Miért gyanús a kvantifikált modális logika?

András Ferenc - 2011

Két dolog merül a kérdéssel kapcsolatban: mi a hiba a modális logikában, és mi a hiba forrása? Az utóbbira Quine megadta a választ: a használat és említés összekeverése, most az előbbivel foglalkozom. Fontoljuk meg az alábbi igaz állításokat:

(1) A tűzhelyen az edényben lévő forró víz hőmérséklete egyenlő 100 °C-al.
(2) A az asztalon az edényben lévő víz hőmérséklete egyenlő 18 °C-al.
(3) Az edények környezeti hőmérséklete egyenlő 18 °C-al.
(4) Kellően hosszú idő után az asztalon az edényben lévő víz hőmérséklete egyenlő az edények környezeti hőmérsékletével.

Fordítsuk az elsőrendű logika nyelvére a fenti négy állítást. A mérnökök és fizikusok nyelvhasználati szokásait követve predikátumok helyett használjunk absztrakt entitásokat. Az időbeli összefüggésektől az egyszerűség kedvéért eltekintek. Legyen:

c=:a tűzhelyen az edényben lévő forró víz
d=:az asztalon az edényben lévő víz
e=:az edények környezete

Ekkor a következő formulákat kapjuk, ahol ‘f’ egy függvény, mely megadja az argumentumában lévő tárgyak hőmérsékletét:

(1) 100 °C = f(c)
(2) 18 °C = f(d)
(3) 18 °C = f(e)
(4) f(d) = f(e)

Fizikai tanulmányainkból tudjuk, hogy (1) és (4) szükségszerűen igaz, míg (2) és (3) nem az. Azért van ez így, mert nem a logikai-grammatikai formától függ a fenti négy állítás szükségszerű igazsága, hanem hogy levezethetőek-e fizikai törvényszerűségekből vagy sem. A nevek merev vagy nem merev jelölő mivolta nem adja meg a válasz a fizikai szükségszerűség kérdésére. Mint naturalista filozófust, nem érdekelnek a fizika törvényeinek ellentmondó lehetséges világok. Ezért jelen esetben ’f(c)’ merev jelölő, mert a fizikai világ minden lehetséges történetében normál légköri nyomáson a forrásban lévő víz hőmérséklete 100 °C. Ezzel szemben sem f(d) sem f(e) nem merev jelölők, mert a fizika törvényei nem tiltják meg, hogy más legyen környezetei hőmérséklet, mint 18 °C. Mégis (4) állítás szükségszerű igazság mert levezethető a fizika törvényeiből. Figyeljük meg, hogy nem a kifejezések logikai formája határozza meg hogy merev jelölők-e vagy sem, hanem a jelentésük. Viszont a jelentés nem játszhat szerepet egy formális logikai levezetésben, következésképpen a nevek merev vagy nem merev mivolta sem játszhat szerepet egy formális logikai levezetésben. Jelen példák esetében nem az azonossági állítás logikai szerkezetétől függ annak szükségszerű igazsága, hanem logikán kívüli fizikai axiómákból való levezethetőségtől. Ezzel szemben a kvantifikált modális logikában az azonossági állítások igazsága szükségszerű, itt a levezetés:

(1) $\forall x.\ x=x$	- axióma
(2) $\forall x \forall y$: $y=x \rightarrow.\ F(y) \rightarrow F(x)$	- axióma séma
(3) $\forall x \forall y$: $y=f(x) \rightarrow.\ F(y) \rightarrow F(f(x))$	(2)
(4) $\Box \forall x.\ x=x$	(1) - minden axióma szükségszerű igazság
(5) $\forall x \forall y$: $y=x \rightarrow.\ \Box a=y \rightarrow \Box a=x$	'$\Box$ a=①' helyettesítve F helyére
(6) $a=b \rightarrow.\ \Box a=a \rightarrow \Box a=b$	(5)
(7) $\Box a=a$	(3)
(8) $a=b \rightarrow \Box a=b$	(6) (7)
(9) $\forall x \forall y.\ x=y \rightarrow \Box x=y$	(8)
(10) $a=f(b) \rightarrow \Box a=f(b)$	(9)

(3) megengedhető lépés az elsőrendű extenzionális logikában. Amennyiben az ehhez hasonló (10) nem megengedhető lépés a kvantifikált modális logikában, akkor az nem formális logika, mert a nevek jelentése is szerepet játszik a levezetésben.

Fogadjuk el a következő axiómát: bármely F egyargumentumú predikátumra van olyan f függvény, hogy $\exists y \forall x.\ F(x) \leftrightarrow y=f(x)$.
Egy példa: Piros(x) $\leftrightarrow$ piros= színe(x)

* (1) $F(b)$	
* (2) $F(b) \leftrightarrow a=f(b)$	axióma alapján: a, f
* (3) $a=f(b)$	(1) (2)
* (4) $\Box a=f(b)$	(3) és a korábbi (10) alapján
* (5) $\Box F(b)$	(2) (4)
(6) $F(b) \rightarrow \Box F(b)$	(1) (5)

Ez azt jelenti, hogy a minden igaz F(b) formájú állítás egyben szükségszerű igazság is. Ezt is látta Quine, az ő levezetése még általánosabb:

(vö.: Slingshot Argument, http://johnmacfarlane.net/142/slingshot-assignment.pdf és azon kívül: http://johnmacfarlane.net/142/syllabus.html)

"Modality
….
Thus we can legitimize quantification into modal position by postulating that whenever each of two open sentences uniquely determines one and the same object *x*, the sentences are equivalent by necessity." (Willard Van Orman Quine, *Word and Object*, 1960, The Massachucetts Institute of Technology, pp.,196,197)

Kicsit részletesebben átírtam a levezetést:

*	(1) $\forall x \{ [\forall w (Fw \leftrightarrow w = x) \,\&\, \forall w (Gw \leftrightarrow w = x)] \rightarrow \Box\forall w (Fw \leftrightarrow Gw) \}$	
*	(2) $[\forall w (Fw \leftrightarrow w = b) \,\&\, \forall w (Gw \leftrightarrow w = b)] \rightarrow \Box\forall w (Fw \leftrightarrow Gw)$	(1)
*	(3) $\exists w (w=b)$	
*	(4) $a = b$	(3) a
**	(5) p	
**	(6) $\forall w (p \,\&\, w = a \leftrightarrow w = b)$	(4) (5)
**	(7) $\forall w (w = a \leftrightarrow w = b)$	(4) (5)
**	(8) $Fw \leftrightarrow_{df} (p \,\&\, w = a)$	
**	(9) $Gw \leftrightarrow_{df} w = a$	
**	(10) $[\forall w((p\&w = a)\leftrightarrow w=b) \,\&\, \forall w(w=a\leftrightarrow w =b)] \rightarrow \Box\forall w (Fw\leftrightarrow Gw)$	(2)(8)(9)
**	(11) $[((p\&a = a)\leftrightarrow a=b) \,\&\, (a=a\leftrightarrow a=b)] \rightarrow \Box\forall w (Fw\leftrightarrow Gw)$	(10)
**	(12) $\Box\forall w ((p \,\&\, w = a) \leftrightarrow w = a)$	(4) (5) (11)
**	(13) $\Box p$	(12)
*	(14) $p \rightarrow \Box p$	(5) (13)
	(15) if (1) then $p \rightarrow \Box p$	(14)

“But this (1) postulate annihilates modal distinctions; for we can deduce from it that 'Necessarily p' holds no matter what true sentence we put for 'p'.”

A fizika axiómáival kiegészítve a logikát, a szükségszerű igazságok következményei az axiómáknak. A következmény reláció formulák nevei között áll fenn és nem a formulák közötti igazságfüggvény. Ezért hibás kívülről beléjük kvantifikálni, és ezért hibás a kvantifikált modális logika. Hogyan fest a fizikai szükségszerűség egy logikailag korrekt elmélete? Nincs itt mód ennek a részletes kifejtésére, folyt. köv.