Megjegyzés Bognár Gergely egyik írásához

(99. Filozófiai válaszok)

András Ferenc

2024. január

> „No one shall be able to drive us from the paradise that Cantor has created for us."
>
> David Hilbert

Megdöbbentő módon sokan, matematikailag magasan, olykor nagyon magasan képzett elmék is elhitték azt a nyilvánvaló matematikai abszurdumot, hogy $1 + 2 + 3 + \ldots = -\frac{1}{12}$.[1] Nincs mit hozzátenni ahhoz, amit erről az abszurd állításról Mathologer (alias Burkard Polster) a YouTube-on elmond, nem is erről fogok beszélni.[2] Engem egy Fizikai Szemlében megjelent írás döbbentett meg: Bognár Gergely: Megoldotta-e a fizika Zénón paradoxonjait? *Fizikai Szemle*, 2021 / 7–8. Az írás számos vitatható állítása közül most csak egyre térek ki. Ezt írja a szerző:

> Newton és Leibniz a klasszikus mechanika két nagy óriása kidolgozza a határérték-számítás elméletét. A precíz matematikai részleteket mellőzve, lényegét a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Végtelen szám összege nem feltétlenül lesz végtelen. Nézzünk egy példát, ha egy egységnyi szakaszt elfelezek, $\frac{1}{2}$-et kapok, ha a maradék szakaszt elfelezem, $\frac{1}{4}$-et, a következő lépésben $\frac{1}{8}$-ot és így tovább a felezési paradoxonhoz hasonlóan
> $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots$
> Egyre több elemet összeadva közelítünk egy számhoz, amely szám az összeg véges elemével tetszőlegesen kicsiny távolságra megközelíthető, ezt a számot határértékként a sor összegének nevezzük.

[1] Pl. a kiváló fizikus, Etesi Gábor, Lásd: `https://youtu.be/IBx2VFg8DLo?feature=shared`

[2] `https://www.youtube.com/watch?v=YuIIjLr6vUA&list=PLxapCk3fwv3zLE5Omui0_Ml7joLtQ8X3-&index=4`

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \frac{1}{\infty} = 1.$

Mindezzel orvosolható az első két aporia, és egy olyan fizikát alkothatunk, amely segítségével felhőkarcolókat építünk, és embert küldünk a Holdra. Valóban, a newtoni mechanika eredményei lenyűgözők, a két paradoxont mégsem oldják fel. A fenti határérték-elméletből látszik, hogy a problémát nem oldjuk meg, csupán eldugjuk egy matematikai definíció mögé. Nem állítjuk azt, hogy valóban végigmennénk végtelen sok elemen, csak kellően sok elem után nem foglalkozunk a kérdéssel, és kitesszük az egyenlőség jelet. A sor összege tetszőlegesen megközelíthető, de nem feltétlenül érhető el! Zénón paradoxonja továbbra is fennáll, bár az kétségtelen, hogy gyakorlati szempontból a mozgás egy nagyon jól használható leírásához jutunk.

Bognár írásából nem derül ki egyértelműen, hogy most akkor az „$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \frac{1}{\infty} = 1$" állítás igaz vagy hamis? Ha hamis, akkor miért hamis, miért hibás a matematika, hol a hiba a középiskolában tanultakban, abban, amit ő is tanít? Bognár nem mondja meg, hogy szerinte ennek a sorozatnak a határértéke miért nem pontosan 1, és ha nem 1, akkor mennyi? Hogy lehet az, hogy a gyakorlatban jól működik amit Newton és Leibniz és mások föltaláltak, másrészt nem tökéletes, valami hiányzik belőle. Mi hiányzik? Mire gondol pontosan, amikor ezt írja: „A fenti határérték-elméletből látszik, hogy a problémát nem oldjuk meg, csupán eldugjuk egy matematikai definíció mögé." Én semmi ilyet nem látok. Mit jelent az „eldugni egy matematikai definíció mögé" metafora? Mi mást lehetne csinálni? Bognár szerint: „Nem állítjuk azt, hogy valóban végigmennénk végtelen sok elemen, csak kellően sok elem után nem foglalkozunk a kérdéssel, és kitesszük az egyenlőség jelet." Attól tartok téved. A sorozat összege nem valami időbeli történés, a matematikában absztrakt módon kéne gondolkozni, és a megértés, nem vizuális képzetek birtoklását jelenti! Bognár szerint „A sor összege tetszőlegesen megközelíthető, de nem feltétlenül érhető el!" Mit jelent az, hogy „nem feltétlenül"? Vagy elérhető, vagy nem. Talán arra gondol, hogy jelen esetben nem érhető el, mert szerinte a végtelen nem elérhető, mert nincsen vége. Kicsit naiv megközelítés, de spongyát rá. Ha így van, akkor ez minden esetben így van, és soha nincs határértéke a konvergens mértani soroknak. Ez azonban egyfajta filozófia és nem matematika. Hol van a bizonyítás arról, hogy a $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ sor határértéke nem 1? Én ezt másképp gondolom, szerintem a sor összege azonos 1-el. Ezt úgy értem, hogy azonos, azaz teljesen azonos, és nem úgy, hogy félig azonos, vagy körülbelül azonos, vagy azonos is meg nem is azonos (á la Hegel és a marxisták), netán csak ácsingózik az azonosságra. Íme itt a bizonyítás:

Talán azt elfogadja a szerző, hogy a sor konvergens. Nem tudjuk mivel azonos a $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ sor, nevezzük M-nek:

(1) $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

Vegyük a kétszeresét:

(2) $2M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots$ (1) elemi matematika

Mindkét sorozat konvergens, ezért megengedett az alábbi művelet:

(3) $2M - M = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \ldots$ (1)(2)

(4) $M = 1$ (3)

Q.E.D.

Vedd észre, hogy nem hivatkoztam sem a határértékre, sem a végtelenre.

Érdemes kicsit általánosabban is tekinteni a problémát.

(1) $C = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots$

(2) $r \times C = r + r^2 + r^3 + \ldots$ (1)

Feltéve, hogy $r < 1$, azaz a sorozat konvergens, megengedett az alábbi művelet:

(3) $r \times C - C = 1$ (1)(2)

(4) $C = \frac{1}{(1-r)}$ (3)

Ezzel megkaptuk a jól ismert képletet, amit remélhetőleg a szerző is tanít. A képlet szerint:

(5) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$ (4)

(6) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$ (5)

De mivel a szerző ez (6)-ban nem hisz, a (4) képletben sem hihet, ha következetes. Vajon mit tanít erről a tanítványainak?
(A bizonyításokat a YouTube-on matematikát népszerűsítő matematikus video-bloggertól, Mathologer-től vettem.)

A ma divatos korszellem része az elbizonytalanodás, hogy talán semmi sem biztos, hiszen számos korábbi hitünk megdőlt, elavult, talán minden elavul, talán minden hitünk bizonytalan. Ez a korszellem vezet a parttalan relativizmushoz, lehet eső, lehet hó, amikor még azt is elhisszük, hogy egy divergens végtelen sorozatnak véges összege van. Elhisszük, hogy nem tudunk többet, mint a régi görögök, és a Zénón aporiák ma is megoldatlanok. Akinek ez a világnézete, azt lehetetlen bármiről meggyőzni, mert nincs olyan biztos alap, amire építeni lehet. Csak ne tanítsa az én kis unokámat matematikára és fizikára!

Epilógus

Természetesen én is tudom, hogy létezik matematikai intuicionizmus, hogy ezek elvetik az aktuális végtelen fogalmát, de elvetik a kizárt harmadik elvét is, és ezzel együtt eldobják a reductio ad absurdum bizonyítási módszert. Súlyos ára van az utóbbinak, újra kell építeniük a matematikát, és kérdés, hogy mennyit tudnak megmenteni. Amikor azonban Bognár azt írja, hogy „Zénón paradoxonja továbbra is fennáll . . . ” akkor nem egy elmélethez kötött relatív állítást tesz. Nem ezt mondja, hogy ő valamilyen intuicionizmusban hisz, vagy konstruktivista matematikát művel, és ebből a nézőpontból látja megoldatlannak Zénón paradoxonjait. Nem ezt teszi, hanem kategorikusan fogalmaz. Nincs ezzel semmi baj, szeretem az ilyen sarkosan megfogalmazott kategorikus álláspontokat. Amit hiányolok, az a kellő alátámasztás, az érvelés. Szerintem ez nagy baj, akár filozófiát akár matematikát, akár fizikát tanítunk, mert minden esetben gondolkozni is tanítunk.