Modellek matematikán innen és túl

András Ferenc

Magyar Tudomány 2007. november

1. Anyagi modellek

Mint a legtöbb köznapi beszédben használt kifejezés, a 'modell' szó is a képlékeny, sokértelmű szavak közé tartozik. Különféle dolgok különféle kapcsolatát fejezzük ki a 'modell' szó különféle használatával. A festő vagy szobrász és modellje közötti viszony ami rokon a mostani vizsgálódás irányával. Egy épülő városrész makettje és a majdan felépült város közötti kapcsolat, vagy egy hajómodell vagy modell vasút és a hajó vagy mozdony közötti hasonlóság az a reláció ami kiindulópontul szolgál. A planetárium vagy a műanyag csontváz valamilyen szempontból hasonlít a Naprendszerhez illetve az emberi testhez, és az előbbiek vizsgálata valamilyen szempont-tól célszerűbb, vagy az egyedüli lehetőség, szemben az utóbbi dolgokéval. Például mielőtt a hajót megépítjük, a modellje segítségével ellenőrizhetjük, hogy vajon úszni fog-e a vízen. Azon kívül megvizsgálhatjuk, hogy miképp módosítsuk kissé a hajótest formáját, hogy kisebb fogyasztással gyorsabban haladjon. A terepasztal segíthet megérteni a pályaudvar forgalomirányítását, a Planetárium pedig megmutathatja, hogy milyen égboltot láttak eleink kétezer évvel ezelőtt. A példákon látható, hogy miben és miért hasonlít a modell a valóságra. Vannak azonban nem szemléletes hasonlóságok is, melyek mégis fontosak. Ilyen például, hogy egy adott tömegű melegedő test viselkedése, vagy rugókból, tömegekből álló rezgő rendszer viselkedése hasonlít, és ez alapján modellálható, ellenállások, kondenzátorok és induktivitások, valamint az elektromosságtan törvényeinek segítségével. Ennek a hasonlóságnak a belátása azon alapul, hogy a különféle fizikai jelenségeket leíró matematikai egyenletek struktúrája megegyezik. A megegyezés úgy látható be, hogy az elektromos és mechanikai vagy hőtani fizikai jellemzőket kölcsönösen egyértelműen megfeleltetünk egymásnak. Ilyen módon pusztán az elektromos jelenségek világán belül vizsgálódva előre látjuk a mechanikai vagy hőtani jelenségek lefolyását. Ez sokszor jóval olcsóbb és egyszerűbb, mint az eredeti mechanikai vagy melegedő rendszer tanulmányozása. Az utóbbi modellek már nem szemléletesek, és nem is érthetőek kellő matematikai műveltség nélkül.

Az eddigi példáknál a modellek, és azok amit modellálnak, egyaránt élőlények vagy élettelen tárgyak voltak. A 'modell' szónak van azonban fontos más értelmű használata is. Amikor arról tanulunk, hogy a klasszikus mechanika és a speciális relativitáselmélet egyaránt modellje az inercia rendszerekben történő mechanikai mozgásoknak, csak az utóbbi szélesebb sebességtartományban és pontosabban írja le az eseményeket, akkor itt fizikai elméleteket tekintenek modellnek, nem pedig kézzelfogható tárgyakat. Itt a modell egy szellemi alkotás, egy matematikai struktúra fizikai értelmezéssel ellátva, mint olyan eszköz, ami adott pontossággal segít előrelátni, hogy mi fog történni a valóságban. Itt tehát a modell és a modellezett közötti viszony, egy matematikai nyelven megfogalmazott elmélet – azaz jelek struktúrája – és a fizikai jelenségek egy köre – azaz a jeleken kívüli világ – közötti viszony. Ennek a viszonynak a fordítottját is használjuk. A számítógépekben és háztartási gépekben használt digitális automaták olyan áramköröket és kapcsoló rendszereket tartalmaznak, melyek közül némelyeket 'logikai áramkör'-nek neveznek. Az elnevezés alapja szintén egy hasonlóság. Ezek az áramkörök két kitüntetett állapot alapján működnek: magas és alacsony feszültségszint, illetve folyik vagy nem folyik áram. A kitüntetett állapotokat az igaz és hamis logikai értékeknek megfeleltetve működésük hű tükörképe a matematikai logikában használatos igazságfüggvényeknek, a bonyolultabbak pedig a matematika egyik ágának, a véges automaták elméletének. De nem csak a diszkrét állapotú áramkörök tekinthetők egyes matematikai struktúrák fizikai modelljeinek. Bonyolult differenciálegyenletek közelítő megoldását segítheti a matematikai egyenlet modellálása analóg számológépek segítségével. 2005 tavaszán nagy vita dúlt a HIX magyar nyelvű internetes fórumon arról, hogy az ilyen analóg eszközök számítógépnek tekinthetők-e? A mi szempontunkból ez most mindegy. Ami lényeges, hogy amikor analóg rendszereket matematikai problémák megoldásának a keresésére használunk, akkor fizikai rendszereket tekintünk úgy, mint elméleti problémák modelljeit. Ez a helyzet akkor is, ha valamely közgazdaságtani elméletet, vagy tanítási módszert kipróbálnak a gyakorlatban, mielőtt széleskörűen bevezetik. Foglaljuk össze egy táblázatban az eddigieket. A táblázat vízszintes sorában szerepel a modell anyagi (fizikai) vagy szellemi jellege, míg a függőleges oszlopokban a modellálandó objektum anyagi vagy szellemi mivolta.

X modellje Y-nak	Anyagi (élő vagy élettelen)	Szellemi
Anyagi (élő vagy élettelen)	1	1
Szellemi	1	

1. táblázat. Modell típusok

Mint látható három esetet vettünk sorra eddig, egy hely üresen áll.

A táblázat nem tartalmazza a fejlett élőlények túlélést elősegítő idegrendszeri hálózatát, mert ezek nem tudatos emberi alkotások eredményei. Ugyanakkor ezek az idegrendszeri hálózatok is a környezet modelljeinek tekinthetők, mivel képesek a környezetben előforduló, az élőlény számára fontos tárgyak, jelenségek összefüggéseinek leképezésére.

Az élőlények, különösen az ember és az emberi gyakorlat alkotta teoretikus tudomány modellek segítségével ismeri meg a világot. Ezek a modellek a mindennapi élet és a tudományos gyakorlat rostáján hullanak ki vagy akadnak fenn további felhasználás végett, de soha nem azonosak a valósággal. Talán Kant volt az első filozófus, és utána sokáig senki, aki ha mégoly archaikus nyelven és csak homályosan, használható matematikai-logikai fogalmak és logikai formális nyelv nélkül, de megértette a modern elméleti tudományok modellalkotó gyakorlatát. Az ő *a priori szintetikus* ítélet fogalmának ez egy lehetséges értelmezése.

2. Modellek matematikán belül

Végül már csak egy lehetőség maradt hátra a modellek és tárgyaik kapcsolatát tekintve, az, amikor a modell is és annak tárgya is a matematika világán belül marad. Ez az amit most néhány egyszerű példa segítségével részletesebben is megvizsgálok.

Az egyszerűség kedvéért vegyünk egy mindössze háromelemű halmazt: $H = \{a, b, c\}$ Képezzük e halmaz összes részhalmazainak halmazát, melyet jelöljünk $P(H)$-val. $P(H) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Mint látható éppen 8 részhalmazunk van, ami nem meglepő, mert $2^3 = 8$. A részhalmazok halmazán meghatározunk három a halmazelméletből ismert műveletet, nevezetesen az egyesítést: $\cup$, a metszetet:$\cap$, és a H-ra vonatkoztatott komplementer halmazt: $\neg$. Utóbbi úgy is tekinthető, mintha H-ból kivonnánk $P(H)$ egy elemét. Az alábbi táblázatok mutatják az összes lehetséges esetet.

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\neg x$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$

2. táblázat. Komplementer halmaz

Figyeljük meg a következő érdekes összefüggéseket, melyek bármely x eleme $P(H)$-ra igazak: $\emptyset \cap x = \emptyset$; $\emptyset \cup x = x$; $\{a, b, c\} \cap x = x$; $\{a, b, c\} \cup x = \{a, b, c\}$; $\neg\emptyset = \{a, b, c\}$; $\emptyset = \neg\{a, b, c\}$ A táblázatokkal ellenőrizhető a következők igazsága is: $\neg x \cap x = \emptyset$; $\neg x \cup x = \{a, b, c\}$

Vessük össze az előző példát a logikából jól ismert VAGY ; ÉS valamint NEM igazságfüggvényekkel. Legyen I=igaz; H=hamis.

Az előző példához hasonló összefüggéseket találunk most is:

$H \,\&\, x = H; H \vee x = x; I \,\&\, x = x; I \vee x = I; \sim H = I; H = \sim I$

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\ldots$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\ldots$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\ldots$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\ldots$
$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\ldots$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\ldots$
$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\ldots$
$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\ldots$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\ldots$

3. táblázat. Egyesítés

$\cap$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,c\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a\}$	$\{a,c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$
$\{b,c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$
$\{a,b,c\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$

4. táblázat. Metszet

Itt is érvényes egy a korábbihoz hasonló igazság: $\sim x \wedge x = H; \sim x \vee x = I$. Könnyen belátható, hogy az előző példában szereplő $\emptyset$ jelnek itt a H, a a, b, c halmaznak az I, a $\neg, \cup, \cap$ műveleteknek pedig rendre a $\sim, \vee$, & műveletek felelnek meg.

Nézzünk egy ehhez hasonló érdekes kapcsolatot az aritmetika és az igazságfüggvény logika között! Legyen Z az egész számok halmaza, A pedig atomi állítások egy halmaza. Ezek olyan tovább már nem elemzett kijelentő mondatok, melyek rendelkeznek egyértelmű igazságértékkel. Feltételezésük hasonló szerepet játszik a logikában, mint a pontok a geometriában. Legyen f egy A értelmezési tartományú és Z értékkészletű olyan függvény melyre három feltétel teljesül:

A1. minden atomi állításhoz egy egész számot rendel, de különböző atomi

x	H	I
$\sim x$	I	H

5. táblázat. Negáció

$\vee$	H	I
H	H	I
I	I	I

6. táblázat. Vagy kapcsolat

&	H	I
H	H	H
I	H	I

7. táblázat. És kapcsolat

mondatokhoz különböző számokat rendel;

A2. ha egy p atomi állítás igaz, akkor és csak akkor a hozzá rendelt x szám kettőnél nagyobb prím szám;

A3. ha p atomi mondathoz x szám, a q atomi mondathoz y szám tartozik, és p-nek tagadása (negációja) q, akkor fennáll a következő egyenlőség: $x = 1 - y$.

Érték	Állítás	Érték	Az állítás tagadása
-12	$1 \neq 1$	11	$1 = 1$
7	A hó fehér.	-8	A hó nem fehér.
-4	Szókratész nem bölcs	3	Szókratész bölcs.
5	Minden ember halandó.	-6	Valamely ember halhatatlan.

8. táblázat. Mondatok értékelése érték $= f$(állítás)

Használni fogom az egész számok halmazán értelmezett 'páros' tulajdonságot, amit a 'modulo' függvénnyel fejezek ki. Ez a függvény az egész számok osztási maradékának abszolút értékét adja meg. Tehát valamely x számra $1 = mod(x, 2)$ ha az x szám páratlan, és $0 = mod(x, 2)$ ha x páros. Ezek szerint a 'három' szám és a 'mínusz három' szám is egyformán páratlan, tehát $1 = mod(3, 2)$ és $1 = mod(-3, 2)$. Páros számok esetén a kettővel való osztási maradék nulla, tehát $0 = mod(-12, 2)$ és $0 = mod(4, 2)$. A mindennapi életben gyakran találkozunk a 'modulo' függvény használatával. Ilyenek a hagyományos mutatós órák, vagy a hét napjai illetve az évek hónapjai. Az órák például az órákban mért eltelt idő tizenkettővel vagy huszonnéggyel való osztási maradékát mutatják, míg a hét napjai az időtartam napokban mért számának héttel való osztásának felelnek meg.

Az állításlogikában használatos igazságfüggvényeknek aritmetikai műveleteket feleltetek meg, és az ennek megfelelően lefordított formulák értékelésekor nem igazságértékeket hanem egész számokat használok. Az 'igaz' és 'hamis' logikai értékeknek az egész számok páratlan vagy páros tulajdonsága felel meg, igaz=páratlan, hamis=páros. Az igazságfüggvények aritmetikai fordításakor csak néhány elemi aritmetikai műveletet használok: összeadás, kivonás, szorzás és a 'modulo' függvényt. Az alábbi táblázat mutatja az igazságfüggvényeket (logikai funktorokat) egy sorban a nekik megfelelő aritmetikai kifejezéssel.

Igazságfüggvények, argumentumaik mondat paraméterekkel kitöltve	Magyarázat	Az igazságérték aritmetikai megfelelője, ahol p és q értékei egész számok lehetnek.
$\sim p$	Negáció (a tagadás jele)	$mod(-1 \times p - 1, 2)$
$p \& q$	És kapcsolat	$mod(p \times q, 2)$
$p \vee q$	Alternáció (megengedő értelmű vagy)	$mod(1 + (p + 1) \times (q + 1), 2)$
$p \nabla q$	Kizáró értelmű vagy (vagy ... vagy ...)	$mod(p + q, 2)$
$p \rightarrow q$	Kondicionális (ha ... akkor ...)	$mod(1 + p + p \times q, 2)$
$p \leftrightarrow q$	Bikondicionálisn (akkor és csak akkor)	$mod(-1 * (p + q) - 1, 2)$

9. táblázat. Aritmetikai fordítás példák

Ha jó ez a modell, akkor annak alapján bármely igazságfüggvény formulát lefordíthatunk aritmetikai kifejezéssé, és így a logikai igazságokból aritmetikai igazság válik. Lássunk egy példát. Annak a logikai igazságnak, hogy '$p \vee \sim p$' az az aritmetikai állítás felel meg, hogy bármely p egész számra $1 - p^2 - p$ páratlan szám. Ez átalakítva azt kapjuk, hogy $1 - p \times (p + 1)$ ami mindig páratlan szám.

Láttunk három példát három hasonló struktúrára. Miben áll ez a hasonlóság? A három struktúrában három egymásnak megfelelő műveletet találunk:

- Unáris műveletek : $\neg, \sim, 1 - p$ Aki ismeri a lambda operátor használatát, annak az utóbbit pontosabban így is kifejezhetjük: $\lambda p(-p - 1)$.
- Bináris műveletek: $\cap$, $\&$, $\times$

- Bináris műveletek : $\cup, \vee, 1 + (p+1) \times (q+1)$ Utóbbi műveletnél megfelelne $p + q + p \times q$ is.

Találunk hasonló elemeket is:

- Egységelemek: $\{a, b, c\}, I, 1$
- Zéruselemek: $\emptyset, H, 0$

Ezzel kölcsönösen egyértelműen megfeleltettük egymásnak a példákban szereplő alaphalmazokat és műveleteket. Jelöljük az egymásnak megfelelő unáris és bináris műveleteket rendre így: $', \wedge, \vee$ A zéruselemet és egységelemet pedig így: o, e. Ekkor azt mondhatjuk, hogy a Boole-féle algebrára adtunk meg három példát, ahol:

Boole algebra $= \langle \mathbf{B},', \wedge, \vee \rangle$

$B = \{o, e\}$ és bármely $x \in B$ re $x \wedge x' = o$ és $x \vee x' = e$

továbbá $x \wedge o = o$ és $x \vee e = e$

$\wedge, \vee$ kommutatív műveletek, azaz $x \wedge y = y \wedge x$ és $x \vee y = y \vee x$

azon kívül mindkét művelet disztributív a másikra nézve:

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ illetve $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

A korábbi három példa tehát egy-egy esete a Boole féle algebrának. A három példában szereplő műveletek egyforma eredményt adnak, ha eltekintünk az alaphalmazok egyedi sajátosságaitól. Az ilyen módon szoros hasonlóságot mutató struktúrákat egymással *izomorf* struktúrának nevezik.

3. Mire jó mindez?

A modellek lehetővé teszik, hogy különféle nyelven fogalmazzuk meg ugyanazt a gondolatot. Amit nem értünk az egyik nyelven, esetleg jobban megértjük a másikon. A bevezetésben említettem, hogy bizonyos áramkörök úgy tekinthetők mint egyes absztrakt matematikai struktúrák modelljei. Ilyenek a digitális elektronika logikai áramkörei. A következőkben ezeket fogom fölhasználni fizikai modell gyanánt. Két logikai rejtvényt vizsgálok meg. Mindegyikhez szerkesztek egy digitális elektronikai modellt, és fölhasználom az iménti aritmetikai fordítást is.

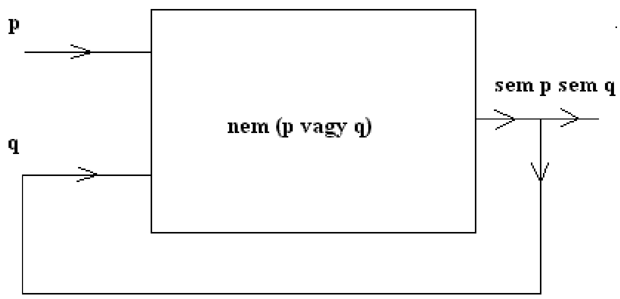
A maga korában nagyhatású középkori francia filozófustól, Jean (John). Buridantól (1300-1358) származik a következő rejtvény, melynek lényeg a következő.[1]

$p :=$ (p) Isten létezik.

$q :=$ (q) Sem (p) sem (q) mondat nem igaz.

Mit gondoljunk ennek a két mondatnak az igazságáról? Vajon melyik igaz közülük?

A q mondat 'vagy-nem' kapcsolatot állít, mivel a 'nem p és nem q' ekvivalens a 'nem (p vagy q)' logikai struktúrával. A vagy-kapcsolat egyik összetevője egy létezési állítás, a másik összetevője pedig a vagy-kapcsolat önmaga. Különös mondat ez, mert igazságértéke – ha egyáltalán van neki – önmagától is függ. Ezért biztosan nem fordítható le a szokásos logikai keretek között. A 'vagy' kapcsolat előbbi tagját képviselje 'p', az utóbit pedig 'q' formula. Tehát $p :=$ Isten létezik, $q :=$ Sem az első, sem a második mondat nem igaz. Tehát 'p' igaz ha Isten létezik, hamis más esetben, és 'q' igaz ha sem p sem q nem igaz. Szemléletesen ezt úgy fejezhetjük ki, hogy $|q| = |\text{nem}(p\text{vagy}q)|$, ahol az azonosság két oldalán formulák igazságértékei (faktuális értékei) szerepelnek. Az alábbi elektronikai modell fejezi ki p és q mondat logikai kapcsolatát.



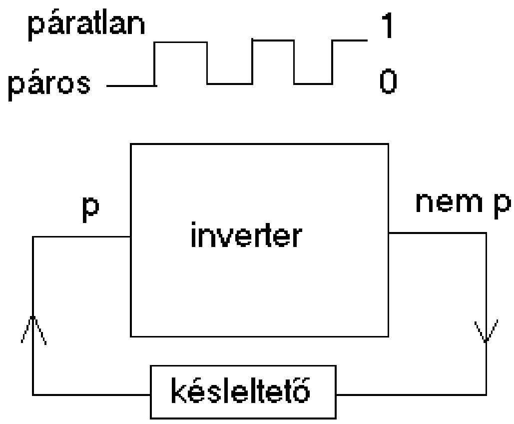
1. ábra. Buridan Isten érve

Visszacsatolással modelláltam q igazságértékének önmagától való függését. A p bemenet magas szintű ha Isten létezik, a másikra pedig az automata kimeneti állapota kerül vissza. Ennek felel meg a 'sem egyik sem másik nem igaz' mondat. A vagy-nem igazságfüggvénynek a '$(p+1) \times (q+1)$' az aritmetikai fordítása. Ekkor a visszacsatolást kifejezhetjük egy formulával. Legyen '$x \cong y$' kifejezés annak a jele, hogy $mod(x, 2) = mod(y, 2)$, azaz vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan. Ekkor az aritmetikai modell alapján lefordítva Buridan istenérvét az alábbi aritmetikai állítást kapjuk: $q \cong (p+1) \times (q+1)$. Ennek csak akkor van megoldása, ha p páratlan, de q páros. Visszafordítva ezt az eredményt azt kapjuk, hogy p igaz, viszont q hamis kell legyen, máskülönben ellentmondásba keveredünk. Pontosan ez derül ki az elektronikus modell kipróbálásával is. Ha p alacsony szintű, akkor nem kapunk stabil kimeneti jelet, a kimenet felváltva hol magas, hol alacsony szintű.

A közismert hazug paradoxonnak tekintsük az alábbi megfogalmazását:

$\boxed{\text{A bekeretezett mondat hamis.}}$

Vajon igaz-e amit a mondat állít? Ha igaz, akkor hamis, hiszen éppen ezt állítja, ha viszont hamis, akkor az ellenkezője felel meg a tényeknek, és mégis igaz. Ezzel azonban visszajutottunk a kiinduló ponthoz, és vég nélkül körbe forgunk. A bekeretezett mondat tehát ha igaz, akkor hamis – hiszen ezt állítja – ha viszont elfogadjuk az állítását, hogy hamis, akkor az ellenkezőjét kell vegyük, tehát igaz. Miképp modellálhatnánk ennek logikai szerkezetét? Vegyünk ismét egy fizikai modellt. A hagyományos villanycsengő a következő módon működik: ha a vezetéken átfolyik az áram, a csengő karja meghúz. Ha a csengő karja meghúz, megszakítja az áramkört, következésképpen nem folyik át áram a vezetéken. Ha nem folyik át áram a vezetéken, a csengő karja elenged, nem húz meg. Ha viszont nem húz meg, akkor záródik az áramkör, és az átfolyó áram hatására meghúz a relé. Ezek szerint ha a csengő karja meghúz, akkor nem húz meg, ám ha nem húz meg, akkor meghúz. Hasonlóan működnek az inverterből visszacsatolással fölépített generátorok is. Az inverter mindig az ellentettjét adja ki a bemenetére került jelnek. Ha magas szint kerül a bemenetére, akkor alacsony szintet ad ki, ha viszont fordítva a bemenete alacsony szintű, akkor magas szintű a kimenete. Mindez természetesen időben lejátszódó folyamat. Mi történik, ha az inverter kimenetét visszavezetjük – egy jelkésleltető tag közbeiktatásával – a bemenetére? Ekkor felváltva hol magas, hol alacsony szintű kimenőjelet kapunk, nem jön létre állandó stabil állapot. Az alacsony szintet a páros, a magas jelszintet a páratlan értéknek megfeleltetve, az inverter páros értékre páratlant ad ki a kimenetén, és fordítva, páratlan értékre párosat.



2. ábra. A hazug

A korábbi példához hasonlóan itt is az igazságértéket meghatározó ténynek tekintik magát az igazságértéket, egy szintre emelve azt, amiről szól a mondat és a mondat értékelését. Úgy is szokták ezt mondani, hogy nincs elválasztva ezeknél a példáknál (paradoxonoknál) a tárgynyelvi és a metanyelvi szint. Visszacsatoljuk a kimeneten lévő jelet a bemenetre, modellálva azt, hogy a bekeretezett mondat igazságértéke önmagától függ. Ezt az aritmetikai modellre fordítva láthatjuk, a 'hazug'-nak megfelelő automatának akkor lenne időben konstans kimeneti állapota, ha találnánk olyan egész számot amelyik páros is és páratlan. Csak ebben az esetben tudnánk megmondani, hogy a bekeretezett mondat igaz vagy hamis.

Jegyzetek

[1] "Twelfth sophism: GOD EXISTS AND SOME CONJUNCTION IS FALSE
The twelfth sophism is 'God exists and some conjunction is false'. Let us posit that this is written on the wall and that there exists no other proposition than it and its parts. And then it is asked whether it is true or false. We argue as before: for if it is true, then it follows that it is false; and if it is false, it seems to follow that it is true, for things are as it signifies, since its contradictory is false, namely this: 'God does not exist or no conjunction is false'. Solution: we should say that it is false, and the argument is solved as before. For although things are as it signifies according to its formal signification, yet, things are not as would be signified by the consequent implied by it and the case, and, assuming it to be named by the proper name A, its contradictory would be this: 'No God exists or no conjunction is false or A is not true'. Similar sophisms could be formed concerning disjunctive propositions, as 'A man is a donkey or some disjunctive is false', positing that there is no other disjunctive; and the same goes for exceptive [propositions], as for example, 'Every proposition other than an exceptive is true', positing that there are no propositions except this exceptive and two others, namely, that God exists and that a man is an animal; and thus also with exclusives, as when Socrates says: 'God exists' and Plato says: 'Only Socrates says something true', and nobody says anything else. Other sophisms can also be formed about the fact that it is possible for a proposition to be doubtful or not doubtful, known, or not known, believed or not believed." John Buridan, Summulae de Dialectica (Summulae), an annotated translation with a philosophical introduction by Gyula Klima, New Haven: Yale University Press, 2001, Sophismata, c. 8, p. 980.
Az alábbi helyeken további részletek olvashatók:
`http://www.seop.leeds.ac.uk/entries/buridan/`
`http://www.anoca.org/he/ass/john_buridan.html`