András Ferenc

A Yablo paradoxonról

1. Bevezetés

A nehezen megoldható vagy megoldhatatlannak vélt logikai ellentmondásoknak óriási irodalma van a filozófiában, mert ezek a kérdések a logika alapjainak az újragondolásához vezetnek, ami pedig a filozófia egyik tartóoszlopa. Ezért volt nagy visszhangja egy rövid, ám annál velősebb írásnak, amely nem kevesebbet állított, mint azt, hogy a hazug paradoxon egy eleddig ismeretlen új variánsát találta meg. Talán mindenki, aki manapság komolyan foglalkozott ezzel a kétezer éves problémával úgy vélte, hogy a rejtély megoldásának a kulcsa a szemantikai önreferencia, az állítást kifejező mondatok igazsága önmagától való függésének a megértése. Stephen Yablo írása azzal robbant be ebbe a vitába, hogy mindez tévedés, a paradoxon akkor is előáll, ha önmagára való utalásról sem rejtetten sem nyíltan nincs szó. Ha így van rossz helyen kerestük eddig az igazságértékkel kapcsolatos talányos mondatok útvesztőjéből a kijáratot. Meglepő állítás, de vajon igaz-e? Először röviden ismertetem a paradoxonnal kapcsolatos vitákat, majd kitérek a definíciókkal kapcsolatos néhány hibára, utána bemutatom a saját álláspontomat. A vita jelentős matematikai apparátust vonultat föl, az ezzel kapcsolatos fogalmakat elmagyarázom.

2. Történeti vázlat

2.1. Stephen Yablo egészen rövid, de nagyhatású írása 1993-ban jelent meg “Paradoxon önmagára való hivatkozás nélkül” címmel. (Yablo, 1993a)[1] A szerző bevezetésképpen emlékeztet arra, hogy a szemantikai önreferencia önmagában nem feltétlen okoz bonyodalmat. Valóban, az a magyar nyelvű kifejezés, hogy „ez egy négyszavas kifejezés” önmagára is igaz, mégsem szükségszerű forrása valamilyen ellentmondásnak. Yablo nem említi meg, hogy a klasszikus felfogás szerint a veszélyes mondatok azok, ahol a mondatok

[1] A paradoxont több változatban is megfogalmazta. Yablo, S (1985) majd később: Yablo, S (2004)

igazságértéke függ közvetve vagy közvetlenül önmagától.[2] Az ilyen mondatok minden esetben tartalmazzák az ’igaz’ vagy ’hamis’ metanyelvi predikátumot és a hatókörükbe tartozó mondatok neveit. Vajon megvéd-e bennünket a zavarba ejtő ellentmondások keletkezésétől, ha kerüljük az ilyen mondatok és az ezt megengedő nyelv használatát? Yablo határozott válasza: nem. Íme a bizonyíték, amely szerinte sem nyíltan sem rejtetten nem tartalmazza az igazságérték önmagától való függését, azaz nem tartalmaz körkörösséget vagy önmagára való hivatkozást.

Legyen az $S_1, \dots S_n$ mondatsorozat értelmezve minden n természetes számra az alábbiak szerint: a sorban n-edik helyen álló S_n mondat akkor és csak akkor igaz, ha a rákövetkező összes többi mondat nem igaz. Figyeljünk föl arra, hogy Stephen Yablo valaminek a létezését is állítja, azaz valójában ezt mondja:
(YP) Van olyan igaz vagy hamis mondatokból álló (megszámlálható) végtelen sorozat, hogy a sorban n-edik helyen álló S_n mondat akkor és csak akkor igaz, ha a mögötte álló összes többi mondat nem igaz. A hírhedett sorozat első színrelépésekor az alábbi öltözetben lépett elénk:

(S_1) minden k>1 –ra, S_k nem igaz
(S_2) minden k>2 –ra, S_k nem igaz
(S_3) minden k>3 –ra, S_k nem igaz
.
.

A sorozat folytatására utaló pontok is így fordulnak elő az eredeti cikkben. A feladatunk az, hogy eldöntsük a fenti mondatsorozat tagjairól, hogy igazak-e vagy hamisak.

Tegyük föl, hogy a sorozat n-edik tagja - S_n - igaz. Ekkor úgy állnak a dolgok, ahogy S_n mondat állítja, azaz minden k>n –re S_k hamis. Következésképpen (a) S_{n+1} mondat is hamis, és (b) minden k>n+1 –re S_k hamis. Vegyük észre, hogy amit (b) állít, pontosan az amit S_{n+1} állít, tehát S_{n+1} igaz kell legyen! Ezzel ellentmondásba keveredtünk, mivel korábban azt állítottuk,

[2] Egyéb szemantikai fogalmat tartalmazó mondatok is lehetnek veszélyesek, de az igazságérték önmagától való függése – visszacsatolása – mindig paradoxont eredményez. Az igazságfüggvények ’kombinációs hálózatokkal’ a paradoxonok ’sorrendi hálózatokkal’ (digitális áramkörökkel) modellálhatóak. V.ö. az E- tudomány elektronikus folyóirat 2009/2 számában megjelent „Véges automaták mint a magyarázat és realitás modelljei” c. tanulmányomat.

hogy S_{n+1} mondat hamis. S_{n+1} mondat nem lehet igaz is meg hamis is, ezért a „reductio abszurdum" következtetési elvet alkalmazva arra kell következtessünk, hogy kiinduló feltevésünk miszerint S_n igaz tévedés, következésképpen S_n hamis. Ezt a következetést a sorozat tetszőleges tagjára elvégezhetjük, tehát minden S_n hamis. Ebből viszont az következik, hogy a sorozat minden tagja igaz, hiszen mindegyik igazsága az utána következő mondatok hamisságától függ, és éppen ez a helyzet. Oda jutottunk, hogy a sorozat valamely tetszőleges S_n tagja sem igaz sem hamis nem lehet. Ez azért paradoxon – mint Laurence Goldstein rámutatott – mert a mondatok teljesen értelmesnek tűnnek, megalapozottan feltétezhetjük róluk hogy állítások kifejezői, melyek vagy igazak, vagy hamisak.

A sorozat tehát nem interpretálatlan formulákból áll – melyek önmagukban nem okoznának gondot – hanem mondatokból, melyek igazak vagy hamisak. A paradoxon az, hogy a sorozat tagjai értelmes mondatoknak tűnnek, de mégsem tudunk hozzájuk egyértelmű igazságértéket rendelni. Ha valóban ez a helyzet, akkor a logikai formulák szintaktikai jól formáltsága nem garantálja, hogy egy formula interpretációval ellátva egyértelmű igazságértékkel rendelkezik. Ezért a paradoxon a logikai alapjai ellen intézett kihívás. A lényeges kérdés most is az, hogy mit cáfol az ellentmondás, milyen téves előfeltevésünket kell elvessük, mi a forrása a paradoxonnak, hol a hiba?

2.2. James Hardy (Hardy 1995) három alapvető különbséget lát hazug és a Yablo paradoxon között.

1. Nyilvánvaló különbség a Yablo paradoxon és a hazug paradoxon szokásos megfogalmazásai között, hogy előbbi végtelen sok mondat által generált paradoxon, az utóbbi viszont nem. Ha véges sok Yablo mondatra korlátozzuk vizsgálódásunkat, nem keletkezik paradoxon. Végeredményben ez azt jelenti, hogy nincs elsőrendű levezetése az ellentmondásnak a Yablo premisszák és Tarski T sémák halmazából, állítja Hardy.

Látni fogjuk, egyetlen másodrendű logikai formulával is megfogalmazható a sorozat létezését állító mondat, és azt is, hogy ez másodrendű formula hamis.

2. A második különbség szerinte, hogy a Yablo paradoxon a T séma végtelen sok egyedi alkalmazását kívánja meg. Jegyzetben ehhez hozzáfűzi: itt bizonyítás alatt végtelen hosszú

bizonyítást ért. Szerinte nincs véges bizonyítás az ellentmondás levezetésére Yablo premisszáiból.

Meg fogom mutatni, hogy Tarski nevezetes T sémájának sem véges sem végtelen sok alkalmazására nincs szükség, a paradoxon az 'igaz' szemantikai predikátum nélkül is rekonstruálható, és a levezetés sehol nem hivatkozik a T sémára.

Hardy szerint a T séma valamennyi szükséges alkalmazása esetén is a Yablo mondat sorozat csak omega inkonzisztens, de nem tagadás inkonzisztens. Mert ha tagadás inkonzisztens volna, akkor a kompaktsági elv következtében már véges sok mondatból is levezethető volna, de a Yablo sorozat semelyik véges részhalmaza nem generál ellentmondást. Jegyzetben hozzáfűzi, belátható hogy a hazug paradoxon magából a T séma valamely inkonzisztenciájából származik, ezzel szemben a Yablo paradoxon nem. Végül úgy összegzi álláspontját, hogy bizonyos szempontból hasonlít, más megközelítésben különbözik a két paradoxon.

Jó és fontos megfigyelés, hogy ha a Yablo paradoxont generáló mondatsorozatot befejezzük egy véges természetes számnál, akkor a sorozat minden tagja egyértelműen értékelhető, azaz eltűnik az úgynevezett paradoxon. Azt azonban nem veszi észre, hogy nem a végesség eliminálja az ellentmondást, hanem a maximális elem léte.

2.3. Egy évvel később Thomas Forster (Forster 1996) fölveti azt a gondolatot, hogy végtelen sok mondat konnektívum ('és', 'vagy') segítségével is megfogalmazható a Yablo sorozat, de az ellentmondás levezetéséhez – szerinte – végtelen bizonyítás szükséges. „The first thing to notice is that the proof of the paradox is infinetly long." Erre a meglátásra később Priest is hivatkozik akinek az írása a további érvek és ellenérvek céltáblájává vált. Forster veszi észre elsőnek, hogy nincs szükség metanyelvi szemantikai predikátumra a Yablo paradoxon megfogalmazásához, abban azonban téved, hogy ennek következtében nem vezethető le az ellentmondás véges sok lépésben.

2.4. A vita középpontjába később az a kérdés került, hogy tartalmaz-e hibás kört a Yablo paradoxon, avagy ellenkezőleg egy új típusú paradoxonnal állunk szemben? Stephen Yablo (1993), Tennant N (1995), Roy Sorensen (1998), és Bueno and Colyvan (2003b) amellett

érvelt, hogy a Yablo sorozat önmagára való hivatkozás nélkül hasonlít a hazug paradoxonra. A másik oldalon Graham Priest (1997) és JC Beall (2001) ezzel szemben úgy látja, hogy a paradoxon fix-pont konstrukciót tartalmaz, következésképpen épp úgy körbenforgó mint a hazug paradoxon. Mindkét oldal jelentős matematikai apparátust vetett be érvei igazolására, de nem sikerült egymást meggyőzniük. Mielőtt Priest érveinek ismertetésébe belekezdek, érdemes egy pillanatra megállnunk és egy alapkérdést föltennünk magunknak. Vajon indokolt-e bonyolult matematikai-logikai fogalmi apparátus alkalmazása a Yablo paradoxon vizsgálatakor? Az egyik vitázó személyes közléséből tudom, hogy szerinte indokolatlan, mert mivel az eredeti probléma megfogalmazható köznapi nyelven minimális logikai-matematikai segédeszközökkel, ezért a Yablo paradoxon magyarázatnak is ezen a szinten kéne maradnia.
Én pont az ellenkezőjét gondolom. A Yablo paradoxon ékes bizonyítéka a modern szabatos matematikai nyelvet használó logika nélkülözhetetlenségének.

2.4.1. Röviden elmagyarázok egy a továbbiakban használt matematikai fogalmat. A négyzet függvény minden számhoz egyértelműen hozzárendeli annak négyzetét, a kettőhöz a négyet, a háromhoz a kilencet. Ennek a függvénynek két fix pontja is van, a nulla és az egy, mert ezek négyzete megegyezik önmagával. Nem csak a számok világában beszélhetünk a függvények fix pontjáról. Legyen f függvény értelmezési tartománya azon alkalmazottak köre, akik egy és csak egy egyszemélyes cég alkalmazásában állnak. Ezek olyan cégek, ahol mindenkinek van egy és csak egy főnöke. Legyen f függvény értékkészlete az egyszemélyes cégtulajdonosok köre. Ezt formálisan így fejezhetjük ki: $y=f(x)$ =: x alkalmazója y. Előfordulhat-e, hogy valamely α személy esetén α alkalmazója α legyen? Igen, ha valaki saját magát is alkalmazza cégében. Ekkor azt mondjuk f függvénynek van fix pontja, nevezetesen α, mert $\alpha = f(\alpha)$. Az iménti két példából nem látszik az a nagyon fontos tény, hogy ezek a függvények mindig egy adott nyelv alkotórészei és nem magányos kifejezések. Ezeken a nyelveken belül semmiféle ellentmondás nem következik a példában szereplő fix pontok létezéséből. Más nyelveken belül, ahol másfajta objektumok közötti relációt határoz meg az f függvény, a fix pont föltételezése ellenmondásra vezethet, ezért vagy az f függvényt vagy a nyelvet meg kell változtassuk, hogy elkerüljük az ellentmondást. Lássuk ezek után hogyan használja ezt a fogalmat Priest. Példaként említi a hazug paradoxon alábbi megformulázását: $t = ' \neg t'$

Szavakkal kifejezve: a ’t’ nevű mondat nem igaz.

A lábjegyzetben fölhívja e figyelmet arra, hogy szigorúan szólva ez nem jó példa, mert az azonosságjel bal oldalán szereplő betű a jobb oldalon idézőjelek között fordul elő, tehát átlátszatlan kontextusban szerepel az igazságfüggvény argumentumában. Ha ebben igaza van, akkor vagy idézet függvényt kéne használni, vagy az idézet függvény egy inverzét, pl. Gödel számozást, vagy valami hasonlót. Ennek ellenére ezt a megfogalmazást használja a továbbiakban, ami nem baj, mert nincs igaza.

Priest később fölteszi a kérdést, hogy vajon létezik-e egyáltalán a Yablo sorozat. „How can one be sure that there is such a squence? (We can imegine all sort of things that do not exist.)" Válasza egyértelmű igen, ami azért nagy hiba, mert nem világos mire vonatkozik az igen: a definíciók végtelen sorozatára, vagy a definiensek cégetlen sorozatára? Az hogy definíciók végtelen sorozata létezik könnyen garantálható egy függvény megadásával. Ilyen mondatok végtelen sorozata nem okoz paradoxont azzal, hogy mindegyik tagja hamis. Az paradoxon akkor keletkezik, ha a definiált mondatok végtelen sorozatának igazságértékét akarjuk meghatározni.

A Yablo paradoxon esetén mondatok, adott jelentéssel bíró formulák sorozatáról van szó, és nem tetszőlegesen interpretálható formulák halmazáról. Amit változtathatunk az legfeljebb a sorozat értelmezési tartományának variálása. Hozzátehetünk a természetes számok halmazához, elvehetünk belőle, vagy akár a negatív egész számok halmazával is vizsgálódhatunk. Priest sem figyelt fölt arra, hogy a Yablo mondat sorozat létezéséből egy másodrendű logikai formula igazsága következik, és fordítva, ha ez a másodrendű logikai formula hamis, akkor a definiált mondat sorozat nem létezik, bát a definíciók sorozata létezik. Priestnek a sorozat létezését alátámasztó érve fix-pont konstrukción alapul, gondolatmenetének végcélja, hogy a Yablo paradoxont becsomagolja abba az általa kifejlesztett sémába, amibe a Russell és hazug paradoxont már korábban sikerrel becsomagolta. Ehhez be kell bizonyítania, hogy a látszat ellenére a Yablo paradoxon épp úgy önmagára való hivatkozást tartalmaz az igazságérték szempontjából, mint a hazug paradoxon. Ehhez átfogalmazza a paradoxont olyan módon, hogy explicit meghatározását adja a sorozat mondatai igazságfeltételének. Ezt a szokásos módon teszi, azt vizsgálja, hogy valamely *n* szám mikor elégíti ki az ŝ predikátumot, amit így jelöl: S(n, ŝ), ahol az 'S' reláció a szemantikai kielégítés fogalmát jelöli. Az 'ŝ' predikátumot cseles módon így definiálja:

$\hat{s}$='$\forall k>x$, nem-S(k, $\hat{s}$)' (Figyeljük meg, hogy itt nem kifogásolja az idézőjelek használatát.) Szavakban $\hat{s}$ predikátum a következőt jelenti: 'nincs olyan x-nél nagyobb szám amelyik kielégíti ki ezt a predikátumot'. Ez a predikátum Priest szerint önmagára vonatkozik és ebben a 'hazug' mondat szerkezetére hasonlít. A predikátum alkalmazásával újrafogalmazva a Yablo sorozat elemeit az ellentmondás – mind '$\forall k>x$, nem-S(k, $\hat{s}$)', mind a tagadása – levezethető. Priest azonban nem tudja megválaszolni a Bueno és Colyvan által megfogalmazott kézenfekvő ellenvetést: miképpen lehetséges, hogy a kielégítés fogalma nélkül is levezethető az ellentmondás, sőt úgy is, hogy az 'igaz' szemantikai predikátumot – vagy valamely szinonimáját – nem is használjuk? (Utóbbit én teszem hozzá.)

2.5. J. Ketland védelmére kel Priestnek mondván ilyen bizonyítás nem lehetséges. Ketland szerint az ellentmondás levezetése fix-pont konstrukciót kíván, azon kívül a T séma kellően általános alkalmas megfogalmazása is nélkülözhetetlen. „The derivation of an inconsistency requires a uniform fixed-point construction. Moreover, the truth-theoretic disquotational principle required is also uniform, rather than the local disquotational T-scheme. The theory with the local disquotation T-scheme applied to individual sentences from the Yablo list is also consistent." (J. Ketland, 2005) Bueno és Colyvan nem publikált – de azért az interneten elérhető – viszontválaszában azt állítja Ketland érvei elhibázottak, mivel többek között összekeveri a kielégíthetetlenséget a paradox jelleggel. Az utóbbiból következik az előbbi, de fordítva nem, hangsúlyozzák a szerzők. A dolog úgy áll, hogy mindketten tévednek. A kielégíthetetlenség a hamissággal függ össze, és nem a paradox jelleggel, Ketland ebben valóban téved, de Bueno és Colyvan is elhamarkodottan ítél. Ha ugyanis a paradox jellegből következik a kielégíthetetlenség, akkor Buridan Isten létét logikailag bizonyító érve nem paradoxon, mert kielégíti a föltevés, hogy van Isten.

2.6. Jc Beall (Beall 2001) a következő módon védelmezi Priest álláspontját. Fölteszi a kérdést, pontosan rögzítettük egyáltalán a Yabló paradoxon referenciáját akár rámutatással akár leírással? „Have we fixed the reference of »Yablo's paradox« by the first method (demonstration) or the second (description, attributive)?" Gondolatmenete oda konkludál, hogy csak az utóbbi módszer lehetséges. Szerinte Priset kimutatta, hogy bármilyen módon próbáljuk rögzíteni a nevezetes sorozat referenciáját, az leírás a körkörös meghatározás lesz.

Itt azonban fontos ismét emlékeztetni arra, hogy nem minden önmagára való referálás okoz gubancot, hanem csak az, amelyik az igazságértékkel kapcsolatos.

2.7. Laurence Goldstein (Goldstein 2006) szerint a Yablo sorozat a rekurzív sorozatokhoz hasonlít, nevezetesen a Fibonacci sorozathoz. A paradoxon forrása az, hogy a paradox sorozat nem megalapozott, ezért tulajdonképpen nem is beszélhetünk igazságot kifejező mondatok sorozatáról, mivel ezek a mondatok nem bírnak az igazság kifejezésének képességével. A hiba tehát nem a körkörösség, hanem a megalapozottság hiánya.

2.8. Laureano Luna (Luna, 2009) egyetért Goldsteinnel: „… Goldstein … blames underspecification due ungroundedness not to circularity. I shall argue that Priest is wrong while Goldstein's suggestion points int he correct directions." Luna a hírhedett sorozatot időbeli sorozattá transzformálja, mivel a múltbeli eseményekre vonatkozó állításoknak bizonyosan egyértelmű igazságértéke van. Így akarja biztosítani a sorozat megalapozottságát. Majd ezek után rámutat az ezzel kapcsolatos logikai és ontológiai intuícióink közötti ellentmondásra.

3. Pár szó a definíciókról.[3]

3.1. A Yablo sorozat eredeti meghatározása egy explicit preskriptív definícióra tesz kísérletet, érdemes ezzel külön is foglalkozni tekintettel a lehetséges hibákra.[4] Most csak olyan meghatározásokat vizsgálunk, melyek bal oldalán (ez a definiendum) egyszerű egyargumentumú predikátum vagy függvény szerepel. Egy ilyen definíció számos hibában szenvedhet:

[3] A definíciók fogalmával kapcsolatban lásd Eszes Boldizsár tanulmányát:
http://www.szv.hu/files/eszes_boldizsar_a_definicio.pdf
Stephen Yablonak is van egy tanulmánya a definíciókról:
Definitions - consistent and inconsistent, published in Philosophical Studies (1993b)
Nem térek ki rá mert alapjaiban eltérő a felfogásunk.

[4] Implicit preskriptív definícióra jó példa a ZF halmazelmélet mint a 'halmaz' fogalom egyfajta explikálása.

3.1.1. *Üresség*

Előfordulhat, hogy a jobb oldalon szereplő kifejezés (a definiens) logikailag ellentmondásos, ezért semmire sem érvényes a definiendum. Ez esetben a definíció haszontalan, de nem okoz zavart a használata.

Pl.: $F(x) =_{df} x$ – természetes szám & $3 \neq x$ & $3 = x$

Ekkor F azokra a természetes számokra igaz, melyek azonosak hárommal meg nem is. Mivel nincs ilyen szám, F semmire sem lesz érvényes.

3.1.2. *Hibás kör*

A definíció bal és jobb oldalán csak azonos szabad változóknak szabad előfordulniuk, viszont a rekurzív definíciók esetét leszámítva, a bal oldali predikátum nem fordulhat elő a jobb oldalon; másképp mondva a definiens nem tartalmazhatja a definiendumot. Ennek a szabálynak a megszegését nevezik „hibás körnek”.

Pl.: $F(x) =_{df} x$ – természetes szám & $F(x)$

Ebből az következik, hogy F(a) akkor és csak akkor ha a – természetes szám & F(a). Legyen a=3. Vajon igaz-e F(3) ? Az ’$F(3) \leftrightarrow (3$ – természetes szám & $F(3))$’ mondat alapján nem tudjuk eldönteni, mert nem tudjuk mit jelent az F predikátum, a definíció nem segít meghatározni a terjedelmét. Egy ilyen definícióból nem mindig következik logikai ellentmondás, lehet hogy bizonyos interpretáció és értékelés kielégíti a fogalmat, amely ettől függetlenül hibás, mert körbenforgó.

3.1.3. *Hiányzó egzisztencia feltétel*

A definícióból logikai ellentmondás vezethető le. Ekkor a definiálandó fogalom nem létezik a ’reductio ad absurdum’ érv alapján, mivel létezésének feltételezéséből ellentmondás következik. (Sokan tévesen csak ezt tartják paradoxonnak.) Pl.: $F(x) \leftrightarrow_{df} \sim F(x)$ Ebből az következik, hogy ’$\sim F(x) \leftrightarrow F(x)$’ ami F predikátum bármely interpretációjára, x változó bármely értékelésére hamis mondatot eredményez. Mivel a bal oldalon csak egy atomi kifejezés fordul elő és a definíció egyetlen sorból áll, ezért a definíció jobb oldalán is elő kell fordulnia a definiendumnak, különben nem vezethető le logikai ellentmondás. Ezért ha egy

’F(x) $=_{df}$ …’ formájú definícióból logikai ellentmondás vezethető le, akkor az minden esetben hibás kört is tartalmaz.

3.2.Térjünk rá ezek után néhány egyszerű sorozat meghatározására.

3.2.1. Tekintsük az alábbi végtelen formula sorozatot:
’S(1) ↔ ~S(1)’, ’ S(2) ↔ ~S(2)’, ’S(3) ↔ ~S(3)’, …’S(n) ↔ ~S(n)’, …

Egy ilyen formula sorozatból természetes nyelvi mondat sorozat válik, ha megadjuk az S predikátum interpretációját. Pl.: S(n) =: n-prímszám. Minden sorozat valójában egy függvény, azaz rendezett párok halmaza, melyek első eleme egy természetes szám – hogy hányadik tagja a sorozatnak – második eleme pedig a hozzá tarozó függvény érték. Mostani példánkat halmazelméleti nyelven így lehet ’…’ nélkül megfogalmazni:

$\{\langle n, \ulcorner S(n)\ \&\ {\sim}S(n)\urcorner\rangle : n\in\acute{\omega}\}$ ahol $\acute{\omega}$ a természetes számok halmaza, $\ulcorner\ \urcorner$ az idézet függvény jele.[5]

Ha a formulák helyett azok igazság értékei sorozatát vennénk, akkor egy nagyon unalmas függvény kapnánk, amely minden természetes számhoz a ’hamis’ logikai értéket rendeli.

Picivel érdekesebb példa egy másik mondat sorozatra: 3≠1, 3≠2, 3≠3, …3≠n, (Az egyszerűség kedvéért elhagytam a mondatokat határoló idézőjeleket.) Ez így fest ’…’ nélkül:

$\{ \langle n, 3\neq n\rangle : n\in\acute{\omega}\}$

3.2.2. Fogalmazzuk meg ezt másképp, általánosabban.

$A(n) \leftrightarrow_{df} {\sim}B(n)$ ahol $n\in\acute{\omega}$
$\{ \langle n, {\sim}B(n)\rangle : n\in\acute{\omega}\}$

A korábbi 3.2.1. példa esetén B(n) =: 3=n volt, az elektronikus táblázatkezelő példában A(n) formulasorozat interpretációja érdekesebb:
http://www.andrasek.hu/ferenc/models/pwsr-fin.xls

[5] Jelen esetben mellékes, hogy a nulla természetes szám vagy sem.

3.2.3. Nincs gond a következő formula sorozattal sem:

$\{ \langle n, S(n)\rangle : S(n) \leftrightarrow \sim S(n)\}$

Ez egy kicsit bőbeszédűen az üres halmazt határozza meg, mivel az 'S(n) ↔ ~S(n)' feltétel logikai lehetetlenség.

3.2.4. Viszont mit gondoljunk a következőről?

$S(n) \leftrightarrow_{df} \sim S(n)$ ahol $n\in\acute{\omega}$

Ugyanez a halmazelméleti nyelven:

$\{ \langle n, |S(n)|\rangle : \sim S(n)\ \&\ n\in\acute{\omega}\}$

A definíció hibás, mert nem teljesül az egzisztencia feltétel, így az is kérdéses, hogy értelmes-e a halmaz meghatározása, és ha igen, van–e a halmaznak eleme, és ha vannak elemi, mik azok?

3.2.5. A következő halmaz meghatározása rekurzív definíciót tartalmaz.[6]
$S(n) \leftrightarrow_{df} \sim S(n-1)$ ahol $n > 1\ \&\ n\in\acute{\omega}$
S(1) =: Szókratész bölcs volt.
$\{ \langle 1, |S(1)|\rangle, \langle n, |S(n)|\rangle : \sim S(n-1)\ \&\ n > 1\ \&\ n\in\acute{\omega}\}$

Feltéve, hogy hihetünk Platónnak Szókratész megítélésében, ez a sorozat így kezdődik:
igaz, hamis, igaz, hamis, igaz, …

Ha hiányozna a fenti rekurzív definíció bázisa, azaz S(1) meghatározása, akkor az iménti definíció hibás kört tartalmazna, így a halmaz meghatározása sikertelen volna.

3.2.6. A természetes számok egy véges részhalmazára nézve a 3.2.5. rekurzív definíciót visszafelé is megfogalmazhatjuk. (Végtelen sok tagból álló rekurzív sorozat esetén a

[6] Egy rekurzív definíció minden esetben tartalmaz véges sok kiinduló értéket - ez a definíció bázisa - a bővítési szabályt, valamint gyakran egy a záradékot. Egy rekurzív sorozat rendje m pozitív természetes szám, amennyiben a sorozat első m eleme meghatározza a sorozat összes tagját.

megfordítás lehetetlen, mert nincs legnagyobb természetes szám.) Lássuk ezt az első öt számra.

$S(n) \leftrightarrow_{df} \sim S(n+1)$ ahol $n \in \{1,2,3,4\}$

$S(5)$ = Szókratész bölcs volt.

$\{ \langle 5, |S(5)| \rangle, \langle n, |S(n)| \rangle : \sim S(n+1) \ \& \ n \in \{1,2,3,4\} \}$

Az előző sorozatot kezdetét kapjuk: igaz, hamis, igaz, hamis, igaz.

3.2.7. Kihagyva a maximális elemet, a természetes számok végtelen tartományán ezt a hibás definíciót kapjuk: $\{ \langle n, |S(n)| \rangle : \sim S(n+1) \ \& \ n \in \acute{\omega} \}$. Természetes nyelven ez ezt jelenti (Goldstein példája nyomán):

(1) a következő mondat hamis

(2) a következő mondat hamis

(3) a következő mondat hamis

.

.

Ennek a sorozatnak nem tudjuk az összes tagját igazra értékelni – tehát sincs modellje – de az alábbi interpretáció nem szül ellentmondást: igaz= |(1)|, hamis= |(2)|, igaz= |(3)|, hamis= |(4)|, …

Viszont ez is jó: hamis= |(1)|, igaz= |(2)|, hamis= |(3)|, igaz= |(4)|, …

Nem tudjuk melyiket válasszuk, mert nem meghatározott a sorozat utolsó tagja.

Valójában ez formula sorozat és nem mondat sorozat. Az 'S' predikátumot pl. így interpretálhatjuk: n-kalapot visel. Ekkor a sorban álló emberek felváltva viselnek illetve nem viselnek kalapot, de nem tudjuk, hogy a páros számúak kalaposak-e vagy hajadonfőttek. Formális nyelven világosan látszik, hogy 'S' predikátum a definíció mindkét oldalán szerepel. A sorozat egzisztencia föltevése nem hamis, hisz két választásunk is van, viszont a sorozat rosszul definiált, mert nem rögzíti melyiket válasszuk.

3.2.8. Figyeljük meg, hogy a Yablo sorozat alábbi módosítása nem vezet ellentmondásra:

(1) minden k>1 –ra, S_k nem igaz

(2) minden k>2 –ra, S_k nem igaz

(3) minden k>3 –ra, S_k nem igaz

.

.

Azért nincs ezzel a sorozattal gond, mert a mondatok neveiként szolgáló számok nem részei a sorozatnak. Ugyanakkor ez valójában nem mondat sorozat, hanem egy formula sorozat, melyet akkor töltünk meg tartalommal, ha S_k predikátumot interpretációval látjuk el. Ki tudunk gondolni olyan interpretációt, hogy a sorozat minden tagja igaz lesz, másképp mondva lesz modellje a sorozatnak. (A) Legyen ugyanis S_k olyan módon meghatározva a természetes számok tartományán, hogy S_k akkor és csak akkor ha k=1. Ekkor (1) igaz, (2) igaz, (3) igaz, …. (n) igaz. (B) Ha azt választanánk, hogy S_k akkor és csak akkor ha k=2, akkor (1) állítás hamis lenne, de a többi igaz. Tehát a konkrét sorozatok definíciói - ahol n természetes szám:

(A) S(n) $\leftrightarrow_{df}$ minden k>n-re, nem igaz, hogy k=1 (Másképp fogalmazva: nincs olyan k>n, hogy k=1.)

(B) S(n) $\leftrightarrow_{df}$ minden k>n-re, nem igaz, hogy k=2 (Másképp fogalmazva: nincs olyan k>n, hogy k=2.)

Figyeljük meg, sem (A) sem (B) definíció nem körbenforgó. Ezért az S(n) sorozat nem paradoxon, hiszen miden tagjának van igazságértéke és még az is teljesül, hogy van olyan választásunk, hogy a sorozat minden tagja igaz, azaz a formula sorozatnak van modellje.[7]

3.2.9. Alakítsuk rekurzív definícióvá az előző meghatározást:

$S(n) \leftrightarrow_{df} \forall k\ (k < n \rightarrow \sim S(k))$ ahol $1 < n \ \&\ n \in \omega$

S(1) =: Szókratész bölcs volt.

|S(1)| = |Szókratész bölcs volt.| = igaz

$\{\langle 1, |S(1)|\rangle, \langle n, |S(n)|\rangle: \forall k\ (k < n \rightarrow \sim S(k)) \ \&\ 1 < n \ \&\ n \in \omega\ \}$

[7] Érdemes ezt is a táblázatkezelő modellen tanulmányozni.

Ebben az esetben a mondatok igazságérték sorozata így alakul:

<igaz, hamis, hamis, hamis, …>

Mi történik, ha Szókratész nem volt bölcs?

(Próbáljuk ki az elektronikus modellen.)

3.2.10. Véges sok tagra korlátozva a sorozatot, a rekurzív sorozat fordítva is definiálható:

$S(n) \leftrightarrow_{df} \forall k\ (n < k \rightarrow \sim S(k))$ ahol $n < 6\ \&\ n\in\omega$

$S(6)$ =: Szókratész bölcs volt.

$|S(6)| =$ |Szókratész bölcs volt.| = igaz

$\{\langle 1, |S(6)|\rangle, \langle n, |S(n)|\rangle : \forall k\ (n < k \rightarrow \sim S(k))\ \&\ n < 6\ \&\ n\in\omega\ \}$

A korábbi sorozat egy véges metszetének fordítottját kapjuk:

<hamis, hamis, hamis, hamis, hamis, igaz>

Hagyjuk ki a sorozat maximális elemét. Ekkor megkapjuk a Yablo sorozatot:

$n\in\omega \rightarrow.\ S(n) \leftrightarrow df\ \forall k(n< k \rightarrow \sim S(k))$

halmazelméleti nyelven:

$\{\langle n, |S(n)|\rangle : \forall k(\ n< k \rightarrow \sim S(k))\ \&\ n\in\omega\ \}$

Mi következik abból, hogy ennek a fordított rekurzív sorozatnak nincs maximális eleme? Az elektronikus modell bemutatja a választ.

4. Ahogy én látom

4.1. Vegyük szemügyre ismét a paradoxon eredeti megfogalmazását. Figyeljünk fel a metanyelvi „igaz” predikátum használatára a tárgynyelven, valamint hogy a mondatok nevei maguk is előfordulnak a tárgynyelven. Az ilyen nyelveket nevezte Tarski szemantikailag zártnak, és óvott a formális tudományokban való használatuktól. Az hogy egy szemantikailag zárt nyelv ellentmondások forrása egyáltalán nem meglepő. A Yablo paradoxon nem volna túlzottan érdekes ha csak ilyen nyelven volna megfogalmazható. Nem ez a helyzet. Megmutatom, hogy a paradoxon megfogalmazásához nincs szükség sem a T séma valamilyen megfogalmazására, sem fix pont technikára, sem a kielégíthetőség fogalmára, sem végtelen sok lépésből álló bizonyításra, és főleg nincs szükség szemantikailag zárt nyelvre. Legyen adott 'H,<' bináris reláció egy szigorú lineáris rendezés, ahol H-nak van minimális eleme, és minden a maximális elemtől különböző elemének egyértelmű rákövetkező H halmazbeli eleme. Valamely $x \in H$ esetén '$x+1$' a rákövetkező elemet jelenti. Ekkor a Yablo sorozat egzisztencia feltevése megfogalmazható másodrendű logikai nyelven:

(YB) $\exists s \forall n \colon n \in H \rightarrow (s(n) \leftrightarrow \forall k(n < k \rightarrow \sim s(k)))$

Szavakkal kifejezve: van olyan *s*, hogy minden *n*-re, ha $n \in H$ akkor ($s(n)$ pontosan akkor ha minden *k*-ra (ha $n < k$ akkor nem-$s(k)$))

Bebizonyítható hogy ha H a természetes számok halmaza, akkor YB hamis. Lássuk ezt sorra.

(YB) nyilvánvalóan hamis ha *s* változót az 'önmagával azonosnak lenni' predikátumra értékeljük és H a természetes számok halmaza.

(1) $\forall n \colon n \in \omega \rightarrow (n=n \leftrightarrow \forall k\, (n < k \rightarrow \sim n=n))$

(2) $1 \in H \rightarrow (1=1 \leftrightarrow \forall k\, (1 < k \rightarrow \sim 1=1))$ (1)

(3) $1 \in H \rightarrow (1=1 \leftrightarrow (1 < 2 \rightarrow \sim 1=1))$ (2)

(4) $T \rightarrow (T \leftrightarrow (T \rightarrow F))$ (3) (aritmetikai igazság)

(5) F (4)

Megmutatom, hogy nem elégíti ki YB formulát, pl. a 'van kalap a fején' predikátum sem. Ehhez fölhasználom Roy A. Sorensen és Graham Priest szemléletes példáját rövid mesévé bővítve.

A mennyország bejárata előtt hosszú sor áll, a veszekedés elkerülése végett mindenkinek sorszáma van. Szent Péter csak akkor nyitja ki a kaput, ha igaz az alábbi mondat:

Bárkinek a fején akkor és csak akkor van kalap, ha mögötte senkinek nincs a fején kalap.

Be fogom bizonyítani, hogy Péternek nem kell bajlódnia a kapunyitással ha végtelen sor áll a kapu előtt, és valaki – aki ilyen csodákra képes – nem áll oda utolsónak a végtelen sok várakozó után így szólván: én vagyok ω, a legkisebb transzfinit sorszám. (A Zermelo-Fraenkel halmazelméletben csudálatosképpen van ilyen szám.) Ha csak véges hosszú a sor, akkor attól függően, hogy a sorban állók mennyire tanulták meg életükben a logikát, és mennyire tartják be a szabályokat, Péternek lesz dolga a kapuval.

Mi a helyzet, ha csak egyetlen ember áll a kapu előtt? Emberünk így okoskodhat. Ha állna egy kalapos ember mögöttem, akkor nem tehetném föl a kalapomat, de mivel senki sem áll, ezért kalapos ember sem áll mögöttem, tehát a másik eset érvényes, ezért föl kell tegyem a kalapomat.

Mi a helyzet ha ketten állnak a sorban? Az utolsó ember most is az iménti módon okoskodik, tehát kalap van a fején. Ekkor viszont az előtte álló hajadonfőtt marad, mert van mögötte kalapos ember. Három ember esetén, az első kettő fején nem lesz kalap, kivéve az utolsón. Mindezt így ábrázolhatjuk:

⊗

○⊗

○○⊗

Lehetséges-e az alábbi eset:

○⊗⊗

Nem, mert a másodikon csak akkor lehetne kalap, ha mögötte senkin sincs kalap; csakhogy van, ezért az ő fején sem lehet.

Vajon mi ennek a feladatnak az általános matematikai megfogalmazása? A kérdés az, hogy létezik-e olyan f függvény, amelyik kielégíti az alábbi feltételt:

Minden n-re: n – természetes szám $\rightarrow$(kalapos=f(n) $\leftrightarrow$ $\forall$k (n<k $\rightarrow$ nem kalapos=f(k)))

Megmutatom, hogy a sorozatot a természet számokra korlátozva nincs ilyen függvény. Tegyük fel ellenkezőleg, hogy mégis van ilyen f_1 függvény. Ekkor valamely n vagy kalapos vagy sem. Vegyük az elsőt: kalapos =f(n). Ha n kalapos, akkor mindenki hajadonfőtt mögötte, igen ám, de akkor a közvetlenül mögötte lévő n+1 is fölteheti a kalapját. Ha viszont fölteszi, akkor az előtte lévőn nem lehet kalap, tehát n hajadonfőtt: nem kalapos=f(n). Ellentmondásra jutottunk, tehát el kell vessük előfeltevésünket, azaz n hajadonfőtt kell legyen. Csakhogy ez bárkire igaz, tehát senkin sem lehet kalap. Akkor viszont bárki föltehetі a kalapját, ami megint csak ellentmondás. Mivel f_1 tetszőleges volt, mindebből az következik, hogy ilyen függvény nem létezik.

Valamivel komplikáltabb bebizonyítani, hogy semmilyen predikátum nem elégíti ki YB formulát. Íme a levezetés.

*(1) S(n) - tegyük fel S(n) igaz, (YB) S

*(2) $\forall$k. n<k$\rightarrow$ ~S(k)	(1) S(n)$\leftrightarrow\forall$k. n<k$\rightarrow$ ~S(k)
*(3) n<n+1$\rightarrow$ ~S(n+1)	(2)
*(4) n<n+1	(aritmetikai igazság)
*(5) ~S(n+1)	(3) (4)
*(6) ($\forall$k. n<k$\rightarrow$ ~S(k))$\rightarrow$($\forall$k. n+1<k $\rightarrow$ ~S(k))	(aritmetikai igazság)
*(7) $\forall$k. n+1<k $\rightarrow$ ~ S(k)	(2) (6)
*(8) S(n+1)	(7) S(n+1)$\leftrightarrow\forall$k. n+1<k$\rightarrow$ ~S(k)
(9) S(n) $\rightarrow$. ~S(n+1) & S(n+1)	*(1) (5) (8)
(10) ~S(n)	(9)
(11) $\forall$n. ~S(n)	(10) mivel n tetszőleges volt
(12) $\forall$k. n<k$\rightarrow$ ~S(k)	(11) (aritmetikai igazság)
(13) S(n)	(12) S(n)$\leftrightarrow\forall$k. n<k$\rightarrow$ ~S(k)
(14) ~S(n) & S(n)	(10) (13)

(15) If $\exists s\forall n$: $n \in$H $\rightarrow$ ($s(n) \leftrightarrow \forall k$ ($n < k \rightarrow$ ~$s(k)$)) then ~S(n) & S(n) (Yb) (14)

(16) ~$\exists s\forall n$: $n \in$H $\rightarrow$ ($s(n) \leftrightarrow \forall k$ ($n < k \rightarrow$ ~$s(k)$)) (15)

Másképp kifejezve tehát S(n), azaz a Yablo mondat sorozat nem létezik. Érdemes megjegyezni, hogy az ellentmondás elillan, és a mondat sorozat létezik ha:

a. H = a természetes számok egy véges részhalmaza

b. H = negatív egészek

c. H = természetes számok ∪ {az első transzfinit sorszám}

d. H = egész számok ∪ {az első transzfinit sorszám }

Megjegyzem, hogy az utóbbi két esetben nincs H maximális elemét közvetlenül megelőző elem.

Vezessük be az alábbi egyszerűsítő jelölést:
G(*s*, *n*) =: minden *k* –ra (ha *n* < *k* akkor nem *s*(*k*))

Ezek alapján ezt a sémát kapjuk:
(YPG) van olyan *s*, hogy minden *n*-re: ha $n \in$H akkor (*s*(*n*) pontosan akkor ha G(*s*, *n*)))

Amennyiben H-nak nincs maximális eleme, akkor a sorozat nem megalapozott, következésképpen a fenti séma, mint *s*(*n*) definíciója hibás, mivel a definiens – G(*s*, *n*) – tartalmazza a definiendum – *s*(*n*) – egy elemét, ’*s*’-et. Priestnek tehát ebben igaza volt, de azt Goldstein sejtette meg, hogy miért? Azért körkörös a definíció, mert a természetes számok halmazának nincs maximális eleme. Tehát a Yablo sorozat egy hibás, megalapozatlan fordított rekurzív definíció. Azon kívül az egzisztencia föltevése hamis a tárgyalási univerzumot a természetes számok halmazára korlátozva.

Végezetül az eddigieket fölhasználva hasonlítsunk össze három korábbi hibás definíciót:
$\{\langle n, |S(n)|\rangle : {\sim}S(n) \ \&\ n \in H\}$
$\{\langle n, |S(n)|\rangle : \forall k\ (\ n < k \rightarrow {\sim}\ S(k))\ \&\ n \in H\ \}$
$\{\langle n, |S(n)|\rangle : {\sim}S(n+1)\ \&\ n \in H\ \}$

Ha H a természetes számok végtelen halmaza, akkor az első kettőnek nem teljesül az egzisztencia feltétele, a második kettő fordított rekurzív definíciónak pedig hiányzik a bázisa. Ha H halmaznak van maximális eleme ’<’ relációra nézve, akkor a második kettő egzisztencia feltétele teljesül, viszont az első egzisztencia feltétele H semmilyen nem üres választása esetén sem teljesül.

7. Összefoglalás és utóhang

A Yablo paradoxon nem szemantikai paradoxon mert megfogalmazható tárgynyelven:

$n\in\omega \rightarrow. S(n) \leftrightarrow_{df} \forall k(n< k \rightarrow \sim S(k))$

A definíciók természetes számokon értelmezett sorozata létezik, ebből nem következik ellentmondás:

$\{\langle n, S(n) \leftrightarrow df\ \forall k(n< k \rightarrow \sim S(k)) \rangle : n\in\omega \}$

A definiálni kívánt mondatsorozat viszont nem létezik, tehát az alábbi halmaz üres:

$\{\langle n, S(n) \rangle : \forall k(n< k \rightarrow \sim S(k)) \;\&\; n\in\omega \}$

A Yablo sorozat egy fordított rekurzív sorozat, melynek hiányzik a bázisa, ezért a definíció hibás, ez szüli az ellentmondást. A helyes definíció az alábbi, ahol m a $\langle H, <\rangle$ szigorú teljes rendezés legnagyobb eleme:

$|S(m)| =$ igaz

$\{\langle 1, |S(m)|\rangle, \langle n, |S(n)|\rangle: \forall k(n < k \rightarrow \sim S(k)) \;\&\; n<m \;\&\; n\in H \}$

Ha H halmaz véges és legalább kételemű, akkor $|S(m)| =$ hamis választása esetén $|S(m-1)| =$ igaz.

E sorok írója nem hisz a paradoxon valamilyen teljesen átfogó fogalmában. Úgy véli, hogy az egy családba tartozó paradoxonok rokonsági, némelykor leszármazási viszonyban állnak egymással, és a közeli rokonok jobban, a távoliak kevésbé hasonlítanak egymásra. Nem hiszem hogy vannak megoldhatatlan paradoxonok, melyeket csak egyre mélyebben újrafogalmazni lehet. Nem ismerek semmi olyan bizonyos állítást amiből megoldhatatlan paradoxok léte következne, bár azt sem tudom bebizonyítani, hogy ilyenek nem lehetségesek, azaz nem fordulhat elő hogy egyszer megoldhatatlan logikai-matematikai paradoxonokba ütközünk.

Irodalom

Beall, JC. 2001. Is Yablo's Paradox Non-Circular? Analysis 61: 176-87.

Bueno, O and M. Colyvan. 2003. Paradox without satisfaction. Analysis 63 (2): 152-6.

Bueno, O and M. Colyvan. 2004. Yablo's paradox rides again: a reply to Ketland. http://homepage.mac.com/mcolyvan/papers/yra.pdf

Forster, Thomas, 1996. The significance os Yablo's paradox without Self-Reference. http://www.dpmms.cam.ac.uk/~tf

Goldstein, Laurence. 2006. Fibonacci, Yablo, and the cassationist approach to paradox. Mind 115: 867-889.

Hardy, J. 1995. Is Yablo's paradox liar-like? Analysis 55: 197-98.

Ketland, J. 2005. Yablo's paradox and omega-inconsistency. Synthese 145: 295-302.

Ketland, J. 2004. Bueno and Colyvan on Yablo's paradox. Analysis 64: 165-72.

Laureano Luna (2009). Yablo's Paradox and Beginningless Time. Disputatio (26):89-96.

Priest, G. 1997. Yablo's paradox. Analysis 57: 236-42.

Sorensen, R. 1998. Yablo's paradox and kindred infinite liars. Mind 107: 137-55.

Yablo, S. 1985. Truth and reflection. Journal of Philosophical Logic 14: 297-349

Yablo, S. 1993a. Paradox without self-reference. Analysis 53: 251-2.

Yablo, S. 1993b. Definitions - consistent and inconsistent, published in Philosophical Studies

Yablo, S. 2004. Circularity and paradox. In Self-Reference. Eds. T. Bolander, V. Hendricks and S. Pedersen, 165-83. Stanford: CSLI Press.