen a metamatematikában. Ha viszont több ilyen rendszer is van, akkor nem a matematika dolga, hogy kiválassza, melyik az igazi. Ha egy logikai rendszer olyan, hogy benne egyes állítások esetében az A állítás negációjának negációjából nem következik maga az A állítás, akkor a formalista felfogás nem kíván dönteni eközött és a klasszikus logika között, hanem a logika alkalmazójára hárítja annak megindoklását, hogy miért az egyiket, illetve a másikat használja.

A paradoxonhoz való viszonyt voltaképpen már kifejtettem. Hilbert eredeti programja az volt, hogy a metamatematika adjon mintegy a priori biztosítékot a matematikai elméletek művelőinek kezébe arra nézve, hogy az általuk művelt elmélet nem fog ellentmondáshoz vezetni. Miután Gödel kiderítette, hogy úgyszólván csak triviális kivételekkel erre nincs esély, az újabb formalisták — például H. B. Curry — az ellentmondásmentességet a posteriori kérdésnek tekintik. A Russell-paradoxon kiküszöbölésére tett kísérlet nem más, mint a halmazelmélet szokásos axiómarendszere; hogy sikeres kísérlet-e, az majd elválik.

Azt szokták mondani, hogy az átlagos matematikus logicista hétköznap, és formalista ünnepnap. Ez annyit jelent, hogy a kutatás mindennapjai során a kutatás tárgyait, amikkel foglalkozik, gondolatilag megfogható, létező objektumoknak tételezi fel; ilyen platonisztikus gondolatok mintegy hallgatólagos munkahipotézisként vannak jelen a tevékenységében. Ha azonban egy filozófiai vita során valaki megkérdezi, hogy ezek a munkahipotézisek — pl. a természetes számok létezése — maguk is matematikai tételek-e, vagy olyan metafizikai igazságok, amelyekben hinni kell, akkor a legtöbben szívesen választanak olyan feleletet, hogy sem-sem, hanem éppenséggel csak hipotézisek, éspedig olyan hipotézisek, amelyektől a matematikus munkájának érvényessége voltaképpen nem függ. Azt ugyanis tudjuk, hogy a matematikán belül ezek a hipotézisek végső soron nem dönthetőek el, a matematikát pedig hitkérdésektől mindenképpen helyes lehetőség szerint függetleníteni. Ezt az eléggé természetes felfogást jól alátámasztja a formalizmus.

A logicizmus és a formalizmus lényeges eredményekhez vezetett a matematika alapjainak kutatásában, de a matematika többi részét, a hagyományos nagy matematikai diszciplínákat nem változtatták meg, csak átértelmezték. A harmadik hagyományos nagy iskolának, amelyet úgy szoktak hívni, hogy intuicionizmus vagy konstruktivizmus, saját matematikája van. Jelszószerűen talán azzal lehet legjobban jellemezni, hogy a matematikus nem felfedező, hanem feltaláló. Szemben a logicistával, aki felfedező úton jár egy tőle függetlenül létező ideális világban, az intuicionista maga konstruálja a matematika világát a szemléletében, intuíciójában. Matematikai objektumok léteznek, de nem mint megismerésünk előre adott tárgyai, hanem mint konstrukcióink eredményei. A végtelen sokaságok kérdése ezzel voltaképpen el is intéződik, mivel végtelen sokaságot nem konstruálunk. A végtelenségnek csak annyiban van helye a matematikában, hogy egyes eljárásaink végtelenül folytathatók; de ez szigorúan csak annyit jelent, hogy véges sok lépés után mindig lehet őket folytatni, nem pedig annyit, hogy megtett lépések végtelen sorozata egyszerre adva lenne.

Az intuicionizmus, mint a matematika alapjainak válságára adott egyik válasz, Leo Brouwer holland matematikustól ered; egy nemzedékkel korábban hasonló gondolatokat vetett fel a német Kronecker is. Az intuicionizmus felfogásában a logikának nem jut olyan jelentős szerep, mint a másik két iskolában. A bizonyítások maguk is a szemléletben, nyelvtől alapjában véve függetlenül konstruált matematikai objektumok közé tartoznak; helyességüket nem a logika, mint eleve adott pártatlan bíró biztosítja, hanem a szemléletes evidencia, nyilvánvalóság (a bizonyítások persze más beavatott matematikusokkal közölhetőek, s az evidencia nem az egyéni pszichétől függő, hanem interszubjektív kritérium). Brouwer tanítványa, Arendt Heyting mindazonáltal felállított egy intuicionista logikát, de ez lényegesen különbözik a klasszikustól. A fő különbség az, hogy a kettős negáció törvénye, ~~A és A logikai ekvivalenciája nem érvényes benne; ~~A-ból nem mindig következik A (csak fordítva). Hogy ez miért van így, az többé-kevésbé megérthető az alapelvekből meg egy fontos példából. Képzeljük el, hogy van egy kritériumunk, amelyet legfeljebb egy valós szám elégíthet ki (vagy egy sem). A hagyományos matematikus számára az, ha ilyen valós szám nemlétezéséből sikerül ellentmondást levezetni, elegendő bizonyíték a megfelelő tulajdonságú szám létezésére. Az intuicionista ezzel szemben azt mondja, hogy csak az létezik, amit megkonstruálunk; a létezés indirekt úton való bizonyítása viszont nem konstrukció.

Brouwer egész programjának filozófiája az, hogy a paradoxonoktól úgy lehet megszabadulni, ha elvetjük a meg nem konstruált matematikai objektumok létezésében való metafizikai hitet. A matematika bűnbe esett, amikor elhagyta a szemlélet és az intuitív evidencia talaját; ezért bűnhődik a paradoxonokkal. Ez a program valóban annyira radikális, hogy mindenekelőtt a matematikai analízis teljes újraalkotását követeli meg, a múlt és a jelen században kidolgozott gazdag eszköztár nagy részének mellőzésével. A lényeg az, hogy a végtelen sokaság fogalmára nem lehet támaszkodni. Az eredmény egy általában véve gyengébb és bonyolultabb matematika lesz, amely természetesen értelmezhető a ,,hagyományos” matematikus számára, mint válasz arra az elméletileg nem érdektelen kérdésre, hogy meddig lehet leszűkített, megszigorított módszerekkel eljutni.

A hét kérdés közül az első, a bizonyítások hibátlanságának kérdése itt másképp merül fel. Talán az intuicionista számára a leginkább elfogadható az a tényleges helyzet, hogy a bizonyításokat időnként javítani kell. Az ellentmondások jövőbeni fellépése elleni garancia, egyben a halmazelméleti paradoxonokra adott válasz a végtelen sokaságok — filozófiai nyelven: az aktuális végtelen — szigorú mellőzése. A matematikának az intuicionista számára van tárgya, de nem olyan, ami matematikusok nélkül is létezne, hanem csakis az, ami a szemléletben — lényegében a kanti tiszta szemléletben — megragadható. A tételek természete megint olyan kérdés, amire jó volna részletesebben kitérni, de nincs rá hely és idő; az intuicionista számára a matematika voltaképpen nem tételekből, hanem feladatokból és megoldásokból áll. A természetes számok a tiszta időszemlélet konstrukciói, Kant nyomán. Az intuicionista ugyanúgy elismeri egyetlen igaz logika létezését, mint a logicista, csak éppen ő nem a klasszikus logikában, hanem egy másikban hisz.

Egy ilyen előadás természetesen nem nyújthat többet, mint felületes pillantást erre a sokrétű tárgyra. Mindhárom irányzattal kapcsolatban céloznom kellett olyan lényeges matematikai eredményekre, amelyek megérdemlik a tanulmányozást, de még a pontos kimondásukig sem jutottam el. A matematika és a filozófia kölcsönhatásának az a korszaka, amelyről beszéltem, ma már persze lezárult. Ma aligha lehetne olyan konferenciát tartani, mint az az 1929-ben, Königsbergben lezajlott matematikai szimpozium, ahol Carnap, Heyting és a formalizmus nevében Neumann János ismertették az egyes irányzatok téziseit. A matematikusokat talán ma kevésbé érdeklik ezek a kérdések; a filozófia azonban a matematikát változatlanul az emberi tudás reprezentáns területének tekinti, és számos elsőrangú kortárs gondolkodó foglalkozik a most vázolt problémakör újabb hajtásaival és ágaival; csak példaképpen hadd említsem meg Charles Parsons, Michael Dummett és Hilary Putnam nevét.