Modális fogalmak a véges automaták világában

András Ferenc

2010

1. Bevezetés

Többeknél fölmerült már, hogy a világ részben vagy egészében leírható véges automatákkal.[1] Ekkor a világra vonatkozó metafizikai hiteink nem közvetlenül, hanem az alkalmazott automata modellek fogalomrendszere segítségével közvetve, fogalmazhatók meg. A metafizikai realizmus nézőpontjából ez természetesen egyfajta Ersatz-metafizika (metafizika pótlék), amely csak akkor jogosult, ha képes megmagyarázni a 'lehetőség' és 'szükségszerűség' fogalmait az automaták fogalomrendszere alapján. Ehhez nyilvánvalóan nem használhatja a 'lehetséges világ' metafizikai fogalmát, de a hasonló 'szituáció' és a szituációk között értelmezett 'alternatíva' reláció technikai fogalmát igen, ha képes ezeket a fogalmakat visszavezetni az automaták működésére. Dolgozatomban megmutatom, hogy miképp értelmezhető a 'lehetőség' és 'szükségszerűség' mint metafizikai fogalom, a véges automaták fogalmaival. Alapgondolatom a következő: a lehetséges világok az automaták nyelvén az automaták állapotai, a lehetséges világok közötti alternatíva relációnak pedig az automaták állapotai közötti átmenetek felelnek meg, melyet az automaták definíciója határoz meg. Az alternatíva reláció formális tulajdonságait az automaták típusai határozzák meg. Szükség van tehát a véges automaták filozófiai szempontból történő felosztására, de ehhez előbb rögzíteni kell, hogy felfogásomban mi a véges automata.[2]

2. Mi a véges automata?

Véges automatán egyaránt értek matematikai struktúrákat, valamint fizikai entitásokat, elektronikus vagy mechanikus gépeket, melyeket az absztrakt matematikai fogalom fizikai modelljének, más szóval reprezentációjának tekintek. Ahol félreértésre adhat okot, ott hangsúlyozni fogom, hogy időben létező fizikai entitásra, vagy absztrakt matematikai struktúrára gondolok. Először a matematikai fogalmat tisztázom.

Az objektumok környezettel kapcsolatban lévő jellemzői az automaták bemenetei, kimenetük a vizsgált jellemző. Az analóg rendszerekhez hasonlóan osztályozom a véges automatákat és ezen keresztül a modellálandó objektumokat. Filozófiai megfontolásokból a szokásos terminológiától eltérek. A matematikában és elektronikában az automaták bemenetére egy nyelv karakterei vagy elektromos jelek kerülhetnek, és a kimenet értéke is csak ugyanaz a fajta dolog lehet. A filozófiai interpretáció céljának azonban jobban megfelel egy sajátos terminológia. Az én felfogásomban az automatáknak bemeneti és kimeneti jellemzői vannak, valamint belső állapota, amelyek formális nyelven függvények. E függvények értékei bármely időpontban állapotok. A determinisztikus véges automaták bemeneti és kimeneti jellemzői tehát olyan függvények, melyek az automaták neveihez minden időpontban hozzárendelik bemeneteinek és kimeneteinek állapotát. Adott esetben az automata átválthat egy másik külső (bemeneti vagy kimeneti) vagy belső állapotba. Egy állapotot a hozzá tartozó időadattal, vagy két egymást követő különböző állapotot eseménynek nevezek.

A véges automatáknak csak véges sok különböző belső és külső állapota van. A determinisztikus véges automata mindenkori jelen időhöz tartozó bemeneti és belső állapotai egyértelműen meghatározzák a jelen idejű kimeneti és következő időponthoz tartozó belső állapotokat. Ezt a függőséget függvények írják le. E feltevéseket a valóságos automaták – mint a digitális áramkörök – működése elég jól meg tudja közelíteni.

2.1. Automaták és a fekete dobozok

A fekete doboz elmélet alapgondolata az volt, hogy fontosabb a működés logikai-matematikai struktúrája, mint az hogy miként valósul meg a struktúra. Mérnöki-gyakorlati szempontból a fekete doboz bemenetei és kimenetei a környezettel való érintkezési pontok, melyeket mérhetünk, megfigyelhetünk. Egyszerű fekete doboz pusztán a kimenetek és bemenetek állapota közötti függvénnyel is leírható, a doboz belső állapotaitól nem függ. Bizonyos automaták, melyek szabályos működésüket bemeneti hatásoktól függetlenül végzik, bemenet nélküli fekete doboznak tekinthetők, tehát némely fekete doboznak figyelmen kívül hagyhatók a belső állapotai és a bemenetei is. (A figyelmen kívül hagyható állapotokról feltételezzük, hogy állandóak, azaz az egyelemű halmaz reprezentálja őket.) Amennyiben még a kimenetei is hiányoznak egy automatának, akkor ahhoz a feltételezéshez jutunk, hogy az üres halmaz is egyfajta automata, fekete doboz. A kimeneti jellemzők szolgáltatják az eredményt, amiért egyáltalán alkalmazzuk a fekete doboz modellt, így egy olyan automata, amelyiknek nincs kimenete, a gyakorlatban haszontalan, filozófiailag pedig értelmetlen. Ezért az én felfogásom szerint egy véges automatának mindig van legalább egy kimeneti jellemzője. (Hilary Putnam ezzel szemben megenged kimenet nélküli véges automatákat is.)[3]

2.2. Diszkrét időpontok

Feltételezem, hogy az időpontok lineáris sorozata T halmaz elemeiből áll. A T halmazon értelmezett '$<$' bináris reláció aszimmetrikus és tranzitív, és T bármely két eleme között vagy fönnáll, vagy az inverze áll fönn. T halmaznak van egymástól különböző minimális és maximális eleme, és minden a maximális elemet megelőző elemnek van egyértelmű rákövetkező eleme. Bármely két $t_i, t_j \in T$ időpont vagy egyidejű ($t_i = t_j$ és ekkor $i = j$) vagy t_i korábbi mint t_j ($t_i < t_j$ és ekkor $i < j$) vagy későbbi egymásnál (ekkor nem egyidejű és nem korábbi). Bármely diszkrét időpontra egyértelműen meghatározott a következő diszkrét időpont, tehát t_n-re a következő időpont $t_n + 1$. A diszkrét időpontokat egész számokkal ábrázolva $t_{n+1} = t_n + 1$. A jelent t_0-val, a jelent megelőző időpontokat negatív, a jövőbeli időpontokat pozitív számokkal jelölöm.

2.3. Matematikai definíció

A következőkben a Mealy-féle véges automaták fogalmát alkalmazom. Legyenek valamely t időpontban az automata bemeneti, kimeneti és belső állapotai $x(t), y(t), a(t)$, a t után következő diszkrét időpontban az automata belső állapota $a(t+1)$. Legyenek X, A és Y a véges automata összes lehetséges bemeneti, belső és kimeneti állapotainak nem üres halmazai. A Mealy-automata egy $\langle A, X, Y, \delta, \gamma \rangle$ rendezett ötös, ahol a $\delta : A \times X \to A$ és a $\gamma : A \times X \to Y$ függvényeket 'belső állapot átmeneti' illetve 'kimeneti függvény'-nek nevezem. ('$f : D \to I$' azt jelenti, hogy f eleme a D-ről I-be képező függvények osztályának, '$\times$' pedig a Descartes szorzat jele.) Az időbeli összefüggések az alábbi formulákkal jellemzettek:

$$(1) \quad y(t) = \gamma(a(t), x(t))$$

$$(2) \quad a(t+1) = \delta(a(t), x(t))$$

Felfogásomban a Mealy gépek olyanok, hogy (1.) a jelen idejű kimeneti állapot függ a jelen idejű belső és a jelen idejű bemeneti állapottól, (2.) a következő belső állapot pedig a jelen idejű belső és bemeneti állapottól. Tehát γ (kimeneti függvény) a jelent, míg δ (belső állapot átmeneti függvény) a jövőt határozza meg. Az δ és γ függvények minden $a(t), x(t)$ (belső állapot, bementi állapot) párra értelmezettek. Az automata az iniciális állapotban kezdi meg működését. Mealy féle automaták esetén – mint amilyeneket most tárgyalunk – az automatának csak az iniciálist követő állapotában meghatározott az állapota a γ és δ függvények által. Ezért az automaták kezdeti állapotát – amennyiben nem egyértelmű – külön kikötés rögzíti.

in_1	in_2	out_1
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. táblázat. ÉS-nem kapu

A véges automaták a $\langle A, X, Y, \delta, \gamma\rangle$ rendezett ötös helyett formulák halmazával is leírhatók. Pl. a NAND (és-nem) kapu esetén ez egyszerű, mert nem kell foglalkozzunk a belső állapotokkal. A NAND kapu bemeneti (in_1, in_2) és kimeneti (out_1) állapota csak 0 vagy 1 értéket vehet föl az alábbi táblázattal meghatározott módon. A 1. táblázat a γ függvényt határozza meg. Logikai formulákkal mindez valamivel terjengősebb:

$$\forall t.1 = in_1(t)\nabla 0 = in_1(t)$$

$$\forall t.1 = in_2(t)\nabla 0 = in_2(t)$$

$$\forall t.1 = out_1(t)\nabla 0 = out_1(t)$$

$$\forall t.(0 = in1(t)\,\&\,0 = in1(t)) \rightarrow 1 = out1(t)$$

$$\forall t.(0 = in1(t)\,\&\,1 = in1(t)) \rightarrow 1 = out1(t)$$

$$\forall t.(1 = in1(t)\,\&\,0 = in1(t)) \rightarrow 1 = out1(t)$$

$$\forall t.(1 = in1(t)\,\&\,1 = in1(t)) \rightarrow 0 = out1(t)$$

Ilyen módon bármilyen véges automata függvényekkel adott meghatározása átalakítható egyenértékű formula halmazzá. Erre a lehetőségre építek a későbbiekben. A következőkben a Mealy gépeket egyszerűen véges automatáknak vagy automatáknak nevezem.

Véges automaták kimenetei összeköthetők bemenetekkel, ha a kimeneti jellemzők értékkészlete részhalmaza a bemeneti jellemzők értékkészletének. Az értékkészletek meghatározzák az összes lehetséges bemeneti és kimeneti állapotot. Két összekapcsolt véges automata maga is egy újabb véges automatát alkot. Véges automaták kiegészítve végtelen memóriával és memória író/olvasó egységgel Turing gépet alkotnak, valamint a sejt-automaták is definiálhatók véges automaták segítségével. A matematikában és számítástudományban a formális nyelveket osztályozzák különféle absztrakt automaták képességei alapján. Mi most ezekkel a távolba mutató összefüggésekkel nem foglalkozunk.

3. Az automaták típusai

Egy fizikailag létező automata működése többféle szempontból is osztályozható, és többféle absztrakt automata fizikai megvalósításának is tekinthető. „Az, hogy egy a gyakorlatban előforduló automata determinisztikus vagy sztochasztikus-e, nem annyira az automatán múlik, inkább attól függ, hogy milyen modellt használva, milyen nézőpontból, milyen fokú pontosságra törekedve, írjuk le az automata működését."[4] A következőkben csak olyan automatákkal foglalkozom, melyekről feltehető hogy az iniciálist követő állapotokban teljesen meghatározott (determinisztikus) a működésük, és csak véges sok különböző állapotba kerülhetnek.

3.1. A külső jellemzők száma

Az automatáknak több bemenete és kimenete is lehet, ám gyakran az egyszerű matematikai modell kedvéért a bemenetek, kimenetek egyazon időpontokhoz tartozó sorozatai helyett röviden 'bemenet'-ről és 'kimenet'-ről fogok beszélni. Ahol szükséges, ott az i-ik bemenetet x_i-vel és a j-ik kimenetet y_j-vel ábrázolom. Egy véges automatának mindenképpen van kimeneti jellemzője.

3.2. Iniciálisan összefüggő automata

Feltételezzük, hogy valamilyen bemeneti állapot sorozatra az automata az összes lehetséges belső és kimeneti állapotot legalább egyszer fölveheti. Röviden, nincsenek fölösleges elemei A és Y halmazoknak. Az ilyen automatákat 'iniciálisan összefüggő automaták'-nak nevezik.

3.3. Generátorok, órák

Ha X – a bemeneti állapotok halmaza – egyelemű, akkor az automatát generátornak nevezem. Ilyenkor az X halmazt el is hagyhatjuk, mivel az automata viselkedését a $\delta = A \to A$ és a $\gamma = A \to Y$ függvények teljesen leírják. A generátornak tekinthető automaták bemeneti hatásoktól függetlenül hoznak létre kimeneti állapotokat vagy állapotsorozatokat. A generátorok függetlenek környezetüktől.

3.4. Kombinációs automata

'Kombinációs automata' az olyan automata, amelyik tetszőleges bemeneti állapotra mindig a γ függvény által meghatározott egyértelmű kimeneti állapotot hoz létre, függetlenül a belső állapottól. Ilyen esetben a belső állapotok A halmaza egyelemű, és elhagyható. Ezért a kombinációs automaták mindig leírhatók a belső állapotok figyelembe vétele nélkül, csak a kimeneti és bemeneti állapotok közötti függvénnyel.

3.5. Állandósult állapotok

Vannak olyan automaták is, melyek egy kiterjesztett értelemben szintén kombinációs struktúrát alkotnak. Ezek működése olyan, hogy a belső állapotuk csak rövid távon befolyásolja működésüket, de hosszabb idő eltelte után mindig a bemenetek által egyértelműen meghatározott állapotba kerülnek. Ezért ezek működése ebben a későbbi állandósult állapotban a kombinációs struktúrákhoz hasonlóan leírható pusztán a bemenet és kimenet közötti függvény kapcsolattal. 'Állandósult állapotban kombinációs automata'-nak nevezem az olyan automatát, amelyik egy meghatározott $0 < \Delta$ időtartam után mindig kombinációs automataként viselkedik, és az automata kimenete függetlenül a belső állapottól a bemenet által egyértelműen meghatározott.

3.6. Sorrendi struktúrák

Azokat az automatákat, amelyek nem kombinációs struktúrájúak, sorrendi automatáknak (struktúráknak) nevezzük. A legtöbb fizikailag létező automata sorrendi struktúra. Néha emlékező automatáknak nevezik ezeket, mert külső hatásokra a korábban ért hatásoktól függően válaszolnak.

3.7. Ciklikus automaták

Az olyan automaták, amelyek bármely állapotukat egy vagy több (de véges sok) átmenet után akárhányszor fölvehetik, ciklikus automaták. Ellenkezőleg, ha egy automata bármely állapotából csak kiindulni lehet, de nem megérkezni, vagy csak megérkezni lehet de nem kiindulni, akkor az automata aciklikus. Tehát az aciklikus automata nem tartalmaz ciklusokat, azaz nem lehet visszatérni kétszer egyazon állapotba néhány átmenet után. (Ezek Herakleitosz automatái.) A nem ciklikus automatáknak több fajtája van. Feltételesen ciklikus (cciklikus) egy automata akkor, ha mindaddig, amíg nem kerül egy speciális belső állapotba, akárhányszor újra és újra vissza tud térni valamely állapotába. Átmenetileg ciklikus (tciklikus) egy automata, ha képes visszatérni egyazon állapotba, de $1 \leq n$ periódus (diszkrét időpont vagy ütem) után aciklikus automataként viselkedik. Egy automata lehet feltételesen ciklikus és átmenetileg ciklikus egyszerre, de egy ciklikus automata sem nem feltételesen sem nem átmenetileg ciklikus gép.

A fizika nézőpontjából a ciklikus automaták reverzibilis, míg a nem ciklikus automaták irreverzibilis rendszerek. Némelyik sorrendi automata ciklikus automata, némelyik nem, de minden kombinációs struktúrájú automata ciklikus, és minden nem ciklikus automata sorrendi struktúra.[5]

4. Filozófiai interpretáció

Az automaták egyaránt adekvát modelljei lehetnek formális vagy formalizált elméleteknek vagy fizikai entitásoknak. Mindaz, ami kifejezhető a kijelentéslogika szintjén modellálható véges automatákkal, mivel az igazságfüggvények egyszerűen szimulálhatók automatákkal, de most csak konkrét (anyagi) létezők modelljeivel foglalkozom. Mai fizikai tudásunk szerint az alapvető fizikai jellemzők – mint a tömeg, erő, hőmérséklet, töltés, különösképpen a tér és az idő is – véges és kvantumos természetűek, ezért a tárgyak jó részének adekvát modelljei lehetnek a valószínűségi vagy determinisztikus véges automaták.[6] Bizonyos tárgyak helyrehozhatatlanul megsérülhetnek vagy megsemmisülhetnek, és ezért csak egyszer keletkeznek, következésképpen ezek modelljei csak nem ciklikus automaták lehetnek. Egy laprugó mindaddig visszatér eredeti állapotába, amíg túl nem terheljük, és ezért elgörbül vagy eltörik. Tehát a laprugó feltételesen és átmenetileg ciklikus automata. Az élőlények az életfeltételek és az életkor szempontjából ehhez hasonlóak. A legtöbb tárgy mélyebb elemzésben sorrendi struktúraként viselkedik, mert a múltban történtektől függően válaszol jelenbeli eseményekre. Nyitott kérdés azonban, hogy vajon minden anyagi tárgy iniciálisan összefüggő automatának tekinthető-e?[7]

Legyen m olyan véges automata, melyet egy fizikai tárgy, élőlény viselkedése modelljének tartunk. Az objektum és a neki megfelelő m automata is mindenkor meghatározott környezetben és adott belső állapotban van. Az objektum viselkedését meghatározott környezetben az automata bemeneti állapotaira adott kimeneti válaszai fogják szimulálni. Ez azt jelenti, hogy az objektum viselkedése az objektum környezetében hasonlít az automata viselkedéséhez az automata környezetében. Az automata meghatározása megadja, hogy a gép bármely belső állapotában, bármely bemeneti állapot hatására milyen kimeneti állapotba kerül a gép. A modell bemenetét az objektum környezetének tekintve és a modell kimeneti állapotát az objektum állapotának tekintve, a modell lehetővé teszi, hogy előre lássuk, hogy különböző feltételezett hatásokra miképp reagál a modellezett objektum. Ilyen módon ellenőrizhetjük a modell, a szimuláció helyességét. Csak ott használhatók eredményesen a véges automata modellek, ahol jól meghatározhatók a bemeneti hatások és kimeneti válaszok, és a vizsgált jelenségre oksági magyarázatot keresünk.

5. Kapcsolat a logikával

Azt, hogy valamely o objektum t_1 diszkrét időpontban F tulajdonságú, egy egyszerű formulával kifejezhető: $F(o, t_1)$. A klasszikus elsőrendű logikában megadva a formulák interpretációját az meghatározza az '$F(o, t_1)$' formula igazságértékét. Az automata modellek világában $F(o, t_1)$ úgy fejezhető ki, hogy az o-nak megfeleltetett automata adott kimenete meghatározott állapotban van t_1 ütemben. Ennek megfelelően az objektumnak megfeleltetett automata éppen azokra az időpontokra fog egy meghatározott kimeneti állapotot adni, amikor az állítás igaz, és más kimeneti állapotban lesz, amikor az állítás hamis. Mindez módosul, amikor arról beszélünk, hogy lehetséges, hogy o objektum F tulajdonságú t_1 időpontban. Ez lefordítva az automata modell nyelvére azt jelenti, hogy lehetséges, hogy az automata valamely kimenete adott állapotú t_1 időpontban. Az automata nem kerülhet bármilyen belső állapotba a külső hatásokra, hanem csak meghatározott állapotba, attól függően, hogy előtte milyen belső állapotban volt, és azután milyen külső hatás érte. Az automata szabályszerű működése behatárolja a gép lehetséges válaszait. A véges automaták világában lehetőség az, amely állapotot az automata egyáltalán fölvehet, lehetetlenség pedig az összes többi állapot. Az egyes automaták tulajdonságaitól függ, hogy valamely konkrét állapotból kiindulva mely állapotok az elérhetők, azaz melyek lehetségesek onnan nézve, és melyek nem. A lehetséges szituációknak (világoknak) tehát az automaták állapotai, és a modális logikában a lehetséges világok között értelmezett alternatíva relációnak pedig az automata állapotai közötti átmenetek felelnek meg. Ezeknek az átmeneteknek épp úgy vannak formális tulajdonságaik, mint a modális szemantika alternatíva relációjának. A lényeges gondolat ebben a felfogásban az, hogy amíg a modális logikában önkényesen határozzuk meg az alternatíva reláció tulajdonságait (reflexív, szimmetrikus, tranzitív) addig az automata értelmezés esetén az automaták tulajdonságai határozzák meg az alternatíva reláció jellegét. Ez visszatérve a modellek világából a valóságba azt jelenti, hogy a világban lévő egyedi objektumok tulajdonságai határozzák meg a lehetőség formális tulajdonságait a való világban.

6. Egy példa

Legyen valamely o objektum – pl. Wittgenstein nevezetes piszkavasa – t-kor 'vörös' és 'forró' tulajdonságú. Legyen modellálható o objektum viselkedése egy m véges automatával. Az automata bemenetei a piszkavas tűztől való távolsága és a környező fény spektruma. Az automata kimenetei megfelelnek az o objektum 'szín' és 'hőmérséklet' jellemzőinek. Az automata y_f kimenete a tárgy szinét, y_g kimenete a hőmérsékletét jeleníti meg. A 'vörös' és 'forró' vörös predikátumnak feleljen meg m automata w és v kimeneti állapota. Bevezetve az alábbi interpretációkat:

$F(x,t) =:$ x vörös t-kor, $G(x,t) =:$ x forró t-kor

$y_f(x,t) =:$ x színe t-kor, $y_g(x,t) =:$ x hőmérséklete t-kor

$w =:$vörös, $v =:$forró

Két interpretált formulát kapunk, ahol az ekvivalencia jobb oldala az automata működésére vonatkozik:

$$F(o,t) \leftrightarrow w = y_f(m,t)$$

$$G(o,t) \leftrightarrow v = y_g(m,t)$$

Hasonló formulákkal leírható, hogy a piszkavas némelykor hideg, meleg, fekete vagy éppen éjjel láthatatlan. Tegyük fel a következőket. A piszkavasnak csak három hőmérséklete lehet: forró, meleg és hideg, és nappali fényben két fajta színe: fekete, ha hideg vagy meleg, és vörös, ha forró. A piszkavas éjjel csak forró állapotban látható, ekkor a színe vörös. Nem képes azonnal lehűlni vagy fölmelegedni, viszont a színe egyszerre változik a megvilágítással. (Analóg automatával pontosabban szimulálható lenne a viselkedése.) Az automata két táblázattal meghatározott. Az első oszlop az automata bemeneteit, azaz a tűztől való távolságot és a megvilágítást (nappal vagy éjjel), a felső sor pedig a jelen idejű belső állapotokat tartalmazza. A belső állapot a piszkavas hőmérséklete.

δ	forró	meleg	hideg
nulla, éjjel	forró	forró	meleg
közel, éjjel	meleg	meleg	meleg
távol, éjjel	meleg	hideg	hideg
nulla, nappal	forró	forró	meleg
közel, nappal	meleg	meleg	meleg
távol, nappal	meleg	hideg	hideg

2. táblázat. Piszkavas - belső állapotok

Az automatának két kimenete van, melyek közül az első megegyezik a piszkavas hőmérsékletével, a második pedig a tárgy színe. Ezt a második kimenetet írja le az alábbi függvény.

γ	forró	meleg	hideg
nulla, éjjel	vörös	vörös	láthatatlan
közel, éjjel	láthatatlan	láthatatlan	láthatatlan
távol, éjjel	láthatatlan	láthatatlan	láthatatlan
nulla, nappal	vörös	vörös	fekete
közel, nappal	fekete	fekete	fekete
távol, nappal	fekete	fekete	fekete

3. táblázat. Piszkavas - kimeneti állapotok

Az olvasóra bízom annak belátását, hogy ez egy állandósult állapotban kombinációs automata. A modell működő verziója letölthető innen:

`http://ferenc.andrasek.hu/modellek/poker.xls`

A modell képes megválaszolni bizonyos kérdéseket a piszkavas és környezete közötti hatásokról, de számos kérdésre nem ad választ. Nem mondja meg, hol van a piszkavas; miképp változik a formája; mikor keletkezett, és milyen környezeti hatásokra szűnne meg létezni. Nem tudjuk eldönteni a modell alapján, hogy ha eltört, akkor végleg megszűnik-e létezni, vagy újra létezik, ha összehegesztjük a kettétört vasat? Egy komplikáltabb modell válaszolhatna ezekre a kérdésekre olyan módon, hogy speciális irreverzibilis állapot reprezentálná a piszkavas megsemmisülését.

Figyeljük meg, hogy a modell alapján lehetetlen, hogy az objektum időben és térben távol a tűztől forró legyen, és fordítva, hideg legyen kevéssel a tűzbe tétele után. Gondoljuk végig a modell segítségével, hogy a piszkavas egy kellően hosszú véges idő alatt számos állapotváltozáson átmehet, de nem bármilyen sorrendben. A modell meghatározza a piszkavas összes lehetséges történetét (esemény sorozatát) egy véges időtartományon belül. Az összes lehetséges történet között lesz egy, amelyik megfelel a piszkavas valóságos történetének. Ezt a függvényt csak részleteiben ismerjük. Nem biztos, hogy ismerjük vagy bármilyen módon megismerhetjük vagy legalább kikövetkeztethetjük a piszkavas összes múltbeli állapotát. Hasonló igaz a jövőbeli állapotokra is. A modell nem teszi lehetővé, hogy kikövetkeztessük a piszkavas összes jövőbeli állapotát, csak annyit tesz bizonyíthatóvá, hogy kizárjunk bizonyos időbeli függvényeket, bizonyos állapotsorozatokat. Pl. a piszkavasnak nincs olyan lehetséges története, hogy az egyik pillanatban forró, a következő pillanatban pedig hideg, vagy fordítva. Ugyanakkor a modell alapján a piszkavas összes jövőbeli történetének halmaza meghatározott egy véges időtartományon belül. Mivel ennek a halmaznak van egy eleme, amelyik megfelel a piszkavas jövőbeli történetének, ezért van igazságértéke a piszkavas jövőbeli állapotára vonatkozó olyan kijelentéseknek, melyek értelmezhetőek a modell keretei között. Az igazságérték létezik, időtlen, de nem vezethető le a modell segítségével, ezért a piszkavas jövője nem predeterminált.

7. Az alternatíva reláció meghatározása

Egy $M = \langle A, X, Y, \delta, \gamma \rangle$ absztrakt automatának csak véges sok a δ és γ függvények által meghatározott különböző állapota van. Egy ilyen w_i állapot az egyazon időpontban összetartozó bemeneti, belső és kimeneti állapotok címkéje. Ezen címkék véges halmaza: $W = w_1, w_2, w_3, \ldots w_i \ldots$ Az automata egy t_i időponthoz tartozó állapotleírása$\rho(t_i, w_i)$, ahol tehát 'w_i' egy név – egy címke – 't_i' egy időpont, míg '$\rho(t_i, w_i)$' egy mondat, amely leírja M automata bemeneti, belső és kimeneti állapotát t_i időpontban.

M absztrakt automata definíciója meghatároz kétfajta bináris relációt. Mindkét reláció alternatívákat határoz meg, az egyik az állapotok (címkék), másik az állapotleírások (szituációk) halmazán. A definíciók az alábbiak:

$$\begin{aligned} A_M(w_i, w_j) := x_i \text{ bem.jellemző } x_j - \text{re való változásának hatására} \\ M \text{ automata } w_i = \langle x_i, a_i, y_i \rangle \text{ állapotból} \\ w_j = \langle x_j, a_j, y_j \rangle \text{ állapotba kerül} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{ahol: } x_i, x_j \in X, a_i, a_j \in A, y_i, y_j \in Y, a_j = \delta(x_i, a_i), y_j = \gamma(x_j, a_j)$$

Kombinációs automaták esetén A_M reláció szimmetrikus; ha az automata nem aciklikus, akkor A_M reflexív. Legyen $\breve{A_M} := A_M$ tranzitív lezártja. $\breve{A_M}$ reláció azt mutatja meg, hogy az automata valamely állapotából néhány lépés után milyen más állapotokba kerülhet. Ciklikus automaták esetén $\breve{A_M}$ reláció szimmetrikus és ezért reflexív is.

R_M reláció M automata állapotleírás neveinek halmazán értelmezett az alábbiak szerint:

(4) $\quad R_M(\langle t_1, w_1\rangle, \langle t_2, w_2\rangle) := t_2 = t_1 + 1 \,\&\, A_M(w_1, w_2)$

Szavakkal kifejezve: $R_M(\langle t_1, w_1\rangle, \langle t_2, w_2\rangle)$ pontosan akkor ha az automata t_1-ben lévő w_1 állapotából kiindulva van olyan bemeneti állapot, hogy az automata a következő időpontban w_2 állapotba kerül.

Nevezzük az $\langle$időpont, állapotnév$\rangle$ párokat 'szituáció'-nak, és mondjuk azt, hogy $\langle t_i, w_i\rangle$ szituációnak $\langle t_j, w_j\rangle$ az alternatívája pontosan akkor ha $R_M(\langle t_1, w_1\rangle, \langle t_2, w_2\rangle)$. Legyen egy olyan fizikailag létező véges automatánk, melynek a matematikai modellje M. Vegyük az M-hez tartozó szituációk összes olyan sorozatát, ahol a sorozat tagjai rendre egymás alternatívái. Tehát ha $\langle t_1, w_1\rangle$ után $\langle t_2, w_2\rangle$ következik, akkor $R_M(\langle t_1, w_1\rangle, \langle t_2, w_2\rangle)$.

Mivel korábbi feltevésünk szerint T – az időpontok halmaza – véges, ezért az összes lehetséges szituáció-sorozatok száma is véges. Az összes sorozat tartalmazza az automata összes lehetséges állapotváltozását, másképp mondva átmenetét az egyik szituációból a másikba T időtartományon belül. A szituáció-sorozatok halmazát Ψ-el jelölöm. Ψ tehát az automata összes lehetséges állapotváltozását, összes lehetséges történetét tartalmazza. A szituáció sorozatok között lesz egy és csak egy olyan $\varphi_{reality}$ sorozat, hogy minden $\langle t_i, w_i\rangle$ szituáció pontosan akkor a tagja $\varphi_{reality}$ sorozatnak, ha $\rho(t_i, w_i)$. $\varphi_{reality}$ sorozat tehát M fizikailag létező automata T időbeli valóságos történetét tartalmazza, és nyilván $\varphi_{reality} \in \Psi$. $\varphi_{reality}$ sorozat két részre bontható. Az első része az automata kezdeti állapotától a jelenbeli állapotáig tart – jelölje ezt φ_0 – a második része az automata jövőbeli állapotait tartalmazza. (A jövőbeli állapotokat – a bemenet nélküli generátorokat kivéve – nem ismerjük, a jelenbeli vagy régebbi állapotokat részben vagy teljesen ismerhetjük.) Vegyük Ψ halmaz olyan Ψ^* szűkítését, amelyik az absztrakt automata összes olyan és csak olyan történetét tartalmazza, amelyik a jelen időpontig megegyezik M automata tényleges történetével, azaz φ_0-al. Nyilvánvalóan:

(5) $\quad \Psi^* \subseteq \Psi$ és $\varphi_0, \varphi_{reality} \in \Psi^*$

Most már rendelkezésünkre állnak azok a fogalmak, melyekkel meghatározhatjuk a lehetőség és szükségszerűség fogalmát az automaták világában.

8. Lehetőség a véges automaták világában

Legyen L a véges automatákat leíró nulladrendű nyelv (kijelentéskalkulus). L nyelv atomi mondatai M véges automata állapotleírásai, molekuláris mondatai az atominak tekintett állapotleírásokból logikai konnektívumokkal képzett mondatok. A nulladrendű nyelvek negációteljesek, azaz megadható hozzájuk atomi mondatok egy olyan G halmaza, hogy bármely formulájuk, vagy a formula tagadása, levezethető a G halmazból. Ezek alapján L nyelv valamely x nevű mondata igaz pontosan akkor, ha az x nevű mondat levezethető G-ből.

Legyen $\rho(S_M)$ egy $M = \langle A, X, Y, \delta, \gamma \rangle$ automatára vonatkozó L nyelvű atomi vagy molekuláris mondat, S_M pedig a mondat neve. A '$M = \langle A, X, Y, \delta, \gamma \rangle$' kifejezést és a $\varphi_{reality}$ sorozatot most úgy értjük, mint logikai formulák halmazát, amely leírja az absztrakt automata működését, illetve a tényleges történetét. (Alkalmazhatnék a formulák halmazára külön jelölést pl. $M = \langle A, X, Y, \delta, \gamma \rangle_F$ és $\varphi_{realityF}$, de ez csak nehezítené a megértést.) Bevezetem az alábbi meghatározásokat:

(6) $\quad \Diamond S_M/\Psi^* := \exists s(s \in *\Psi^* \,\&\, (\langle A, X, Y, \delta, \gamma \rangle \cup \{s\} \vdash \rho(S_M)))$

(Valamely M automatáról szóló mondat lehetséges hogy igaz Ψ^* lehetséges történetben pontosan akkor, ha az automata definíciójából valamely s $s \in \Psi^*$ mondat segítségével levezethető.)

(7) $\quad$ Igaz-$S_M/\varphi_{reality} := (\langle A, X, Y, \delta, \gamma \rangle \cup \varphi_{reality} \vdash \rho(S_M)))$

(Valamely M automatáról szóló mondat igaz $\varphi_{reality}$ történetben pontosan akkor, ha az automata definíciójából $\varphi_{reality}$ állapot sorozat segítségével levezethető.)

(8) $\quad \Box S_M/\Psi^* := \forall s(s \in *\Psi^* \to (\langle A, X, Y, \delta, \gamma \rangle \cup \{s\} \vdash \rho(S_M)))$

(Valamely M automatáról szóló mondat szükségszerűen igaz Ψ^* lehetséges történetben pontosan akkor, ha az automata definíciójából minden $s \in \Psi^*$ mondat segítségével levezethető.)[8]

A fenti meghatározások szerint csak egy jövőbeli esemény lehet kontingens, a jelen és a múlt szükségszerű. Ez azért van így, mert az automata működés szempontjából a múlt és a jelenbeli állapot megváltoztathatatlan, csak a jövő nyitott. Viszont az automata bármelyik jelenbeli vagy múltbeli állapota egy még korábbi állapotból nézve lehet kontingens vagy szükségszerű attól függően, hogy az automata miképp működik. Tehát a véges automaták világában:

(1) Minden ami elmúlt lehetséges, mert megtörtént, és szükségszerű, mert megtörtént és nem lehet meg nem történtté tenni. Mivel a jelen is megtörtént, és a múlthoz hasonlóan nem lehet meg nem történtté tenni, ezért a jelen is szükségszerű;[9]

(2) Egy jövőt leíró mondat lehetséges hogy igaz, ha a jelenből kiindulva van a körülményeknek olyan alternatívája, amely igazzá teszi. Egy jövőt leíró mondat szükségszerű hogy igaz, ha a jelenből kiindulva a körülmények minden alternatívája igazzá teszi.

(1) és (2) igazolja az alábbi Diodórosz Kronosznak tulajdonított, sokak által tévesen ellentmondásosnak vélt három állítást:

(A) A múltra vonatkozó minden igaz kijelentés szükségszerű.

(B) Lehetséges kijelentésből logikailag nem következik lehetetlen kijelentés.

(C) Egy jövőre vonatkozó kijelentés, amely nem igaz, még lehetséges hogy igaz.

Igazoljuk a fenti három mondat kielégíthetőségét egy modell megadásával. A piszkavasat nappal t_{-5} időpontban vettem, amikor is hideg volt és fekete színű. A mai napig csak kétszer tettem egy pillanatra a tűzbe, így mostanáig nem volt forró, csak meleg t_{-3} és t_{-1} időpontokban. Most épp meleg, mert rövid ideig a tűzben volt, de tegyük fel, hogy a jövőben többet nem használom, így hideg marad. Igazolható-e a korábban bemutatott piszkavas automata modell segítségével, hogy mégis lehetséges, hogy forró valamikor? $\varphi_{reality}$ sorozatot az alábbi táblázat mutatja. (A piszkavas színeitől most eltekintettem.)

hideg	hideg	meleg	hideg	hideg	meleg	hid.	hid.	hid.	hid.
távol	közel	tűzben	távol	közel	tűzben	közel	tvl.	tvl.	tvl.
t_{-5}	t_{-4}	t_{-3}	t_{-2}	t_{-1}	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4

4. táblázat. A piszkavas teljes története

φ_0 ennek egy részlete:

hideg	hideg	meleg	hideg	hideg	meleg
távol	közel	tűzben	távol	közel	tűzben
t_{-5}	t_{-4}	t_{-3}	t_{-2}	t_{-1}	t_0

5. táblázat. A piszkavas története a jelenig

φ_1 az alábbi sorozat:

hideg	hideg	meleg	hideg	hideg	mlg.	hid.	mlg.	fr.	mlg.
távol	közel	tűzben	távol	közel	t.ben	köz.	t.ben	t.ben	táv.
t_{-5}	t_{-4}	t_{-3}	t_{-2}	t_{-1}	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4

6. táblázat. A piszkavas egy lehetséges története

A modell alapján belátható, hogy $\varphi_1 \in \Psi$. Mivel φ_1-nek kezdő sorozata φ_0, ezért $\varphi_1 \in \Psi^*$. Vegyük azt a mondatot, hogy a piszkavas hideg t_2 -kor. Ez egy múltra vonatkozó állítás, amely $\varphi_{reality}$ alapján igaz. Vajon szükségszerűen igaz-e? Mivel ezt a mondatot φ_0 önmagában is igazolja, ezért Ψ^* minden eleme igazolja, tehát a 'piszkavas hideg t_2 kor' mondat szükségszerűen igaz. Nyilvánvalóan erre következtetnénk más múltbeli vagy jelenbeli igaz mondatok esetén is. Ezzel (A) igazolást nyert.

Most vegyük azt a mondatot, hogy forró t_3-kor. Ez hamis $\varphi_{reality}$, szerint, viszont igaz φ_1-ben. Ekkor viszont van olyan eleme Ψ^*-nak ami igazolja, hogy a piszkavas forró lehet t_3-kor, miközben valójában nem forró t_3-kor. Nyilvánvalóan erre következtetnénk más jövőbeli igaz mondatok esetén is. Ezzel (C) igazolást nyert. Figyeljük meg, hogy a két mondat esetén a szükségszerűség relatív a jelenhez (t_0-hoz) képest. A jelent hátrább tolva 'a piszkavas hideg t_2 kor' mondat szükségszerűből esetlegessé válik, és előre tolva, 'a piszkavas forró t_3-kor' mondat lehetségesből lehetetlenné válik.

Ha p lehetetlen kijelentés, akkor nincs olyan $\varphi_i \in \Psi^*$ sorozat, melyből p az automata modell segítségével levezethető. Ha viszont bármely q lehetséges kijelentésből levezethető volna p, akkor q-nak kéne levezethetőnek lennie valamely $\varphi_i \in \Psi^*$-ből. Ekkor viszont p is levezethető lenne $\varphi_i \in \Psi^*$-ből, ami ellentmondás, és ezért q nem lehetséges. Mivel p és q tetszőleges mondat volt, ezzel (B) is igazolást nyert.

9. Összefoglalás

A bolygók számának esetlegességéről vagy a Hajnalcsillag és az Alkonycsillag szükségszerű azonosságáról való filozófiai elmélkedések kevéssé szerencsések, mert keveset tudunk arról, hogy miképp alakult volna a Naprendszer története, ha a Nagy Programozó másképp határozza meg a kezdeti feltételeket. Amit tudunk, az sem modellálható egyszerű matematikai-logikai eszközökkel. Sokkal jobban megragadhatók és leírhatóak a közepes méretű fizikai tárgyakra, gépekre vagy élőlényekre vonatkozó természeti törvények. Az, hogy lehetetlen, hogy a piszkavas hideg marad miután jó sokáig a tűzben hagytuk, sokkal jobban védhető álláspont, mint hogy lehetetlen, hogy a Vénusz helyett két bolygó legyen ott az égen. Arisztotelész bölcsen tette hogy ezekre a dolgokra koncentrált, még akkor is, ha nem volt tudatában annak, hogy ezek a létezők nem jellemzők az univerzumra. A metafizika nézőpontjából az automaták elmélete teszi lehetővé a metafizikai szükségszerűség kellően általános, ugyanakkor formálisan szabatos megfogalmazását azért, mert a metafizika nézőpontjából a természeti törvények logikai struktúrája lényeges. Az automata-modell összefüggéseket ad meg, és nem ad hoc tulajdonságok szurrogátumának tekint egy objektumot. Arról sem kell döntenünk, hogy mik a lényeges és mik a lényegtelen tulajdonságai egy objektumnak, a modell megmondja mi az objektum azzal, hogy rögzíti miként viselkedik a környezetében. A modell ismeretében pedig az automatákat élőlények vagy fizikai entitások modelljeinek tekintve, az objektumok tulajdonságai közötti összefüggésekre vezethető vissza a lehetőség és szükségszerűség fogalma.

Jegyzetek

[1]v.ö.: Edward Fredkin, Finite Nature.
`http://www.digitalphilosophy.org` valamint Stephen Wolfram-nak a fizikai világ sejtautomata leírására irányuló alapvető kutatásait:
`http://www.stephenwolfram.com`

[2]Írásom korábbi változata megjelent az E-tudomány elektronikus folyóirat 2010/2 számában, az alapötletet már 1985-ben megfogalmaztam.

[3]V.ö.: Hilary Putnam, Reprezentáció és valóság, (2000) Osiris-Gond, Budapest

[4]Bagyinszki János, Véges automaták (Ádám András és Katona Gyula előadásai alapján), Az MTA Matematikai Kutató Intézete „A számítástechnika alapjai" c. tanfolyamának jegyzete.(1972.) bevezetés IX.o. MTA jegyzet, Bp.

[5]Ez a felosztás hasonló az analóg automaták típusaihoz:

generátor	oszcillátor
kombinációs struktúra	lineáris nemtárolós átviteli tag
állandósult állapotban kombinációs automata	lineáris tárolós átviteli tag
sorrendi hálózat	nemlineáris átviteli tag

[6]De nem bármilyen jelenségnek: „Time behaviour can always be determined from finite state machine, but not all time behaviours can be described by finite state machine." Prof. Timo D. Hamalainen. - Digital Design, fall 2006, Sequential Systems. Retrieved February 21, 2007 of Tampere University of Technology, Institute of Digital and Computer Systems.
`\http://www.tkt.cs.tut.fi/kurssit/1200/S06/Luennot/Materiaali/TKT-1200_lect_4.pdf` pp.37,40

[7]Érdemes ezzel összevetni David J. Chalmers (1996) álláspontját: Does a Rock Implement Every Finite-State Automaton? Synthese, 108:309-33
`http://consc.net/papers/rock.html`

[8]Elfogadom Quine azon kvantifikált modális logika elleni kritikáját, hogy az súlyosan elmarasztalható a használat és említés összekeverésének bűnében. Az a definíció, amit én adok ebben az írásomban, elkerüli ezt a hibát, de e miatt koncepcióm nem is fejleszthető tovább a kvantifikált modális logika irányába. Tudatában vagyok ennek, de ezt felfogásom erényének tekintem és nem hibájának.

[9]„A múlttal ugyanis nagyon sok mindent lehet csinálni, a múlton például lehet rágódni, keseregni és nevetni, a múltat lehet felhánytorgatni, elfelejteni, megbocsátani, felidézni és magyarázni. De van egy dolog, amit a múlttal semmiképp sem lehet megtenni - a múltat nem lehet megváltoztatni. Talán csak néhány történész hiszi ennek az ellenkezőjét." Altrichter Ferenc: „A győzedelmes argumentum" In: Észérvek, Atlantisz, Budapest, 1993, p.298-299.