Hasonlóság, egyformaság, azonosság

András Ferenc

1982-2012

1. Bevezetés

Először azon szavak jelentését fogom filozófiai szempontból megvizsgálni, melyek szoros kapcsolatban állnak az azonosság fogalmával, és gyakran zavarok, félreértések forrásai. Három fogalom gubancolódik egymásba az azonossággal kapcsolatos filozófiai vitákban: a hasonlóság, az egyformaság és az azonosság. Az elsőt matematikai nyelven a tolerancia relációk, a másodikat az ekvivalencia relációk írják le, az azonosság predikátum jelentését pedig logikai - halmazelméleti axiómák segítségével rögzítem. Eközben olyan alapvető relációelméleti fogalmakra térek ki, mint egy reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonsága. Megpróbálok közérthető, szemléletes példákat bemutatni, mert egy filozófiai magyarázatnak, hacsak lehet, minél szélesebb körben érthető, a mindennapi nyelven megfogalmazott példákból és kérdésekből kell kiindulnia.[1]

Miután rögzítettem az azonosság fogalmát, arra a kérdésre keresem a választ, hogy vajon jó-e az azonosság klasszikus logikai jellemzése? Nem túl tág vagy épp ellenkezőleg túlságosan szűk-e a szokásos meghatározás? Előbbi esetben előfordulhat, hogy két dolog annak ellenére kettő, azaz nem azonos egymással, hogy minden tulajdonságukban megegyezik, az utóbbi esetben pedig olyan relációk is kielégítik az azonosság axiómáit melyeknek nyelvérzékünk szerint semmi köze sincs az azonosság fogalmához. Ha hiba van az azonosság axiómáiban, annak az lenne a meggyőző bizonyítéka, hogy az axiómák alkalmazásával hibásan következtetünk. Ha az első eset fordulna elő, és az axióma túl tágas volna, akkor megtörténhet, hogy két dolgot hibásan azonosítunk, a második esetben viszont ellenkezőleg arra következtetnénk tévesen, hogy két dolog különbözik, amikor valójában egy.[2] Külön megfontolást érdemel, mert egyáltalán nem nyilvánvaló a válasz, hogy mire szolgál az azonosság a jelek és mire az egyformaság a fizikai tárgyak világában.

Az azonossággal kapcsolatos filozófiai viták alapvetően két csoportra oszthatóak. Az első csoportba azok a kérdések tartoznak, melyeket az azonosság fogalmának logikai, matematikai alkalmazásai vetnek föl, a második csoportba pedig azok a dilemmák tartoznak, melyek az élőlények, élettelen tárgyak, különösen a nagyon kicsiny elemi részecskék önazonossága jelentése elemzésekor merülnek föl. Írásom első részében az azonossággal kapcsolatos legalapvetőbb logikai - halmazelméleti kérdésekkel foglalkozom. Az itt bemutatott fogalmak jelentősége nem korlátozódik az azonosság filozófiai kérdéseire, ezért igyekszem minél érthetőbben és egyúttal szabatosan bemutatni ezeket az alapvető logikai-matematikai fogalmakat. Dolgozatom második részében foglalkozom a fizikai tárgyak önazonosságának kérdésével, de egy részletkérdést külön vizsgálok meg a következő fejezetben.

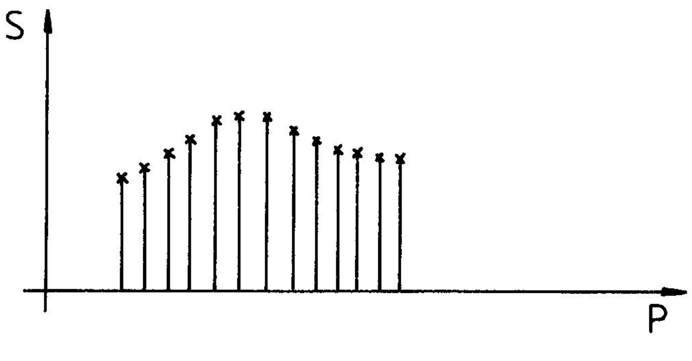
2. Logikai - filozófiai, matematikai háttér

2.1. Ismeretelméleti alapok

Mi alapján állítjuk, hogy $a = a$, amikor az, ami az azonosságjel baloldalán szerepel, nem mindig tökéletesen egybevágó azzal, ami a jobb oldalán van, különösen ha kézzel írom le a két betűt? Vajon itt valami egyedülálló emberi képességgel van dolgunk?

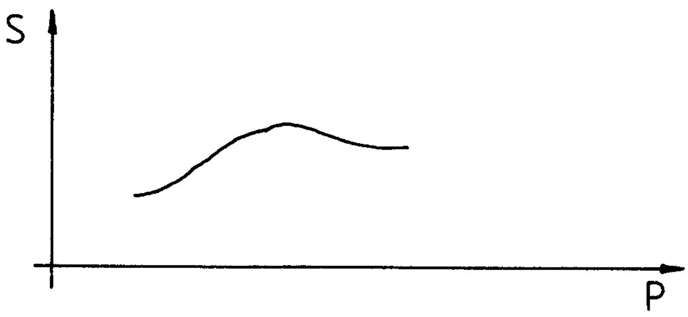
A válasz az, hogy az egyforma tárgyak hasonló viselkedése hasonló környezetben képezi a fizikai alapját az élőlények azon kognitív képességének, hogy képesek a világban egyforma tárgyakat és hasonló helyzeteket fölismerni. Ez képezi az alapját az automaták működésének is, és ez magyarázza meg, hogy miért érvényesek bizonyos fizikai természettörvények egyforma tárgyak széles tartományán.

David Hume azt kérdezte háromszáz évvel ezelőtt, hogy miért hisszük, hogy ma ugyanaz a Nap kelt föl, mint tegnap? A válasz egy hit, egy metafizikai hit. Önkéntelenül hiszünk valamilyen folytonosságban. Ha a mérési eredmények az 1. ábrán láthatók akkor hajlamosak vagyunk azt a 2. ábrán látható módon felfogni. Megeshet persze, hogy valóban módunkban



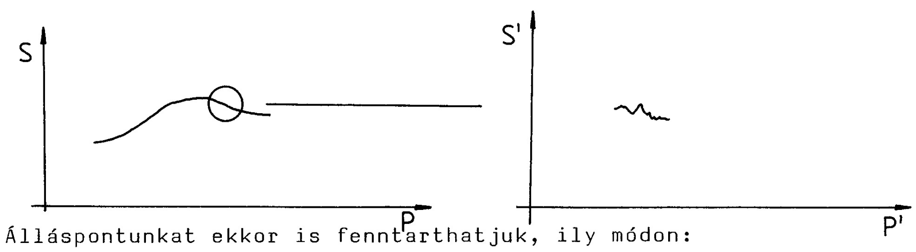
1. ábra. Mintavétel

áll a mérést jóval sűrűbben és pontosabban elvégezni, ekkor az elképzelt



2. ábra. Közelítés

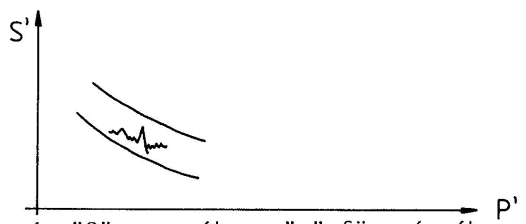
folytonos összefüggés egy részletét kinagyítva a 3. ábrán látható eredményt kapjuk:



3. ábra. Nagyítás

Az a hit, hogy egy csőbe bedobott golyó ugyanaz, amikor a cső végén kigurul, a legalapvetőbb metafizikai hiteink közé tartozik. Az ehhez hasonló hitekben osztozunk a fejlettebb állatok világértelmezésével, a tárgyak és élőlények folytonos létezésében való hit nem korlátozódik az emberre.

Az 'azonosság' reláció – hasonlóan a természetes számokhoz – annyira alapvető fogalomnak tűnik, hogy sokan úgy vélik, meghatározhatatlan alapfogalom.[3] Valóban, a használatukat gyakorlással sajátítjuk el és nem valamiféle definícióval, és az is igaz, hogy nehéz lenne bármiféle definíciót megérteni, ha még az olyan alapvető szavak jelentését sem értenénk, mint az azonosság. A logikai azonosság használata kapcsolatban van a fizikai (materiális) egyformasággal. Amit látunk, hogy $a = a$, az úgy történik – nem ezt jelenti(!) – hogy a baloldali 'a' jel egyforma a jobboldali 'a' jellel. Nem mindig tökéletesen egybevágó, de mi mégis úgy tekintjük, hogy a két jel ugyanaz, és ez csak úgy lehetséges, hogy a két jelpéldány alakjában van valami közös. Ha egy olyan gépet kívánunk készíteni, ami tud olvasni, felismeri az azonosnak szánt jeleket, akkor ugyancsak úgy kell megszerkesztenünk, hogy fölismerje



/ A jelenség "S" paramétere "p" függvényében a sávban van, Eh-

hez azt is hozzátehetjük,hogy milyen valószinüséggel./

4. ábra. Behatárolás

a jelek alakjában lévő hasonlóságot, és a szoros hasonlóságot mint egyformaságot tekintse. Ha azonban megkérdezik, hogy mi az egyformaság, és egy olvasó gép miket tekint egyformának, akkor magyarázatunk nem mondható el az 'azonosság' logikai terminus nélkül. A nyelvhasználat támaszkodik a jelpéldányok egyformaságára, de ezáltal mégsem kerültünk a körbeforgás csapdájába, mert az 'azonos' terminus meghatározása a nyelven belül nem támaszkodik fizikai, tapasztalati tényekre. A modern logika és filozófia egyik legnagyszerűbb eredménye, hogy az 'azonosság' definiálható a másodrendű logikában, és jellemezhető axiómákkal az elsőrendű logika nyelvében.

Egy dolog azt mondani, hogy $a = b$ logikai értelemben, és más dolog azt mondani, hogy 'a' alma azonos súlyú, mint 'b' alma, vagy 'a' szakasz megegyező hosszú 'b' szakasszal, fizikai értelemben.

Az első esetben adott geometriai keretelméleten belül értelmezhető két szakasz metszése és azonossága. Amennyiben két szakasz metszi egymást, úgy van közös pontjuk, de továbbra is fönnáll a különbözőségük. Ha viszont két szakasz fedi egymást, akkor a két szakasz azonos, tehát nem áll fenn a különbözőségük. Pl. az euklideszi térben két végpont között mindig húzható egy egyenes szakasz, melyet a végpontok határoznak meg, és csak egyetlen egyenes szakasz van a két végpont között. Értelmetlenség lenne feltételezni, hogy két végpont között több egymástól megkülönböztethetetlen, azaz minden tulajdonságában azonos szakasz van.[4]

A második esetben a tárgyakhoz tartozó jellemzők értékeiről állítjuk, hogy azonosak vagy nem azonosak, és nem magukról a tárgyakról. Ha például látunk két egyforma hosszú – mondjuk 'a' és 'b' betűvel jelölt – egyenes szakaszt, akkor mondhatjuk, hogy 'a' adott pontossággal való megmérése során kapott szám, és 'b' azonos pontossággal való mérése során kapott szám megegyezik, azonos. Legyen a 'hosszúság' jellemzőt leíró függvény valamely tetszőleges x tárgyra ilyen módon kifejezve: hossza(x). Ekkor az 'a' szakasz hossza így fest: hossza(a), míg a 'b' szakasz hossza ehhez hasonlóan: hossza(b). A két szakasz távolságának adott pontosságú megegyezése egy szám önazonosságába megy át ilyeténképpen: hossza(a)=hossza(b). A két szakasz egyenlő távolságán valamiféle tárgyi manipulációra gondolunk. Pl. egy merev rudat kétszer tudunk 'a' mentén lefektetni úgy, hogy ne lógjon túl, és 'b' mentén is kétszer tudjuk megtenni ugyanezt. A mérés során feltesszük, hogy a merev test nem, vagy csak elhanyagolható mértékben változtatja hosszát, és a mérendő szakasz sem változik, sem a mérés következtében, sem egyéb okból. Mérési eljárásunk olyan – szándékosan találtuk úgy ki – hogy számokat tudjunk kapcsolni a tárgyak tulajdonságaihoz. A számokról aztán már állíthatjuk a logikai azonosságot. De, hogy az egyenlő hosszúságokkal való haladást egyenlő, azonos számokban kell kifejezni, ez inkább alapfeltevés, játékszabály mint kísérleti tény, aminek hasznossága a matematika és geometria hasznos alkalmazásaiban mutatkozik meg.[5]

2.2. Logikai alapok

Sok logikai szakkönyv a klasszikus elsőrendű logikában az azonosságot két axióma sémával jellemzi:

(A1) $\forall x.x = x$

(A2) $\forall x \forall y.(F(x) \,\&\, x = y) \rightarrow F(y)$

(A2-vel logikailag ekvivalens, hogy minden x és y-ra ha $x = y$ akkor, ha $F(x)$ akkor $F(y)$. A2-t az 'azonosak megkülönböztethetetlensége' elvének nevezik.)[6]

(A1) és (A2) nem definiálja az azonosságot, hanem az azonosság használatának a logikában kormányzó elveit rögzíti. Hao Wang fölismerte, hogy a két axióma levezethető egy még alapvetőbből, melynek belátáshoz nélkülözhetetlen a szimbolikus logika apparátusának használata. A kiinduló premissza a következő séma:

(W) $\varphi(a) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \,\&\, x = a)$

Ebből levezethetők az azonosság axiómái. A levezetés szép példája egy olyan összefüggés megértésének, ami természetes nyelven lehetetlen.[7]

(A1) Az azonosság reflexivitása:

*(1) $\varphi(a) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \,\&\, x = a)$

**(2) $a \neq a$

———————————————-

**(3) $a \neq a \leftrightarrow \exists x(a \neq a \,\&\, x = a)$ $\quad$ (1)$\varphi :=$ 1 $\neq a$

Ahol '$① \neq a$' az „a-tól különbözőnek lenni” fogalma.

**(4) $a \neq a \leftrightarrow (b \neq a \,\&\, b = a)$ (3)b

**(5) $(b \neq a \;\&\; b = a)$ (2)(4)

*(6) $a \neq a \to (b \neq a \,\&\, b = a)$ (2)(5)

*(7) $a = a$ (6)

*(8) $\forall x. x = x$ (7)

(9) $[\varphi(a) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \,\&\, x = a)] \to \forall x. x = x$ (8)

(A2) Leibniz törvénye:

*(1) $\varphi(b) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \,\&\, x = b)$

**(2) $a = b \,\&\, \varphi(a)$

————————————————-

**(3) $\exists(\varphi(x) \,\&\, x = b)$ (2)

**(4) $\varphi(b)$ (1)(3)

*(5) $(a = b \,\&\, \varphi(a)) \to \varphi(b)$ (2)(4)

(6) $[\varphi(b) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \,\&\, x = b)] \to [a = b \,\&\, \varphi(a)) \to \varphi(b)]$ (1)(5)

Fontos hangsúlyozni, hogy ebben a felfogásban az azonosság épp olyan centrális logikai fogalom, mint az 'és' konnektívum. Amiként a 'és' konnektívum rögzített jelentéssel bír és nem interpretálandó, akképpen az azonosság predikátum sem. Ebből következően relatív azonosságról beszélni félrevezető. A relatív azonosság valójában egy ekvivalencia reláció, ami már interpretálható, amint azt a későbbiekben részletesen be fogom mutatni.

2.3. Az azonosság értelmezése a halmazelméletben

A Zermelo-Fraenkel (ZF) halmazelmélet különféle megfogalmazásaiban és verzióiban a meghatározottság (más elnevezéssel extenzionalitás) axiómája rögzíti, hogy mikor azonos két halmaz, H_1 és H_2 :

(Megh.) $H_1 = H_2 :=$ Minden x-re, $x \in H_1$ akkor és csak akkor ha $x \in H_2$

A ZF halmazelmélet szokásos fölépítéseiben a halmazoknak nincsenek más elemi, mint az üres halmaz és annak halmazai, és annak újabb halmazai a végtelenségig. Ez elegendő a matematikus számára, hogy megkonstruálja a legkülönfélébb struktúrákat és érdekes összefüggéseket mutasson ki azok között. Viszont egyáltalán nem elegendő a filozófus számára, aki szeretne almák, körték, asztalok és székek halmazáról beszélni, szeretné megengedni, hogy konkrét partikulárék is elemei lehessenek halmazoknak. Az ilyen elemeket a halmazelméletben angolul 'urelement'-nek, nevezik. (Ruzsa Imre ősobjektumnak nevezte ezeket és én követem őt.) Ha ősobjektumok is lehetnek a halmazok elemei, akkor így alakul az axióma:

Ha van olyan x, hogy $x \in H_1$ akkor ($H_1 = H_2 :=$ Minden x-re, $x \in H_1$ akkor és csak akkor ha $x \in H_2$); ha nincs olyan x, hogy $x \in H_1$ akkor $H_1 = \emptyset$.

Vegyük észre, hogy a meghatározottság axiómája nem vezethető le (A1) és (A2)-ból, azaz a klasszikus logika axiómáiból. Az hogy '$H_1 = H_2 \rightarrow$ minden x-re, $x \in H_1$ akkor és csak akkor ha $x \in H_2$' levezethető, viszont a fordítottja nem. Tekintsük ugyanis a '$\in$' reláció következő interpretácóját: $x \in H_1 := x$ őse H_1 -nek. Ez alapján az teljesül, hogy ha két ember azonos, akkor egyazon ősei vannak, viszont nem teljesül a fordítottja: ha két embernek egyazon ősei vannak, abból nem következik, hogy azonos a két ember. Ezért szükséges ezt külön axiómában rögzíteni a halmazok tekintetében. Valójában ennyi is elég lenne:

(A3) Ha (minden x-re, $x \in H_1$ akkor és csak akkor ha $x \in H_2$) akkor $H_1 = H_2$,
illetve őselemek használata esetén:
Ha van olyan x, hogy $x \in H_1$ akkor (ha (minden x-re, $x \in H_1$ akkor és csak akkor ha $x \in H_2$) akkor $H_1 = H_2$); ha nincs olyan x, hogy $x \in H_1$ akkor $H_1 = \emptyset$.

A halmazok, relációk és egyéb matematikai struktúrák közötti hasonlóság vagy azonosság tulajdonságai a köztük lévő leképezéssel írhatók le. A leképezések fajtáira, valamint a leképezéseknek a relációk tulajdonságait átörökítő jellegére nem térek ki. Az ehhez kapcsolódó olyan fogalmak magyarázata, mint a 'homomorfizmus' vagy 'izomorfizmus', megtalálhatók a hivatkozott irodalomban. Szembeötlő az e fogalmakra épülő matematikai struktúrák elméletének szépsége és kapcsolata a filozófia alapkérdésivel.[8]

2.4. Egy fontos filozófiai tanulság

Említettem, hogy az azonosság logikai axiómáiból nem vezethető le a ZF halmazelmélet meghatározottsági axiómája. Fontos jól megérteni ennek a filozófiai üzenetét. Arra hívja föl a figyelmet, hogy az azonosság fogalma önmagában nem dönt a fogalom egyes speciális alkalmazásai esetében, nekünk kell élesíteni a fogalmat a matematika vagy számítástudomány egyes területein. Pl. Peter Aczel nem jól fundált halmazelméletében – ahol egy halmaz önmagának is eleme lehet – a halmazok azonosságának sajátos axiómái vannak, melyek eltérnek a ZF halmazelméletben megszokottól. Ezek után nem meglepő, hogy miként a jelek világában, úgy a makroszkopikus fizikai tárgyak vagy élőlények világában sem magyaráznak meg mindent az azonosság logikai alapelvei. Nekünk kell ellentmondásmentesen rögzíteni, hogy egy élőlény, személy vagy éppen Thészeusz hajója meddig azonos önmagával, és mikor egy másik fizikai tárgy, ezt nem lehet a fogalom jelentéséből kispekulálni.

2.5. Az azonosság definiálhatósága

A logikának egy magasabb fejezetében – a másodrendű logikában, ahol már nem csak egyedi dolgok, hanem azok tulajdonságai, viszonyai is beletartoznak a 'minden' kvantor hatókörébe – az azonosság definiálható:

(PII) $x = y$ pontosan akkor, ha bármely F tulajdonságra igaz, hogy (ha xF tulajdonságú, akkor y is F tulajdonságú)

(PII) -nek létezik egy erősebb megfogalmazása is, amelyik a lehetséges világok modális szemantikájára épít. Ekkor nem csak az aktuális világban kell egybeessen x és y valamennyi tulajdonsága, hanem az összes lehetséges világ összes lehetséges tulajdonságát alapul véve is. Ennek vizsgálatával most nem foglalkozom.

A definíció előzetes várakozásunkkal ellentétben nem úgy fest, hogy $x = y$ pontosan akkor, ha bármely F tulajdonságra igaz, hogy (xF tulajdonságú, akkor és csak akkor ha y is F tulajdonságú). Ennek az a magyarázata, hogy PII-ból logikailag következik ez utóbbi megfogalmazás, így az 'akkor és csak akkor' kitétel a definiensben fölösleges. Ez azért van így, mert mindig adott tárgyalási univerzum részhalmazaiként értelmezzük a predikátumok terjedelmét, azért a tárgyalási univerzumot alapul véve bármely predikátumra annak negáltja (tagadása) is egyértelműen meghatározott. A definíció alapgondolata az, hogy ha két dolog minden tulajdonsága megegyezik, akkor az a két dolog valójában egy dolog.[9]

Ezért (PII)-at a 'megkülönböztethetetlenek azonossága' elvének nevezik. Különféle gyöngített megfogalmazása véget nem érő filozófiai viták tárgya, és a kortárs filozófusok többsége nem fogadja el az elvet. Több filozófus szerint a definícióban a 'minden tulajdonság' hatókörébe nem tartozhat bele a valamivel való azonosság tulajdonsága, mivel épp ez a definíció rögzíti az azonosság jelentését. Ezt a korlátozást elfogadva fölmerülhet, hogy talán létezhet két olyan objektum, amelyik minden tulajdonságában – beleértve a helyét is – megegyezik, de mégis különbözik egymástól. Vajon milyen objektumok jöhetnek szóba? Kétséges, hogy a halmazok vagy számok világában található ilyen objektum, és korábban azt is rögzítettük, hogy a geometriai objektumok világában sem létezhet ilyen dolog. Pl. Nem állíthatjuk hogy van két árnyékunk, amelyik minden időpillanatban egybeesik, de mégsem azonos. Viszont a fizikai tárgyak világában talán létezhet ilyen objektum, és az cáfolata volna PII ezen gyöngített megfogalmazásának.

Egy másfajta korlátozás lehet a konkrét partikulárék (almák, körték) tartományán a belső tulajdonságokra való szűkítés. Kérdés azonban, hogy mik a belső tulajdonságok, lehetnek-e belső tulajdonságok relációk?[10] Sokan tagadólag válaszolnak a kérdésre, ám ennek elfogadhatatlan következményei vannak. Ugyanis amennyiben a definíciót konkrét partikulárékra is alkalmazni kívánjuk – pl. fizikai tárgyakra vagy eseményekre – akkor a definícióban a dolgok tulajdonságaihoz a külső relációs tulajdonságaik, pl. a térbeli koordinátáik is hozzátartoznak. (Nem minden relációs tulajdonság külső, pl. a konnektor két pontja közötti 230V feszültség, vagy az a testi tulajdonság, hogy a szív a gerinctől balra van.)[11] Ennek hiányában könnyen találhatnánk a 'megkülönböztethetetlenek azonossága' elvét cáfoló ellenpéldát. Pl. két olyan az űrben elhelyezkedő vasgömböt, melyek tömege, formája, felülete és sűrűsége is tökéletesen egyforma, és csak azért tudjuk, hogy kettő vasgömbünk van, mert a helyük különböző. (Később visszatérek erre a problémára.) A számok vagy más matematikai objektumok világában nehezen értelmezhetőek a külső és belső tulajdonságok, így ott nem merül föl ez a kérdés.

A ZF halmazelmélet nyelvén így definiálható az azonosság:

(A4) $x = y := \forall H(x \in H \leftrightarrow y \in H)$

Itt azért szerepel '$\leftrightarrow$' és nem '$\rightarrow$', mert a ZF halmazelméletben nem létezik univerzum mint halmaz, így nem értelmezhető a komplementer halmaz fogalma az univerzumra nézve. (A4) kevésbé pontosan természetes nyelven is megfogalmazható: két dolog azonos, ha minden összesség, amelyikbe az egyik beletartozik, abba a másik is beletartozik, és fordítva.

A 'megkülönböztethetetlenek azonossága' elvének ez a megfogalmazása cáfolhatatlan, mivel magába foglalja a 'valamivel azonosnak lenni' tulajdonság terjedelmét is. Legyen két tetszőleges egyelemű halmazunk, mondjuk $\{a\}$ és $\{b\}$. Ezek a halmazok ugyanis így konstruálhatóak meg: $\{a\} = \{x : x = a\}$ illetve $b = \{x : x = b\}$.

(A4) bírálható azon az alapon, hogy a halmazok osztálya fölött kvantifikál. Azonban megfogalmazhatunk egy D (domain=tartomány) alaphalmazhoz képest relatív azonosság fogalmat is. Legyen I az identitás reláció D alaphalmazon értelmezve abban az értelemben, amelyben D bármely eleme csak önmagával áll relációban:

(A5) $I(D, x, y) := x, y \in D \,\&\, \forall H(H \subseteq D \rightarrow (x, y \in H \;\nabla x, y \notin H))$

Azaz, bármely két D halmazbeli elem D bármely H részhalmazának vagy eleme, vagy nem.[12] Vajon logikailag ekvivalens-e (A4) és PII? A válasz attól függ, hogy minden halmaznak megfelel-e egy predikátum vagy sem. Bebizonyítható, hogy csak akkor, ha legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok dolog létezését feltételezzük. Ebben az esetben egyetérthetünk Quine-al, hogy a nevek minden esetben kiküszöbölhetők egy leíró predikátum segítségével, amely csak és kizárólag magára a névre igaz. Ebből az következik, hogy egy legfeljebb megszámlálható végtelen számosságú világban PII, a megkülönböztethetetlenek azonossága elve, logikai okokból igaz. Ha a mi világunk véges mind a benne lévő fizikai tárgyak mind azok jellemzői értékei tekintetében – aminek a föltételezése a tér-idő adatok szempontjából jelent bizonyos nehézséget – akkor a mi világunkban Leibniz ezen elve érvényes, következésképpen minden azt cáfoló ellenpélda valahol hibás.

2.6. A halmazelmélet alkalmazása valamint az eternalizmus

A halmazelméletben használatos eleme relációval kapcsolatban két dolgot fontos jól megérteni. Az első: az a formális nyelvi mondat, hogy $\{a \in H\}$, azt jelenti hogy az 'a' individuumnév által jelölt dolog eleme a H halmaznak. Pl. $\emptyset \in H$ nem azt jelenti, hogy az üres halmaz jele eleme a H halmaznak, hanem, hogy az üres halmaz maga, az a halmaz, amit a '$\emptyset$' jel jelöl eleme H-nak. Ha nem a dolog, hanem a neve volna a halmaz eleme, az ebben az esetben így fejeznénk ki: $\{'\emptyset' \in H\}$. Másképp fogalmazva, az első esetben: $H = \{\emptyset\}$, a második esetben: $H = \{'\emptyset'\}$. Ilyen egyszerű kérdésekkel a matematikában nem foglalkoznak, a filozófiában viszont igen, mivel a filozófiai viták során gyakori a nevek és a nevek által jelölt dolgok összekeverése. Egy példa segít jobban megérteni mindezt.

Vegyünk egy római számot, egy tízes számrendszerbeli számot, és egy kettes számrendszerbeli számot tartalmazó egyelemű halmazt:$\{III\}\{3\}\{11\}$. Azonos-e ez a három halmaz egymással? Az első halmaz részhalmaza-e a római számok, míg a második az arab számok halmazának? A római számok halmaza és az arab számok halmaza számjegyeket tartalmaz, és nem számokat. E kettőnek nincs közös része, bár mindkettő számokat tartalmaz a szó elnagyolt értelmében. A kérdés tehát az, hogy a $\{III\}\{3\}$ halmazoknak mik az elemei, számok, vagy számjelek. A $\{III\}$ halmaz csak akkor része a római számok halmazának, ha számjel az eleme és nem szám, és ehhez hasonlóan a $\{3\}$ csak akkor része az arab számok halmazának, ha számjel az eleme, és nem szám. Ha számjelek az elemei, akkor nyilván nem azonosak egymással, ha viszont számok, akkor mindhárom halmaz azonos. A halmazelmélet tanítása szerint két halmaz azonos, ha egyazon elemeik vannak, azaz bármely x ami eleme $\{III\}$ -nak az $\{3\}$ -nak is eleme, és megfordítva. Figyeljünk föl arra, hogy a halmazok elemei nincsenek idézőjelben, így az elemek, az általuk megnevezett dolgokat képviselik. Ebből kiindulva jutunk el a válaszhoz. A

$\{3\}$ halmaz nem részhalmaza az arab számok halmazának, viszont a $\{'3'\}$ halmaz már igen. Ez alapján a kérdésben szereplő három halmaz azonos.[13]

A második, amit fontos jól megérteni a halmazelmélet alkalmazásával kapcsolatban: az 'eleme' reláció időtlen reláció. Nem fordulhat elő, hogy $a \in H$ igaz kedden, de hamis szerdán, és az sem, hogy a '$a \in H$' formális nyelvi mondatban 'a' jel időben változtatja a jelentését, mert akkor H halmaz is változna az időben. De akkor miképpen értelmezhető a következő mondat: Cicero $\in$ a-nagy-szónokok-halmaza? Egyáltalán értelmes arról a halmazról beszélni, melynek elemei a nagy szónokok? Hiszen ezek közül sokan már nem is élnek, és még a jövőben is születhetnek nagy szónokok, kiknek a nevét sem ismerjük. Márpedig ha van olyan halmaz, ami a nagy szónokok halmaza, akkor minden dologról egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy eleme-e vagy sem, és a halmaz elemei nem bővülhetnek az idő múlásával, de ki sem hullhatnak elemek a halmazból a személyek elhunytával, mivel az eleme reláció időtlen viszony. Mi a megoldás?

A megoldás az, hogy a személyeket és más extra-matematikai objektumokat, négydimenziós létezőkként fogjuk föl. Ekkor pl. Cicero egész élete eleme egy halmaznak – beleértve a vele történt eseményeket, és azonkívül Cicero aktuális és diszpozicionális tulajdonságait, ezek időbeli változását – és ez a halmaz eleme a nagy szónokok halmazának. Épp így a jövőbeli nagy szónokok is a jövőbeli életükkel szerepelnek a halmaz elemi között – bár nem tudjuk, hogy kik azok. Ezt a szemléletet sokan joggal nevezik egyfajta 'isteni minden tudás' szemléletének, pedig nagyon is megszokott látásmód ez, csak a középiskolában nem figyelünk föl rá. Amikor a középiskolai fizikai tanulmányaink során az időbeli mozgást egy függvénnyel ábrázoljuk, akkor pontosan ezt a négydimenziós szemléletet alkalmazzuk. A mechanikai mozgás függvénnyel való leírásnál is időtlen viszonnyal írjuk le az időbeli viszonyokat, csak nem csodálkozunk rá ennek filozófiai jelentésére.

Mi következik abból, hogy Cicero eleme a nagy szónokok halmazának? A nagy szónokok halmazát részletesebben így fejezhetjük ki:

A-nagy-szónokok-halmaza:= $\{x : x - \text{nagy-szónok}\}$

azaz, mindazon x dolgok halmaza, mely x dolgokra igaz, hogy x nagy szónok – volt, van, vagy lesz. Az egyik lehetséges megfogalmazása ama ténynek, hogy Cicero egy ezek közül, a halmazelmélet nyelvén így fest:

$\exists x(x = \text{Cicero} \,\&\, x \in \text{a-nagy-szónokok-halmaza})$

Ebben a megfogalmazásban x értékének lenni annyi, mint létezőnek lenni. Tehát, ha Cicero-t mint időben kiterjedt létezőt fogjuk föl, akkor létezőnek ismertünk el múltbeli eseményeket, jelen esetben Cicero életét. És ami igaz itt a múltra, igaz a jövőre is. Épp így létezőnek kell elfogadjuk a még meg sem született nagy szónokokat, és azok életét is. A filozófiában ezt az álláspontot, amelyik a jelennel megegyező ontológiai státuszt tulajdonít a múltnak és jövőnek, 'eternalizmus'-nak nevezik. Az ezzel vitatkozó koncepciót, miszerint csak a jelen létezik, a jövő még nem, a múlt pedig már nem, 'prezentizmus'-nak nevezik a metafizikai irodalomban. (Van olyan álláspont is, miszerint a múlt és a jelen létezik, csak a jövő nem.) A prezentizmus csak úgy egyeztethető össze a halmazelmélet alkalmazásával, hogy föltesszük, a múltbeli és a jövőben létező dolgok valamiképp a jelenben is léteznek, pl. absztrakt entitások. Filozófiai szempontból ez erőltetett megoldásnak tűnik, mivel Cicero egykori élete nem egy absztrakt entitás élete volt, hiszen absztrakt entitásként nem gyakorolhatna a mai napig hatást a jelenre.

Az eternalizmushoz és prezentizmushoz hasonlón kétféle módon értelmezhető az élőlények vagy makroszkopikus fizikai tárgyak léte. 'Perdurantizmus'-nak nevezik a négydimenziós tér-időben, időben kiterjedt dologként értelmezett élőlényeket vagy élettelen tárgyakat. Ezzel szemben az 'endurantizmus' az érzékelhető létezőknek olyan felfogása, amely szerint az élőlények és élettelen tárgyak a jelenben teljes egészében jelen vannak, nincsenek a múltba vagy jövőbe nyúló nyúlványaik.

A fizikai tárgyak endurantista és perdurantista felfogása közötti összefüggést a következőképpen fejezhetjük ki:

(perd.) $\forall x \forall y \forall t$: x, y fizikai tárgyak t időpontban $\rightarrow .x = y \rightarrow \exists u \exists v(u = x$ időszelete $t-$kor $\& \, v = y$ időszelete $t-$kor $\& \, u = v)$

(end.) $\forall x \forall y \forall t$: x, y fizikai tárgyak t időpontban $\rightarrow .\exists u \exists v(u = x$ időszelete $t-$kor $\& \, v = y$ időszelete $t-$kor $\& \, u = v) \rightarrow x = y$

A fizikai tárgyak endurantista megközelítése szempontjából fontos hangsúlyozni, hogy a fizikai tárgyak mérhető (fizikai) jellemzői időben értelmezettek, mert a mérések időbeli események, a tér-idő egy pontján történnek. Csak némelykor hasznos leegyszerűsítésként fogadható el valamely tárgy jellemzőjének – pl. alakjának, helyének vagy hőmérsékletének – időtől független értelmezése. Ez még akkor is így van, ha egy tárgy anyagminőségéről beszélünk, amelyik mindaddig változatlan, ameddig a tárgy egyáltalán létezik.

Mindennek az a tanulsága, hogy ha matematikai eszközöket alkalmazunk a fizikailag érzékelhető (extra matematikai) világ leírása során, akkor az eternalizmus nagyon vonzó szemléletmód. A tudomány pontosan ezt teszi, tehát a tudomány eternalista. Az eternalizmus olyan jelentős képviselői, mint Quine vagy Russell épp azért voltak eternalisták, mert gondolkodásmódjukat mélyen meghatározta matematikusi látásmódjuk. A matematikai szemlélethez a fizikai tárgyak perdurantista felfogása áll közelebb, de összeegyeztethető az endurantizmussal is. Perdurantista megközelítésben a fizikai tárgyak és események megkülönböztetése azon alapul, hogy az előbbiek mindig rendelkeznek diszpozíciós tulajdonságokkal is, melyek megadják, hogy a fizikai tárgy környezetének változásaira miként reagál. Az endurantista értelmezés egyszerűbb, de csak akkor fogadható el, ha a személyek vagy makroszkopikus tárgyak változásai nem befolyásolják, hogy egy tárgy eleme a halmaznak vagy sem. Ahol a változás lényeges szerepet játszik, ott komplex struktúrák képviselik a tárgyakat. Ilyenkor a fizikai tárgyakat halmazok, relációk vagy véges automaták szimulálják, melyek a környezet időbeli bemeneti hatásaira, a tárgy állapotainak megfelelő időbeli kimenetet állítanak elő.

2.7. Azonosság és szükségszerűség

Vajon az azonosságot állító igaz mondatok azon túl hogy igazak, egyszersmind szükségszerűen is igazak-e? Vannak-e csak esetlegesen igaz azonossági állítások is? Az erre való válasz természetesen előfeltételezi a szükségszerűség és esetlegesség fogalmának értelmezését.[14]

Az azonosság szükségszerűsége mellet a következőképpen érvelhetünk formális nyelven, mivel úgy jobban áttekinthető:

(1) $\forall x . x = x$ - axióma

(2) $\forall x \forall y : y = x \rightarrow .F(y) \rightarrow F(x)$ - axióma séma

(3) $\forall x \forall y : y = f(x) \rightarrow .F(y) \rightarrow F(f(x))$ (2)

(4) $\forall x . \Box x = x$ (1)

(Minden axióma szükségszerű igazság)

(5) $\forall x \forall y : y = x \rightarrow .\Box a = y \rightarrow \Box a = x$

('F' helyettesítve '$\Box a =$ 1' el a kvantifikált logika bírálói szerint hibás, megengedhetetlen lépés, mert a modális operátorok argumentumában a mondatokat említjük, és nem használjuk. Ugyanakkor a levezetésnek ez a döntő pontja, innen már megállíthatatlanul következik a konklúzió.)

(6) $a = b \rightarrow .\Box a = a \rightarrow \Box a = b$ (5)

(7) $\Box a = a$ (3)

(8) $a = b \rightarrow \Box a = b$ (6) (7)

(9) $\forall x \forall y . x = y \rightarrow \Box x = y$ (8)

Vajon elfogadható ez a következmény, vagy inkább el kell vessük a levezetés valamelyik lépését, az elfogadhatatlan következmény elutasítása végett? Szerintem elfogadhatatlan. Addig nincs baj, ameddig x és y merev jelölők, pl. fizikai tárgyak nevei. Csakhogy a változók értékei nem kizárólag tárgyak lehetnek, hanem tárgyak jellemzőinek értékei, tárgyak állapotai is – pl. hőmérséklet, hely, elektromos potenciál – ez pedig különös következményhez vezet. Használjunk ugyanis egy olyan nyelvet az anyagi világ leírására, amelyik a filozófiában szokásos $F(x), R(xy)$ egy illetve kétargumentumú predikátumok helyett a fizikában vagy mérnöki tudományokban megszokott módon függvényeket használ. Tegyük fel, hogy $F(x)$ nek megfelel egy $a = f(x)$ kifejezés, $R(xy)$-nak pedig $b = g(xy)$ kifejezés. Erre a nyelvre lefordítva az elsőrendű logika formuláit bármely dolog tulajdonságának az állítása egy azonossági állítás lesz. Pl. annak, hogy x-forró t-kor az fog megfelelni, hogy forró=hőmérséklete(x, t). Így tehát ha a tűzhelyen lévő lábosban lévő víz most forró, akkor ez egy azonossági állítás ezen a nyelven, és ezért – az azonosság szükségszerűségét feltételezve – nem puszta ténygazság, hanem egyben szükségszerű igazság is. Épp így, ha én tegnap megbotlottam a küszöbön, akkor szükségszerűen botlottam meg, mert bármely dolog bármely tulajdonsága szükségszerűen igaz vagy nem igaz a korábbiak szerint. Ekkor viszont értelmetlenné válik a 'szükségszerű' operátor használata. Hiszen bármely dologra ha $F(x)$ akkor ennek fordítása $a = f(x)$, viszont ha $a = f(x)$ akkor szükségszerűen $a = f(x)$, viszont ezt visszafordítva, ha $F(x)$ akkor szükségszerű hogy $F(x)$. Így minden dolog minden tulajdonsága szükségszerű volna, semmi sem lenne esetleges, ami haszontalanná tenné a 'szükségszerű' fogalmának használatát. Az egyik lehetséges kiút, hogy a részben vagy egészében elvetjük a 'szükségszerű' és 'lehetséges' fogalmát alkalmazó kvantifikációt tartalmazó modális logikát, vagy megkülönböztetjük a nevek egy behatárolt körét, a merev jelölők, más szóval logikai tulajdonnevek kategóriáját, vagy a logika tárgyalási univerzumát az egyedi dolgok helyett, az egyedi dolgok fogalmaira változtatjuk. Utóbbi megoldás filozófiai szempontból elfogadhatatlan. Gondoljunk ugyanis bele, hogy csak a konkrét fizikai tárgyaknak van hőmérséklete, a tárgyak fogalmainak nincsen, azaz jókora különbség van a forró vasaló érintése, és a vasaló fogalmának megfelelő forróság elgondolása között. Utóbbi nem éget.[15]

3. A bináris relációk alapvető tulajdonságai

3.1. Áttekintés

Vizsgálatunk tárgyát képező szavak viszonyokat írnak le, mégpedig olyan viszonyokat, melyek két különböző vagy nem különböző dolog között állnak fenn. Másképp fogalmazva e szavak logikai elemzésben olyan hiányos kifejezések, melyek két üres helyet tartalmaznak, és ha az üres helyeket szabályos módon kitöltjük, akkor mondatokat kapunk. Az ilyen szavakat klasszikus logikai elemzésben 'kétargumentumú predikátum'-nak, némelykor 'bináris reláció'-nak nevezik. Néhány példa rögtön érthetővé teszi mindezt. Értelmetlenség azt mondani minden összefüggés nélkül, hogy 'Péter kisebb.' viszont értelmes az a mondat, hogy 'Péter kisebb mint Pál.' A 'Péter kisebb' mondat csak olyan helyzetben értelmes, ha tudjuk, hogy valakiről beszélünk, adott esetben Pálról, és arról a kérdésről, hogy ki az a családban aki kisebb mint Pál. Ilyen esetben értelmes lehet egy egyszavas válasz is, vagy egy töredékes kifejezés is, mint az, hogy 'Péter kisebb.' Mindezzel azt emeltem ki, hogy a 'kisebb' szó viszonyt ír le, amelyik két dolog között állhat fenn. Ilyen esetekre gondolok, hogy 'A szomszéd háza kisebb mint a polgármester háza'; 'Az én autóm kisebb mint a te autód. 'Ez a körte kisebb mint az asztalon lévő körte'. A 'kisebb' szó használatát logikai-grammatikai szempontból tehát úgy jellemezhetjük, hogy 'x kisebb mint y' ahol az x és y változók helyén az előbb említett egyedi dolog: ház, autó, gyümölcs vagy 'Péter' és 'Pál' szerepelhet. Amikor azt állítjuk, hogy Péter kisebb mint Pál, akkor személyek közötti viszonyról beszélünk, és nem magyar személynevek viszonyáról. Magyar személyneveket használunk ennek a viszonynak a leírására, de amiről beszélünk, azok nyelven kívüli dolgok. Az 'egyforma, felcserélhető, hasonló, egyenlő, azonos' szavak az előbbi példához hasonlóan kétargumentumú predikátumok, tehát használatuk sémája ilyen: x egyforma y-al; x felcserélhető y-al; x hasonló y-hoz. Más betűket is használhatunk a szerkezet kifejezésére, pl. így: z egyenlő v-vel, vagy w_1 azonos w_2-vel. Még egy technikai, jelölésbeli kérdésre kell kitérjek, ami néha nehezíti a megértést. Azt a logikai-grammatikai szerkezetet, hogy 'x idősebb mint y' gyakran célszerű ilyen formában fölírni: idősebb mint(x, y). Az 'idősebb' viszonyszó helyére egy általánosságot kifejező nagybetűt írva ezt kapjuk: $\Re(x, y)$. Ezt tehát úgy kell érteni, hogy $x\Re$ viszonyban áll y-al, ahol '$\Re$' jelen esetben az 'idősebb mint' kifejezést jelenti. Ennek a jelölésmódnak a tömörség és az áttekinthetőség a haszna.

Tekintsük azt a predikátumot, hogy 'testvére'. Ennek a logikai-grammatikai szerkezete ilyen: x testvére y-nak. Ezen kívül arra a kérdésre is válaszolnunk kell, hogy mik állhatnak x és y helyén? Egyedi dolgok állhatnak, de ennél több is igaz. Nem állhatnak almák és körték, kavicsok vagy üveggolyók, viszont élőlények igen. Sőt még ennél többet is tudunk. Tudjuk, hogy ha x testvére y-nak, és x személy, akkor y-is személy, vagy ha z testvére w-nek és z kutya, akkor w is kutya. A szó egy átvitt értelmében beszélhetünk testvérvárosokról is, de ez inkább csak színesíti a használatot. Nem követünk el súlyos hibát, ha úgy tekintjük, hogy a 'testvér' szó használata csak élőlények között értelmes. Úgy fejezhetjük ezt ki logikai szaknyelven, hogy a 'testvér' predikátum terjedelme élőlények rendezett párjainak halmaza. Ez semmi mást nem jelent, mint hogy mindig csak két dolog között áll fenn ez a viszony, és e dolgok élőlények. Még mást is tudunk a 'testvére' szó által meghatározott relációról. Azt is tudjuk, hogy szimmetrikus reláció, mert ha x testvére y-nak, akkor y is testvére x-nek. De ugyanakkor nem reflexív, mert senki sem testvére önmagának, azaz ha valaki egyedüli gyerek, akkor nincs testvére. Ennek viszont ellentmond, ha tranzitív relációnak tekintjük. Ez a következőképpen látható be. Bármely édestestvérekre, ha x testvére y-nak és y testvére z-nek, akkor x is testvére z-nek. Ez a tranzitív tulajdonság igaznak tűnik az édestestvérek halmazán. Ebből következik, hogy ha A és B testvérek, akkor B és A is testvérek, de mivel A testvére B-nek, és B testvére A-nak, akkor A is testvére kéne legyen A-nak, a tranzitív tulajdonság következtében. Ez pedig azt jelentené, hogy a 'testvére' reláció reflexív, amit az előbb kizártunk. Célszerű tehát a szó eredeti jelentését kissé megváltoztatva reflexív relációnak tekinteni a 'testvére' relációt, hogy a tranzitivitás tulajdonsága is érvényes legyen az édestestvérek között. Az így módosított értelemben a 'testvére*' reláció tehát reflexív is, szimmetrikus is és tranzitív is. Ezzel szemben aszimmetrikus reláció a 'felesége' vagy 'gyermeke', mert senki sem felesége vagy gyermeke önmagának, és ha x felesége y-nak, akkor fordítva nem áll; valamint ha z_1 gyermeke z_2-nek akkor z_2 nem gyermeke z_1-nek.

Lássunk egy másik példát. Az 'idősebb' kétargumentumú predikátum terjedelmébe személyek, növények és állatok is tartoznak, de épp úgy hajók, városok vagy borok és vallásos hitek vagy hangszerek, és zenei irányzatok, viszont nem tartoznak számok, vagy halmazok. Tudjuk azt is, hogy tranzitív relációt határoz meg az 'idősebb' viszony. Ez azt jelenti, hogy ha x idősebb mint y, és y idősebb mint z, akkor x is idősebb mint z. Az 'őse' predikátum által meghatározott reláció is tranzitív, hiszen ha x-nek őse y és y-nak őse z, akkor x-nek őse z is. Érdekes a következő példa. Különbözőféle relációkat határoz meg a 'szereti' predikátum – másképp fogalmazva a 'szereti' viszony – attól függően, hogy milyen emberek köréről beszélünk. Az önző, önelégült emberek halmazán ez egy pusztán reflexív reláció, mert az ilyen emberek csak önmagukat szeretik, a boldogtalan szerelmesek halmazán viszont aszimmetrikus, mert ha az egyik szereti a másikat, a másik sajnos nem szereti őt. Kiegyensúlyozott emberek baráti társaságában, ahol mindenki szereti a másikat és önmagát is, reflexív is és szimmetrikus is. Ez a példa bemutatta azt, hogy egy kétargumentumú predikátum – mint amilyen a 'szereti' – különböző halmazokon más-más bináris relációt határoz meg. A 'bináris' reláció dolgok párjai között áll fenn, ezzel szemben mondjuk a 'futballcsapat' egy értelmezése tizenegy tagú reláció a játékosok halmazán. Természetesen másképp is értelmezhetjük a klubokat, beleértve a futballcsapatokat is. Ezek a legegyszerűbb esetben halmazok, más esetben, ha még a portások, takarító személyzet és az épületek is részei a modellnek, akkor meglehetősen bonyolult matematikai struktúrát kapunk.

Eddig egyedi tulajdonságait ismertük meg a relációknak. Vannak azonban olyan relációk is, melyekre több reláció tulajdonság is teljesül. Ezekre is mutatok néhány példát.

Milyen reláció az egybevágóság a geometriában? Nyilván reflexív – mert minden alakzat egybevágó saját magával – szimmetrikus – ha az egyik egybevágó a másikkal, akkor a másik is az egyikkel – és tranzitív, mert ha az első egybevágó a másodikkal, és a második a harmadikkal, akkor az első is a harmadikkal. Az ilyen relációkat, melyekre ez a három követelmény egyaránt teljesül, 'ekvivalencia reláció'-nak nevezik. Ilyen a módosított értelmű 'édestestvére' reláció is. A jól olvasható festékfoltok egy halmazán ekvivalencia relációt határoz meg a 'betű' fogalma. Ez azonban csak akkor igaz, ha nem érdekelnek bennünket a betűtípusok, vagy a kézírás azonosítása. Hasonlóan ehhez a hangok halmazán egy ekvivalencia osztályt határozza meg a 'szó' fogalma, ha csak a jelentés érdekel bennünket, és nem érdeklődünk a kiejtés által kifejezett érzelem iránt. Ha játékvasutunk van, akkor a sínek között is meghatározhatunk egy ekvivalencia relációt. Egyformák lesznek az egyenlő hosszúságú és azonos alakú sínek. Ekkor az egyforma sínek egymással fölcserélhetők is lesznek. Egyformák egymással az azonos működésű és teljesítményű, valamint azonos fajta foglalatot igénylő villanykörték, de épp így az egyforma esernyők vagy sapkák egy bolt árukészletében. Vajon az egyforma dolgok minden esetben fölcserélhetők egymással? Később visszatérek erre a kérdésre.

3.2. Relációk és predikátumok

A relációknak többféle értelmezése is használatos. Röviden bemutatom ezeket, mielőtt tovább haladok. Alapvetően a bináris relációkkal foglalkozom, de ennek megértéséhez szükséges néhány elvont fogalom használata. Ilyenek a 'rendezett pár' és a halmazok Descartes szorzata. A rendezett párok jelek kéttagú sorozatai, melyek esetében megkülönböztetjük a jelek sorrendjét. Tehát $\langle a, b\rangle$ különbözik $\langle b, a\rangle$-tól és $\langle a, a\rangle$ különbözik $\langle a\rangle$-tól. Két halmaz Descartes szorzatán pedig rendezett párok olyan halmazát értjük, melyek első eleme az első halmazba, második eleme a második halmazba tartozik. Pl. legyen a két nem üres halmaz A és B a következő módon meghatározott. $A = \{a, b\}$ és $B = \{a, c\}$ Ekkor $A \times B$ jelöli a halmazok Descartes szorzatát (direkt szorzatnak is nevezik), ahol $A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$ A legegyszerűbb értelmezés rendezett párok valamely halmazát tekinti relációnak. Ekkor a rendezett párok halmaza, mint egy kétargumentumú predikátum terjedelme értelmezendő. Egy másik értelmezés szerint a relációk olyan rendezett hármasok: $\langle A, B, S\rangle$ ahol S részhalmaza $A \times B$-nek. S lehet üres halmaz is, és ha A és B közül az egyik üres, akkor S is üres. Ezt 'üres reláció'-nak nevezzük. Ebben a felfogásban 'homogén relációnak' nevezik az olyan relációkat, ahol A és B azonosak. Bármely bináris reláció úgy is tekinthető mint két halmaz egymáshoz való rendelése, ahol a hozzárendelést írják le az S halmaz elemeit jelentő rendezett párok. Más felfogásban éppen a leképezés az alapfogalom, és a relációkat értelmezik a leképezés fogalmának alkalmazásával. Én most egy harmadik utat követek. A következőkben a (bináris) relációk úgy értelmezettek, min egy $\langle M, S \rangle$ rendezett pár, ahol S részhalmaza $M \times M$-nek. Az előbb említett felfogásból nézve ezek tehát homogén relációk. Úgy is felfoghatjuk, hogy ebben az értelmezésben M az A és B halmazok egyesítése. Ettől a felfogástól csak a leképezések ábrázolásakor térek el, melyeket inhomogén relációknak fogom tekinteni. A relációkat mint 'predikátumok' által meghatározott struktúrákat értelmezem. Pl. a 'barátja' predikátum más és más barátokat határoz meg attól függően, hogy emberek mely körére szűkítjük le a vizsgálódás körét. A relációk tehát a mostani értelmezésben teljesen meghatározott matematikai struktúrák, ami azonban nem zárja ki, hogy maguk a relációk is rendszert alkossanak. Könnyen belátható, hogy a főváros lakosain értelmezett 'testvére' relációnak egy kibővítése az ország lakosain értelmezett 'testvére' reláció. És még ez utóbbi reláció is tovább bővíthető a kontinensek vagy a bolygó lakóinak irányába. Ennél is tovább lépve beszélhetünk az összes olyan relációról, melyek a 'testvére' relációhoz hasonlóan szimmetrikusak. Így eljutunk a 'reláció forma' fogalmához. Megjegyzem, hogy a következő gondolatok lényegét nem érinti, hogy melyik reláció felfogást fogadjuk el. Célszerű rögzíteni néhány további alapfogalmat a teljesség igénye nélkül.

3.3. Néhány fontosabb relációelméleti alapfogalom

$\Re$-üres reláció M halmazon := M halmaz semelyik két elem között nincs kapcsolat.

$\Re$-reláció valamely x és y eleme összehasonlítható := ha vagy x $\Re$-relációban van y-al vagy fordítva, y -relációban van x-el. Röviden $x\Re y$ vagy $y\Re x$. Nem zavarjon meg bennünket, hogy a bináris relációkat kétféle módon is szokták jelölni: $x\Re y$ vagy $\Re(x, y)$.

$\Re^{-1}$-reláció az eredeti $\Re$ reláció megfordítása := x akkor van kapcsolatban y-al, ha az eredeti reláció esetén $y\Re x$. Szokták ezt a reláció *konverzének* vagy *inverzének* is nevezni. Pl. a 'gyermeke' reláció megfordítása a 'szülője' reláció.

$\breve{\Re}$-reláció az eredeti $\Re$ reláció tranzitív lezártja := Az eredeti $\Re$ relációt olyan módon egészítjük ki, hogy igaz lesz bármely három x, y, z elemére, hogy ha x kapcsolatban van y-al és utóbbi z vel, akkor x is kapcsolatban – relációban – van z-vel. Ennek a nem könnyen érthető meghatározásnak azért nagy a jelentősége, mert segítségével értelmezhető az 'őse' vagy 'leszármazottja' reláció a 'gyermeke' reláció alapján. Ha x leszármazottja y-nak, akkor x vagy gyermeke y-nak, vagy gyermeke gyermekének, vagy gyermeke valamely gyermeke egy gyermekének, és a sor még tovább is folytatható.

A relációk szemléletesen ábrázolhatók táblázatokkal és nyilakkal is. Utóbbiakat a matematikában irányított gráfoknak nevezik. Legyen M halmaz két eleme 'a' és 'b' melyek között fennáll az $a\Re b$ reláció. (Mint említettem, ez így is felírható: $\Re(ab)$.) Ezt grafikusan is ábrázolhatjuk: $a \to b$. Ha fordított irányban is igaz a kapcsolat – $a\Re b$ ÉS $b\Re a$ – akkor így: $a \leftrightarrow b$. Ha viszont 'a' elem önmagával van kapcsolatban, akkor a belőle kiinduló nyíl önmagába tér vissza, és így mintegy hurokkal jelölhetjük ezt a relációt. A reflexív relációkat ilyen módon ábrázolva minden elemükön hurkot találunk.

Az alábbi táblázatokban szereplő '1' jel azokra a párokra áll fenn, amelyek között fennáll a reláció. A párokat vízszintes-függőleges sorrendben kell kiolvasni. Vajon miért írtam ugyanolyan sorrendben az alaphalmaz elemeit, mind a vízszintes, mind a függőleges oszlopban? Ezért, hogy szép szabályos ábrákat kapjunk bizonyos esetekben. Így a táblázatok ránézésre mutatják a relációk nevezetes tulajdonságait. Ha pl. egy reláció reflexív, akkor a relációt ábrázoló táblázat átlójában mindenütt '1'-jelet látunk. Ha nem azonos sorrendben lennének fölírva a táblázat vízszintes és függőleges oszlopában az elemek, akkor ez nem látszana ilyen szépen.

$\Re_1$	a	b	c	d
a	1			
b		1	1	
c			1	
d	1			1

Ahelyett, hogy azokat a rendezett párokat adom meg, amelyekre fennáll a reláció, megadhatom azokat is, amelyekre nem áll fenn, minden információveszteség nélkül. Természetesen a szokásokon túl, olyan szempontok is vezérelhetnek, hogy minél egyszerűbb legyen a táblázat. Ezért, ha majdnem minden négyzetbe '1'-et kell írnunk, akkor célszerűbb azokat a helyeket megadni, ahova nem kell '1'-et írnunk. Az is megeshet, hogy azoknak a pároknak a száma, amelyekre a reláció fönnáll, véges, ám azoké, amelyekre nem áll fenn, végtelen. Ilyenkor nyilván csak az egyik megadási mód a célszerű. Táblázat helyett megadhatjuk azon párok halmazát, amelyekre a reláció fönnáll (vagy nem áll fönn), valamilyen szabállyal is. Most a bináris relációk tulajdonságait csak táblázattal mutatom be, de célszerű gyakorlás képpen gráfokkal is ábrázolni a példákat. Legyen adott egy M halmaz melynek négy eleme az ABC első négy betűje által jelölt négy különböző dolog. Azaz $M = \{a, b, c, d\}$

$\Re_2$	a	b	c	d
a	1			
b			1	
c		1	1	
d				

$\Re_1$ reláció reflexív de nem szimmetrikus, mert d kapcsolatban áll a-val, de a nem áll kapcsolatban d-vel, és b kapcsolatban áll c-vel, de c nem áll kapcsolatban b-vel. Általánosságban: $\Re$ reflexív egy M halmazra nézve pontosan akkor ha M bármely x elemére $\Re(x, x)$. Az azonosság egy olyan viszony – az egyetlen ilyen viszony – amely reflexív és csak reflexív relációt határoz meg az élőlények és élettelen tárgyak halmazain. Mivel bármely tárgy csak önmagával azonos, ezért a tárgyak valamely M halmazán ennek a relációnak a meghatározásához nincs szükség az azonosság fogalmára. Egyszerűen az M halmazbeli $\langle x, x\rangle$ párok halmaza. A reflexív reláció ellentéte az irreflexív reláció. Akkor az átlóban csupa 0-t látunk.

$\Re_3$	a	b	c	d
a			1	1
b				
c				1
d				

$\Re_2$ reláció szimmetrikus, de nem reflexív, mert sem b sem d nincs kapcsolatban önmagával. Viszont M teszőleges x és y elemére, ha x kapcsolatban áll y-val akkor fordítva is igaz, azaz y is kapcsolatban áll x-el. Általánosságban: szimmetrikus egy M halmazra nézve pontosan akkor, ha M bármely x, y elemére $\Re(x, y)$, akkor $\Re(y, x)$. Ennek ellentéte az aszimmetrikus reláció. Ekkor a reláció x és y között legfeljebb csak az egyik irányban állhat fenn. Részleges ellentéte az antiszimmetrikus reláció. Ekkor ha x és y között mindkét irányban fennáll a reláció, akkor $x = y$.

$\Re_4$	a	b	c	d
a	1	1		
b	1	1		
c			1	1
d			1	1

$\Re_3$ reláció sem nem szimmetrikus, sem nem reflexív, viszont tranzitív, mert M teszőleges x, y és z elemére, ha x kapcsolatban áll y-val és yz-vel, akkor x is kapcsolatban áll z-vel. Általánosságban: $\Re$ tranzitív egy M halmazra nézve pontosan akkor ha M bármely x, y, z elemeire ha $\Re(x, y)$ és $\Re(y, z)$ akkor $\Re(x, z)$. $\Re_4$ reláció szimmetrikus, reflexív és tranzitív, melyet ekvivalencia relációnak neveznek. Figyeljünk föl arra, hogy az eredeti M halmazt olyan egymással nem keveredő részekre oszthatjuk, hogy azokon belül bármely két elem kapcsolatban fog állni egymással. Jelen esetben ezek az $\{a, b\}$ és $\{c, d\}$ részhalmazok.

$\Re_5$	a	b	c	d
a	1	1		
b	1	1	1	
c		1	1	1
d			1	1

Bebizonyítható, hogy bármely ekvivalencia reláció M alaphalamaza felosztható ilyen módon. Ezeket a részhalmazokat *ekvivalencia osztályoknak* nevezik. Tetszőleges két elem pontosan akkor van ekvivalencia relációban egymással, ha van olyan ekvivalencia osztály, melynek mindketten elemei. $\Re_5$ reláció szimmetrikus és reflexív, viszont nem tranzitív. Az ilyen relációkat tolerancia relációnak nevezik. A relációk most bemutatott tulajdonságai – reflexív, szimmetrikus, tranzitív – azért fontosak, mert ha egy alaphalmazon érvényesek, akkor azon belül minden szűkítésén is érvényesek. Ezek a reláció tulajdonságok tehát a szűkítést tekintve öröklődnek.[16]

3.4. Két egyszerű példa

1. Rendeljük minden egész számhoz a kettővel való osztási maradékát. Ekkor egy olyan ekvivalencia relációt kapunk, ahol bármely két páros, illetve bármely két páratlan szám egyazon ekvivalencia osztályba tartozik. Két szám akkor lesz relációban, ha az osztási maradéka zérus, vagy ha az osztási

maradéka nem zérus. Vegyük alapul csak az első tíz természetes számot, a nullát is beleértve. M a természetes számok egy részhalmaza, L a dolgokhoz rendelt jegyek – osztási maradékok – halmaza. $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $L = \{0, 1\}$ A következő táblázat mutatja a számokat és alatta az osztási maradékot.

Szám	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
osztási maradék	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

mod	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1		1		1		1		1	
1		1		1		1		1		1
2	1		1		1		1		1	
3		1		1		1		1		1
4	1		1		1		1		1	
5		1		1		1		1		1
6	1		1		1		1		1	
7		1		1		1		1		1
8	1		1		1		1		1	
9		1		1		1		1		1

Ha másképp rendezzük sorba az alaphalmaz elemeit, szemléletesebb ábrát kapunk.

mod	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9
0	1	1	1	1	1					
2	1	1	1	1	1					
4	1	1	1	1	1					
6	1	1	1	1	1					
8	1	1	1	1	1					
1						1	1	1	1	1
3						1	1	1	1	1
5						1	1	1	1	1
7						1	1	1	1	1
9						1	1	1	1	1

Két ekvivalencia osztályunk van: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ és $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ Figyeljük meg, hogy két szám ekvivalens – azonos a kettővel való osztási maradéka – ha egy ekvivalencia osztályba tartoznak.

2. Az 'azonos' kétargumentumú predikátum terjedelmét reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk alkotják. Beletartozik az összes 'hasonlóság' és 'egyformaság' reláció közös részét képező reflexív reláció, amit annak geometriai alakja alapján 'diagonális reláció'-nak is neveznek. (Ha nem azonos

sorrendben lennének fölsorolva az elemek a relációt megadó táblázat soraiban és oszlopaiban, nem lenne értelme az elnevezésnek.) Az egyformaság és a hasonlóság a jeleken kívüli világ leírásakor élőlények vagy élettelen tárgyak közötti viszony. Ugyanezen tartományon az azonosság reláció használata az egyformaság elfajulása, annak szélső esete, a diagonális reláció. Ezért az azonosság sem a '=' jel két oldalán álló jelek, hanem a jelek által jelölt dolgok közötti viszony. Ezek adott esetben lehetnek fizikailag érzékelhető tárgyak, de lehetnek számok vagy halmazok is. Az '=' jel mást és mást jelent a geometriában vagy a programozási nyelvekben, bár a jelentések hasonlóak. Két háromszög oldalainak egyenlő hosszúsága semmiképp sem azt jelenti, hogy a két oldal azonos volna, csupán azt, hogy a hosszúságuk azonos. Hasonlóképpen, két fizikai tárgy egyenlő súlya vagy tömege sem azonosságot, csupán a fizikai jellemzőjükhöz rendelt számok azonosságát jelenti. Éppen ebben van a mérések haszna. A programozási nyelvekben a '=' jel gyakran nem relációt, hanem értékadást jelent.

Az azonosság egy nem triviális felcserélhetőséget (matematikai nézőpontból ekvivalencia relációt) határoz meg adott nyelven belül a jelek, számok, formulák világában, és amennyiben a jelek a külső fizikailag érzékelhető világra vonatkoznak, szintén nem triviális relációt a fizikai tárgyak világában. Hogy ez a reláció mennyire nem triviális, azt a tudomány és technikatörténet bizonyítja. Az azonosság által meghatározott fölcserélhetőség épp úgy kérdéseket vethet fel a jelek világán belül, mint az egyformaság és fölcserélhetőség viszonya a fizikai tárgyak világában.

4. Hasonlóságtól az egyformaságig

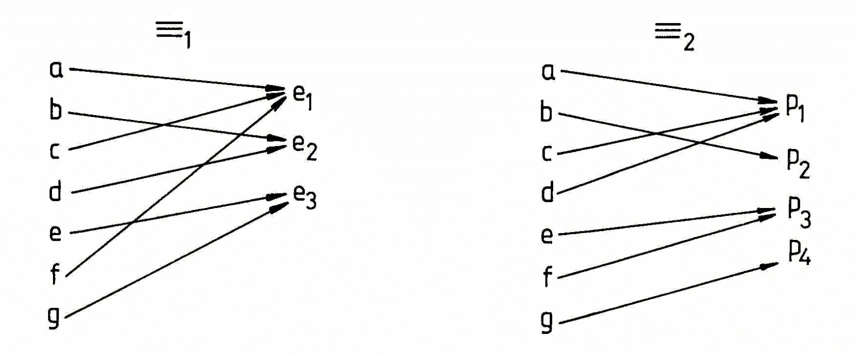
4.1. Áttekintés

A toleranciareláció reflexív és szimmetrikus, mert minden dolog hasonlít önmagához, és ha az egyik dolog hasonlít a másikhoz, akkor a másik is hasonít az egyikhez. Ha a toleranciát mint a 'hasonlóság' matematikai megfogalmazását tekintjük, akkor vitatható lehet a reflexivitás tulajdonsága. Ugyanis egy egyenesen irreflexív (irreflexív=nem reflexív), de szimmetrikus relációt is a hasonlóság kifejezőjének tarthatjuk. Ilyen reláció például a 'rímel' a magyar szavak halmazán. „Nyilván, hogy ha x szó rímel y szóval, akkor ez fordítva is igaz. A verselési hagyományok szerint azonban egy szó önmagával nem rímelhet, tehát ez a reláció irreflexív. ...Bár ellenpéldákat lehet találni egyes költőknél. Mint a Tinódi százötven 'valá' -ja ...".[17] Nyilvánvaló, hogy egy irreflexív, de szimmetrikus reláció nem lehet tranzitív. Konstruálható ugyanis olyan rímsorozat, ahol az egymást követő szavak rímelnek egymással, az első és utolsó azonban nem. Ha azonban el is vetjük a reflexivitást, a kapott reláció éppúgy megadható lesz, M halmaz elemeinek L halmaz elemeihez, a jegyekhez való hozzárendelésével, mint egy reflexív reláció.

Az egyformaságot és hasonlóságot használati tárgyak, nyelvek, szavak, szokások, emberek és csillagok, általában tetszőleges objektumok között értelmezhetjük. Az egyformaság a hasonlóság szélső esete. „A hasonló objektumok nem bonthatók fel élesen olyan osztályokra, ahol az egy osztályon belüliek hasonlók, a különböző osztályokba tartozók pedig nem. A szituációk sokkal elmosódottabbak, nincsenek éles határok. Minden halmazbeli elem tartalmaz bizonyos információt a hozzá hasonló elemekről. De nem tartalmaz minden információt mint az egyforma elemek esetében. Nem úgy áll a probléma, hogy minden vagy semmi, teljes infor-máció vagy teljes információtlanság. Különböző fokozatai lehetnek annak az információnak, amit az egyik elem hordoz más elemekről."[18] Lássunk néhány példát.

4.2. A féltestvére reláció

Rendeljük az $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$-beli emberekhez hozzá az édesanyjukat, és legyenek egyformák azok az emberek, akiknek azonos az édesanyjuk. Az anyák halmaza $L_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Ezt a relációt $\equiv_1$ jelöli. Ehhez hasonlóan legyenek egyformák azok az emberek, akiknek azonos az édesapjuk. Az apák halmaza $L_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Utóbbi relációt $\equiv_2$ jelöli. Ebben a példában a szülők és gyerekek közötti reláció inhomogén reláció, mivel két különböző alaphalmazon van értelmezve a kapcsolat, míg a gyerekek relációi homogén relációk. Az emberek és szüleik relációit mutatja az alábbi a 5. ábra:



5. ábra. Testvére reláció

Ábrázoljuk táblázatokkal ezt a két ekvivalencia relációt. Az első ($\equiv_1$) azokat mutatja akiknek közös az édesanyjuk, a második ($\equiv_2$) azokat akinek az édesapjuk.

A táblázatokat más módon is elkészíthetjük, úgy hogy más sorrendben írjuk föl a halmazok elemeit.

Valójában ezek a relációk nem pontosan a 'féltestvére' kapcsolatot írják le, mivel úgy tekintik, hogy az egyedüli gyereknek is van féltestvére, éspedig önmaga. Tehát ezek a relációk egy reflexív relációval kibővített féltestvére relációt ábrázolnak. Ez hasznos a matematikai elegancia szempontjából,

$\equiv_1$	a	b	c	d	e	f	g
a	1		1			1	
b		1		1			
c	1		1			1	
d		1		1			
e					1		1
f	1		1			1	
g					1		1

$\equiv_2$	a	b	c	d	e	f	g
a	1		1	1			
b		1					
c	1		1	1			
d	1		1	1			
e					1	1	
f					1	1	
g							1

mert egyszerűbbé teszi az összefüggések tárgyalását. Ezek azután ábrázoljuk az 'édestestvére' és a 'féltestvére' relációt egy-egy táblázattal.

Az 'édestestvére' reláció ekvivalencia reláció (azzal a kis hibával, hogy mindenki testvére önmagának), míg a 'féltestvére' reláció tolerancia reláció. Mindkét relációt meghatározzák az ekvivalencia illetve a tolerancia osztályok. Két elem akkor és csak akkor ekvivalens, ha van őket tartalmazó *ekvivalencia osztály*, és ehhez hasonlóan, két elem akkor hasonlít egymásra – akkor van tolerancia relációban – ha van őket tartalmazó *tolerancia osztály*. Az előbbiek a $\{a, c\}\{b\}\{d\}\{e\}\{f\}\{g\}$ halmazok, míg a tolerancia osztályok a következők: $\{b, d\}\{d, c, a\}\{c, a, f\}\{f, e\}\{e, g\}$. A példák elektronikus formában is tanulmányozhatók. Innen letölthetők:

`http://ferenc.andrasek.hu/modellek/hasonlosag.xls`

4.3. A látás

Legyen '*d*' a szem felbontóképességének határa, olyan kis érték, amelyen belül lévő pontokat a szem nem tudja megkülönböztetni egymástól. Vegyünk fel egy egyenes szakaszon n osztáspontot úgy, hogy a szomszédos pontok egymástól való távolsága kisebb legyen, mint d. A szakaszon lévő egymás melletti pontok nyilván nem különböztethetők meg egymástól, de a szakasz távolabbi pontjai már igen. Nevezzünk két pontot hasonlónak, ha a szakaszon lévő távolságuk kisebb, mint d. A pontokat nevezzük el az első tíz természetes számmal, és tételezzük föl, hogy a szem azon pontokat tudja megkülönböztetni, amelyek három egységnél távolabb vannak. A három egységen belüli pontokat így hasonlónak fogjuk tekinteni. Ennek a reláci-

$\equiv_1$	a	c	d	b	e	f	g
a	1	1	1				
c	1	1	1				
d	1	1	1				
b				1	1		
e				1	1		
f						1	1
g						1	1

$\equiv_2$	a	c	d	b	e	f	g
a	1	1	1				
c	1	1	1				
d	1	1	1				
b				1			
e					1	1	
f					1	1	
g							1

ónak a táblázatát mutatja a következő ábra. Az 4.3. ábrán jól látszanak az egymásba átfolyó tolerancia osztályok. Két pont összemosódik – nem megkülönböztethető – ha egy tolerancia osztályba esik.

Talán Wittgenstein volt az első, aki fölfigyelt a tolerancia relációk struktúrájára a nyelvi jelentés tanulmányozása során. A természetes nyelv képlékeny jelentés hálózatát sokkal jobb közelítéssel írhatjuk le tolerancia relációkkal, mint ekvivalencia relációkkal.[19]

5. Egyformaság és fölcserélhetőség

5.1. Áttekintés

A józan ész nem sorolja a szilárd testek tulajdonságaihoz térbeli helyüket, és egyes tulajdonságaik megváltozását sem, ha azok nem fontos változások. Egy asztal ugyanaz marad, ha máshová teszem, ha haraggal nézek reá, vagy más leltári jegyet ragasztok rá. Ezeket külső tulajdonságoknak nevezik, míg az asztal belső tulajdonságához tartozik, hogy a politúr egy kicsit megkopott vagy sem, vagy milyen az asztallábak formája és anyagminősége. Amennyiben kopottnak tartjuk, úgy tekintjük, hogy egy tulajdonsága megváltozott, nem pedig, hogy egy új asztal keletkezett.

Képzeljük egy, hogy egy kerékpár alkatrészeit az évek során egymás után kicseréljük, a kicserélt hibás alkatrészeket pedig egy zsákban összegyűjtjük. A kerékpár időben szomszédos állapotait mindaddig hasonlónak tartjuk, amíg apró alkatrészeket cserélünk ki rajta. Mindaddig úgy véljük ez az eredeti kerékpár, csak felújítottuk. Mit mondunk azonban, ha a kerékpár

édestestvére	a	c	b	d	e	f	g
a	1	1					
c	1	1					
b			1				
d				1			
e					1		
f						1	
g							1

féltestvére	b	d	c	a	f	e	g
b	1	1					
d	1	1	1	1			
c		1	1	1	1		
a		1	1	1	1		
f			1	1	1	1	
e					1	1	1
g						1	1

vázát vagyunk kénytelenek kicserélni? Ekkor új kerékpárunk lesz és a régi megszűnik létezni, avagy a régit használjuk tovább új vázzal? És mi van a zsákban? Mi történik, ha a zsákban lévő kopott, hibás alkatrészekből összeszerelünk egy kerékpárt, ekkor melyik a mi kerékpárunk?[20]

Nincs az ehhez hasonló kérdésekre általános válasz, mert nincs a tárgyaknak és a gyakorlati használattól és nyelvtől független lényege. Hogy mely szempontok alapján, mely jellemzők, mely jegyek, tulajdonságok alkalmazásával csoportosítjuk a tárgyakat és jelenségeket, gyakorlati céloktól függ, és nincs a szempontoknak egy eleve elrendelt, egyedül helyes osztályozási módja. A következőkben példákat mutatok arra, hogy miképp csoportosíthatók az egyforma dolgok különféle szempontok alapján.

5.2. Példa

Vegyük az emberek halmazát, és tekintsük egyformának azokat az embereket, akiknek azonos az életkoruk és foglalkozásuk. Ezt a relációt megadhatjuk oly módon, hogy minden egyes emberhez hozzárendeljük az életkorát és a foglalkozását. Egyformák lesznek azok az emberek, akikhez egyazon életkort és foglalkozást rendeltünk. Külön kérdés, hogy hogyan osztályozzuk a foglalkozással nem rendelkező embereket? Egy lehetséges megoldás az, hogy ezekhez 'foglalkozással nem rendelkezik' jegyet, rendeljük.

Felbontóképeesség	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1							
1	1	1	1	1						
2	1	1	1	1	1					
3		1	1	1	1	1				
4			1	1	1	1	1			
5				1	1	1	1	1		
6					1	1	1	1	1	
7						1	1	1	1	1
8							1	1	1	1
9								1	1	1

5.3. Példa

Vegyünk egy műszaki példát is. Az a feladatunk, hogy egy tartószerkezetben, amelyben néhány csavar tönkrement, a hibás csavarokat hibátlan csavarokkal helyettesítsünk. Ehhez meg kell határoznunk a csavarok azon tulajdonságait, amelyeknek igaznak kell lennie azon csavarokra, amelyeket a hibásak helyébe tehetünk. Tehát osztályoznunk kell a raktárunkban található csavarokat. Az osztályozás több jegy alapján fog történni. Ha ezek után megadják, hogy mely jellemzők, paraméterek a lényegesek a tartószerkezet egy adott helyén, akkor meg tudjuk határozni azon csavarok halmazát, amelyek ott fölhasználhatók. Az egyforma csavarok halmazai egy ekvivalencia relációt határoznak meg. A csavarokat egyformának tekinthetjük, minden egyes jellemzőjük alapján külön-külön, majd ennek alapján megadhatjuk a jellemzők bármely együttesére nézve az egyforma csavarok osztályait.

5.4. Példa

Az ekvivalencia reláció fogalmával értelmezhető a jeltípus fogalma is. Az egyforma jelpéldányok egymással fölcserélhetők, ezért a jelpéldányok halmazán értelmezünk egy ekvivalencia relációt a jelpéldányok tipográfiájának bizonyos egyforma tulajdonságai alapján, és az egy ekvivalencia osztályba sorolt jelek adják egy jeltípus terjedelmét. Bizonyos egyforma festékfoltok ekvivalencia osztályai a számjelek, és az egyforma számot megnevező számjelek ekvivalencia osztályai a számok. Hasonló összefüggés áll fenn a hangok, szavak és fogalmak között. Ezt mutatja az alábbi táblázat.

Jelpéldányok	Jelek	Gondolatok
Festékfoltok, képernyő fénypontok alakzatai, megnyilatkozások, hangok, tapintási érzetek, kézjelek látványai	Szavak, számjelek, azokat tartalmazó kifejezések, mondatok	Számok, fogalmak, propozíciók

A XX. század előtt az ábrák, hangok nem, vagy csak körülményesen voltak továbbíthatók, és ezért különös hangsúlyt kapott a nyelv írott formája. A jelpéldányok azonban sem az írott, sem a szóbeli nyelven nem kommunikálhatók, ezért kellet megalkotnunk a 'számjegy', 'szó' és 'mondat' fogalmát, ahonnan már csak egy lépés volt a 'szám', 'fogalom' és 'gondolat' fogalma. Pl. az 1, a $sin(\Pi/2)$, $lg(10)$ jelek egyazon számot nevezik meg, így ezek fölcserélhetők és ezért egy ekvivalencia osztályba tartoznak. A szavak és kifejezések az általuk kifejezett fogalom, míg a mondatok az általuk kifejezett gondolat alapján sorolhatók az egyformaság ekvivalencia osztályaiba. Az, hogy a számokat jelek ekvivalencia osztályai neveinek tekintjük, vagy ideális létezőknek melyeket megneveznek az ekvivalencia osztályok elemei, filozófiai álláspont kérdése.

6. Mire használható, mit jelent az egyformaság a gyakorlatban?

6.1. Gyakorlati alkalmazások

Az egyformaság némelyik esetben a tárgyak, objektumok fölcserélhetőségét határozza meg. Egy elektronikai áramkörben egy alkatrész, pl. egy $1k\Omega$-os ellenállás kicserélhető vele azonos értékű, elektromos teljesítményű és zajtényezőjű másik ellenállással. Figyelmünk kiterjedhet még a lábak vastagságára és a geometriai méretekre, valamint az elrendezésre is, de lehet, hogy az ellenállás színe, vagy az ára már nem érdekel bennünket. A geometriai méretek közül is csak néhány alapvetően fontosra terjed ki a figyelmünk. Ha viszont ez az ellenállás egy modern képzőművészeti alkotásban szerepel, akkor a színe és alakja is lényeges lehet. De nem mindig ilyen egyszerű a helyzet. Lehetséges, hogy egy rendszer valamely tagjával sikerül egyforma tagot találnunk, de a rendszer nem viseli el a két tárgy közötti felcserélés során keletkezett átmeneti állapotot. Más esetben a rendszer a beavatkozás során csak úgy válik ismét működőképessé, ha egy x alkatrészét egy olyan y alkatrészre cserélik ki, amelyik éppen nem egyforma x alkatrésszel, hanem attól valamilyen szempontból eltér. Erre példa, ha egy szöget kihúzunk a helyéről, akkor nem célszerű oda sem ugyanazt a szöget, sem más vele egyforma szöget visszakalapálni, hanem csak valamivel nagyobbat. Ha egy nagy megbízhatóságot igénylő berendezésből vizsgálat céljára kiforrasztunk egy alkatrészt, akkor gyakran előírják, hogy ugyanazt az alkatrészt, (tehát a már egyszer kiforrasztott alkatrészt) nem szabad visszaültetni a helyére, hanem csak egy vele egyforma (azonos), de új alkatrészt. Itt láthatóan nem teljesül a felcserélhetőség reflexív jellege. Vegyünk szemügyre jó sok csavart és csavar anyát. A csavarokat jellemzi az átmérő, a menetemelkedés, az anyagminőség, a felületkezelés, a hossz, a csavarokat a fej formája, az anyacsavar alakja, és talán még az is, hogy új-e a csavar és anya vagy használt. A használattól függően egyes jegyek, jellemzők fontosak lehetnek, mások meg nem. Kritikus alkalmazáskor még azt is előírhatják, hogy minden egyes csavart egyenként meg kell vizsgálni a fizikai szilárdság szempontjából, és ilyenkor ez is egy fontos jegy, egy fontos jellemző lesz. Lényeges lehet még a csavar ára is, vagy a beszállítási idő, ha a költségek és a gyártási idő nem mellékesek. Figyeljünk föl arra, hogy nincs eleve elrendelve, hogy mely csavarok egyformák és melyek nem. A lényeges jellemzőket (jegyeket) nekünk kell kellő körültekintéssel meghatározni, valamiféle fogalmi elemzés ebben nem lehet segítségünkre. Ismét a gyakorlati alkalmazás dönti el a lényeges és lényegtelen jellemzők, tulajdonságok megkülönböztetését. Felcserélhetők-e egymással az egyforma csavarok? Ne hamarkodjuk el a választ. Képzeljünk egy hidat, ahol a feladatunk a rozsdás, elöregedett csavarok ellenőrzése, és kicserélése. Vajon ekkor fölcserélhetők-e egymással az egyforma öreg csavarok, vagy akár egy rozsdás csavar önmagával? Lehetséges, hogy egy beteg szívű embernek a szívével egyforma szívet sikerül találni, olyat, amelyik minden szükséges szempontból megfelelő egy szívátültetés céljára, nem vált ki pl. immunválaszt a szervezetből. Ez azonban még nem jelenti, hogy a beteg megoperálható, hisz lehet, hogy más okok – pl. a beteg kora – az operációt nem teszi lehetővé. Az is nyilvánvaló, hogy egy szívátültetés során nem a régivel teljesen egyforma másik beteg szívet operálnak a testbe, hanem éppen ellenkezőleg egy egészséges szervet. Látható, hogy két objektum felcserélhetősége nem mindig ekvivalencia relációt határoz meg. Mindezekből levonhatjuk azt a következtetést, hogy a felcserélhetőség korántsem jelent mindig egyformaságot.

6.2. Azonosság és fölcserélhetőség

A matematika gyakorlatilag lehetetlenné válna az azonosságpredikátum (azonosság reláció) alkalmazása nélkül. A matematika számait kapcsolatba hozzuk a valósággal, és ilyen módon hasznos adatokat tudunk átadni egymásnak, és némelykor még bizonyos eseményeket is előre ki tudunk számolni formulák (képletek) segítségével. Az azonosság predikátumra tehát nem csak azért van szükség, mert néha egy dolognak két neve is van, hanem hogy összekapcsoljunk dolgokat és jeleket.[21]

Az azonosság haszna az, hogy lehetőséget ad a kifejezések átalakítására az igazság megváltozása nélkül, de a kifejezés praktikus használhatóságának jelentős megváltozásával. Az 'a azonos b-vel' séma akkor és csak akkor igaz, ha az 'a' és 'b' individuumnevek ugyanazt az individuumot nevezik meg. Világítsa meg ezt a tételt két példa. Gr. Széchenyi István Naplóját olvasva megállapíthatjuk, hogy Széchenyi br. Eötvös Józsefet gyakran 'Eötvös Pepi' néven említi. Nem szükséges kifejteni a 'Pepi' és a 'József' közötti stiláris, hangulati különbséget. Ezt úgy fejezi ki a logikai szaknyelv, hogy az 'Eötvös József' és az 'Eötvös Pepi' nevek jelentése különböző – intenzionálisan nem azonos –, bár az általuk megnevezett dolgok – az extenziójuk, vagy más szóval faktuális értékük – azonosak. Mi azonban most nem törődünk az intenziókkal, figyelmünk az extenziókra irányul. Ezért a hangulati, jelentésbeli különbség ellenére csak a jelöletekre figyelve a két nevet azonosnak tekintjük. Tehát: br. Eötvös József = Eötvös Pepi. Ehhez hasonló a következő példa. Radnóti Miklós bizonyos műveit álnéven írta. Ez alapján állítjuk, hogy Radnóti Miklós = Eaton Darr. Ám, ha ez igaz, akkor igaz kell legyen a következő is: Radnóti Miklós munkái és Eaton Darr munkái azonosak. Ez hamisságnak tűnik, hisz Radnóti csak bizonyos munkáit írta álnéven. Amit álnéven írt, azt álnéven írta és nem a valódi nevén. Hamisságnak tűnik, de mégsem az. Amire ugyanis ez az érv utal, az a következő állítás lenne: A 'Radnóti Miklós' néven írt munkák azonosak az 'Eaton Darr' néven írt munkákkal. Ez az utóbbi állítás valóban hamis, de nem ekvivalens (felcserélhető az igazság megsértése nélkül) az előzővel. Az előzőnél ugyanis a neveket használjuk – a nevek jelölt értelemben szerepelnek, és e egykor élt valóságos személyre utalnak, aki bizonyos verseket írt – míg az utóbbi esetben a neveket említjük, amit kiemel az idézőjelek használata.

Egy rossz tanuló is tudja, hogy $1 = 1$, viszont nyilvánvalóan nem igaz, hogy egy rossz tanuló is tudja, hogy $1 = sin(\Pi/2)$. Az olyan szavak, mint 'tudja', 'hiszi', 'gondolja' megváltoztatják az utánuk következő szavak, kifejezések használati módját. Nem használják a szavakat (jeleket), hanem említik, és ilyen esetben nem érvényes az azonosak felcserélhetőségének törvénye.[22]

A felcserélhetőség tehát a tárgyak világához hasonlóan a jelek világában sem triviális kérdés. Más szempontból sem az. A matematika egész története azt bizonyítja, hogy a jelek világában milyen fáradtságos munkával lehet az azonosságot felismerni, nem is szólva a régóta megoldatlan matematikai kérdésekről. Az azonossággal kapcsolatos filozófiai kérdések közül az egyik legérdekesebb, hogy az azonosság olyan alkalmazásai mondanak gyakran legtöbbet a tárgyi világról, amelyek tisztán a jelek, pl. a matematika világán belül maradnak. A felszínes gondolkodás azt hihetné, hogy ha az azonosságot valamely, a tárgyaktól távoli tartományban használjuk – pl. a mátrixok világában – akkor annak már nagyon kevés köze lehet a 'valósághoz'. Ennek épp az ellenkezője az igaz. Miközben a fizikus matematikai formába önti a fizikai világról való teóriáit, és ez alapján jóslásokat végez, akkor nem tesz mást, mint, hogy alkalmazza az azonosságpredikátumot tisztán a matematikai formulák világában, azaz számításokat, levezetéseket, átalakításokat végez. Az azonosság kapcsolata különös módon épp ott a legtermékenyebb a tárgyi világgal, ahol a felületes szemlélő a legnagyobb távolságot látja. Ha a matematikát csak és kizárólag önkényes játékszabályok gyűjteményének tekintjük, akkor megfoghatatlan marad, hogy miképp lehetséges ez?

7. Önazonosság a fizikai tárgyak világában

7.1. A tér-időbeliség elve (Space-Time Principle)

Az elv endurantista felfogásban:

(STP-end)

$$\forall x. x - \text{makrofizikai tárgy vagy élőlény} \rightarrow (\exists t \exists Y(Y(x,t)\,\&\, t - \text{ időpont}) \\ \rightarrow \exists k \exists v(v\ k\text{-koordináta rendszerben } x\text{-világvonala})).$$

Egyszerűen fogalmazva, bármely élőlény vagy makrofizikai tárgy az időben létezik, és ameddig létezik, mindig van helye.

Az elv a fizikából származik, de nem ismeretelméleti jellegű kikötés. Egy makrofizikai tárgynak akkor is van helye, ha csak pontatlanul vagy egyáltalán nem tudjuk meghatározni azt. A K koordinátarendszer feltételezése nem jelenti az abszolút tér föltételezését, csak azt, hogy fizikai tárgyak – és ebbe most a mikrofizika tárgyai is beleértendők – nem létezhetnek téren és időn kívül. Ezt a metafizikai föltevést megfogalmazhatjuk perdurantista felfogásban is:

(STP-perd)

$$\forall x. x\text{-makrofizikai tárgy vagy élőlény} \rightarrow \\ \exists y \exists k \exists t(y = x\text{-időszelete } t - \text{kor } k\text{-koordinátarendszerben} \rightarrow \\ \exists z(z = x\text{-helye } t - \text{kor } k \text{ koordináta rendszerben}))$$

7.2. Gyengített Lockiánus elv (Weak Lockean Principle)

Térjünk rá az azonosság vizsgálatára a fizikai tárgyak, azon belül a makroszkopikus fizikai tárgyak egy meghatározott köre vizsgálatára.[23] Feltételezzük, hogy ezek a tárgyak szilárdak és tömörek, tehát pl. nem folyadék cseppek. Az ilyen objektumok közül semelyik kettő nem lehet egy időpontban egyazon helyen, de még közös részeik sem lehetnek. Élőlények esetén ez a kikötés nem feltétlen teljesül, gondoljunk csak a sziámi ikrekre. Összetett tárgyak esetén sem mindig teljesül, pl. lehet két lakásnak közös helysége. Természetesen feltételezzük, hogy egyazon koordináta rendszert használunk a tárgyak helyének meghatározása során, különben a kikötés triviálisan hamis volna. Ezt a feltevést mind endurantista, mind perdurantisa módon megfogalmazhatjuk:

(WLP-end1)

$$\forall x \forall y \forall t.(x, y - \text{ makroszkopikus fizikai tárgy } \& \, t - \text{időpont }) \rightarrow \\ (\text{helye}(x,t) = \text{helye}(y,t) \rightarrow x = y)$$

Ha két tömör makroszkopikus tárgynak egyazon időpontban megegyezik a helye, akkor az egy tárgy.[24]

(WLP-perd1)

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall t.((x, y - \text{makroszkopikus fizikai tárgy } \& \; t - \text{időpont}) \rightarrow ((u = x \text{ időszelete } t - \text{kor } \& \, v = y \text{ időszelete } t - kor \; \& \, \text{helye}(u, t) = \text{helye}(v, t)) \rightarrow u = v)$$

Mivel a fizikai tárgyak időben keletkeznek és megszűnnek létezni, ezért időbeli jellemzőik – pl. a helyük – parciális függvények. A fenti tétel megfordítását is igaznak tartjuk: egy makroszkopikus fizikai tárgy nem létezhet egy időpontban egynél több helyen:

(WLP-end2)

$$\forall x \forall y \forall t.(x, y - \text{makroszkopikus fizikai tárgy } \& \, t - \text{időpont}) \rightarrow (x = y \rightarrow \text{helye}(x, t) = \text{helye}(y, t))$$

Ha két makroszkopikus tárgy azonos, akkor bármely időpontban megegyezik a helyük.

(WLP-perd2)

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \forall t.(x, y - \text{makroszkopikus fizikai tárgy } \& \; t - \text{időpont}) \rightarrow ((u = x \text{ időszelete } t - \text{kor} \, \& \, v = y\text{időszelete } t - \text{kor} \; \& \, u = v) \rightarrow \text{helye}(u, t) {=} \text{helye}(v, t))$$

Ha feltételezzük, hogy egy tárgy mindaddig amíg létezik, addig folyamatosan létezik, akkor azt a tárgyat egyértelműen azonosítja a világvonala, azaz a tér-idő függvénye. Összetett tárgyak részeikre bontva megszűnnek létezni, viszont újra konstruálásuk esetén ismét léteznek. Ha egy tárgy megszűnik létezni, majd később újra folytatja létezését, akkor nem teljesül az a kikötés, hogy világvonaluk egyértelműen azonosítja őket, mivel a világvonalukban szakadás van, és kérdéses lehet, hogy mely tárgynak folytatása a következő folytonos világvonal szakasz. Az viszont általánosan igaz, hogy egy helyen egyazon időpontban nem lehet két makroszkopikus tárgy, azok világvonalai nem metszhetik egymást. (Egy elemi rész átszáguldhat egy kavicson, de egy másik kavics nem.) A fizikában szokásos föltevés az is, hogy a tárgy fizikai jellemzői változásának minden időpillanatban meghatározott értéke van – azaz matematikai nyelven szólva az összes fizikai jellemzőjét leíró függvény differenciálható függvény – amely erősebb kikötés annál, hogy a jellemzők változásait folytonos függvények írják le.

A makroszkopikus fizikai tárgyak körében önazonosság fogalmunk az ideális merev testekhez kapcsolódik. Azért kapcsolódik az ideális merev testekhez, mert azok hasonlítanak legjobban az olyan örök és változatlan tárgyakhoz, melyekkel kapcsolatban azt reméljük, hogy az önazonosság kérdése nem vet föl problémákat. Aztán amint kezdünk eltávolodni a merev testektől és megérkezünk az összetett tárgyak és élőlények birodalmába, egyre nehezebb kérdésekkel szembesülünk. Kezdjük a legegyszerűbb esettel.

7.3. Változatlan tárgyak

Legyen két ideális merev testünk a és b, melyekről a következőket feltételezzük:

a és b tárgy tömör, nem összetett, a helyén kívül nem szenved el semmiféle változást. A két tárgy a helyét leszámítva egyforma, megkülönböztethetetlen, és olyan pontos fizikai jellemzőkkel leírható, mint alak, tömeg, anyagminőség, keménység vagy elektromos vezetőképesség. Tegyük fel továbbá, hogy a és b világvonala meghatározható egyazon koordináta rendszerben. Az ilyen tárgyak körében érvényes a megkülönböztethetetlenek azonosságának elve.

Egy ellenvélemény

Azt állítottam az imént, hogy az ilyen ideális fizikai tárgyak körében problémamentesen alkalmazható az azonosság fogalma, mert azonosíthatóak a világvonalukkal. Nem minden filozófus ért egyet ezzel. Max Black szerint ha a fent jellemzett a és b tárgyakat egy izolált világban képzeljük el, akkor nem tudjuk megkülönböztetni azokat. (Black három ellenérvéből csak egy elsővel foglalkozom.) Az érv működéséhez ki kell hagyni az 'a-val azonosnak lenni' és 'b-vel azonosnak lenni' tulajdonságokat a tárgyak tulajdonságai tartományából, ami azonban nem jelent lényeges megszorítást. Az érv lényege az, hogy mivel a két tárgy a helyüket leszámítva tökéletesen egyforma, csak a helyük ismeretében tudnánk megkülönböztetni azokat. Kérdés azonban, hogy meg tudjuk-e határozni a helyüket, másképp fogalmazva, van-e azonosításra alkalmas helye a két tárgynak? A válasz attól függ, hogy a teret abszolút térként vagy relatív térként képzeljük-e el. Első eset. Ha van abszolút tér ebben a világban, akkor létezik olyan kitüntetett K_0 koordináta rendszer, amelyben a két gömb helyét minden időpontban egy számhármas jellemzi. Ebben az esetben valóban meg tudjuk különböztetni a és b tárgyakat a helyük alapján, csakhogy K_0 koordináta rendszer föltételezésével hallgatólagosan becsempésztünk még valamit ebbe a világba, ahol semmi sem létezik a két tárgyon kívül. Egy koordináta rendszert ugyanis lehetetlen elképzelni egy merev test nélkül, amihez rögzítve van az origó pontja. A koordinátarendszer origó pontját vagy a gömbhöz vagy b gömbhöz rögzíthetjük. Honnan tudjuk melyikhez rögzítettük? A kérdés lényeges, hiszen eltérő koordinátákat kapunk az eltérő kezdőpontok választásával. Csak akkor tudnánk, hogy melyikhez rögzítettük a koordináta rendszert, ha azonosítani tudnánk a két gömböt, de azonosítani csak a helyük alapján tudjuk. Ezzel a kör bezárult, nem tudunk abszolút teret meghatározni ebben az elképzelt világban. Második eset. A teret relatív fizikai jellemző gyanánt fölfogva sem láthatunk különbséget a két tárgy között, hiszen az egyik épp olyan távol van a másiktól, mint a másik az egyiktől. Mindebből az következik, hogy ebben a világban a tárgyakat nem tudjuk megkülönböztetni a tulajdonságaik alapján, még akkor sem, ha a belső tulajdonságaikon kívül hozzá vesszük a térbeli helyüket, mint külső tulajdonságot.[25]

Fontos megjegyezni, hogy az a korábbi érv, miszerint 'egyik épp olyan távol van a másiktól, mint a másik az egyiktől' vitatható, ugyanis nem vektorként, hanem skalárként, puszta távolságként értelmezi a teret. Amennyiben a teret vektorokkal írjuk le, akkor az a-ból a b-felé mutató vektor különbözni fog a b-ből az a-ba mutató vektortól, és így nem egyezik meg a két tárgy minden tulajdonságában.

Jobban érthető a probléma, ha szimbolikus (formális) logikai nyelvet használunk. A példa egy olyan izolált világot képzel el, amely pontosan és kimerítően leírható három formulával: $G(a); G(b); \Re(a, b)$. Ebből a három formulából valóban nem vezethető le sem az, hogy $a = b$, sem az hogy $a \neq b$. Megváltozik a helyzet, ha kikötjük, hogy az '$\Re$' reláció irreflexív. Az irreflexivitást akkor tartjuk evidenciának, ha a formulákat pl. így interpretáljuk: $G(x) := x$ tömör adott tömegű vasgömb; $\Re(x, y) := x$ 2km-re van y-tól. Az '$\Re$' relációt a 'távolsága' fizikai jellemzővel, azaz egy függvényével kifejezve ezt kapjuk: 2km=távolsága(x, y) ahol a 'távolsága' függvényről feltételezhetjük, hogy: 0=távolsága(x, y) akkor és csak akkor ha $x = y$. Ebből valóban következik, hogy mivel $0 \neq$ 2km, és 2km=távolsága(x, y) tehát $x \neq y$. Ez a feltevés nem logika igazság, hiszen két hanghullám vagy két illatfelhő lehet egy helyen. Viszont az iménti (WLP-end1-2) és (WLP-perd1-2) posztulátumok alapján igazolható hogy $a \neq b$, mivel a két tárgy közötti távolság nagyobb mint nulla, ezért a két tárgy helye nem azonos minden koordináta rendszerben. Ha viszont a két tárgy helye nem azonos, akkor a korábbiak alapján két tárgy sem azonos. Az viszont továbbra is kérdés, hogy rögzített koordináta rendszer nélkül, ebben a világban tudjuk-e azonosítani a két tárgyat? Nyilvánvaló, ha valaki képzeletben fölcserélné a tárgyakat, semmilyen módon nem vennénk észre. Tehát bizonyítható, hogy van két tárgyunk, de azonosításuk lehetetlen térbeli koordináták nélkül. Elfogadhatjuk azt az ismeretelméleti érvet, hogy ebben az elképzelt világban nem állnak rendelkezésünkre a makrofizikai tárgyak tér-időbeli koordinátái, azaz világvonalai. Ez viszont nem cáfolja meg azt a korábbi ontológiai kikötésünket – lásd a korábbi (SPT) föltevést – hogy minden makrofizikai tárgynak van világvonala, azaz van helye mindaddig, amíg létezik. Ha azt is föltételezzük, hogy van olyan közös koordináta rendszer, amelyben mindkét tárgynak van helye, akkor a két tárgy egy mindentudó lény számára – azaz ontológiai szempontból – azonosítható, bár mi az azonosításra képtelenek vagyunk, és így az érv elesik.

7.4. Változékony fizikai tárgyak

Miképpen lehet egy időben változékony fizikai tárgy vagy élőlény azonos önmagával? Vizsgálódásunk elején, a 1. és 2. ábrák kapcsán már említettem a folyamatos létezés metafizikai elvét. (Nem tévesztendő össze az idő folytonosságának feltételezésével, ami ennél erősebb kikötés. A folytonosság diszkrét időpontok tartományán is értelmezhető.) A makroszkopikus tárgyak egy részével kapcsolatban hiszünk ebben az elvben.

A folyamatos létezés elve:

> Mindig létezik a tárgy változásának olyan rövid időtartománya, hogy abban a tartományban csak egyetlen tárgy hasonlít a legjobban a tárgyhoz, és az a tárgy a tárgy korábbi állapotának egyértelmű leszármazottja. Föltételezzük, hogy a tárgy korábbi állapotának leszármazottja, a korábbi állapothoz nagyon közeli helyen található. Föltételezzük, hogy van olyan hasonlósági reláció a fizikai tárgyak időszeleteinek halmazán, hogy ha x hasonló y-hoz, akkor x és y egyazon tárgy időszelete.

A korábbi (STP-perd) és (STP-end) posztulátum a makroszkopikus fizikai tárgyakat világvonalukkal azonosítja. A fenti axióma csak egy sajátos bővítése ennek a két posztulátumnak. Ez alapján a fizikai tárgyak időszeleteinek halmazán adott egy hasonlósági reláció – amelyik nem tranzitív – és szintén adott egy leszármazási reláció – amelyik viszont tranzitív. (Feltételezzük, hogy ennek a hasonlósági relációnak a tranzitív lezártja megegyezik az időszeletek halmazán értelmezett leszármazási relációval.) Ha x tárgy-időszelet leszármazottja y és y tárgy-időszelet leszármazottja z, akkor x leszármazottja z. Eszerint a leszármazási reláció tranzitív, ami együtt a hasonlósági relációval egy ekvivalencia relációt határoz meg a tárgyhoz tartozó tárgy-időszeletek halmazán. Egy ilyen ekvivalencia osztály neve az endurantizmus tárgy fogalma. Létezik tehát egy szürjektív leképezés a perdurantizmus tárgy-időszelet halmazából, az endurantizmus tárgyainak halmazába. (A halmaz leképezése B halmazba szürjektív, ha A minden elemének van egy és csak egy képe B-ben, és B minden eleme képe A valamely elemének. Ilyen pl. a gyermekek leképezése az édesanyák halmazába.) Ez a leképezés ekvivalencia osztályokat képez le azok neveihez. Az élőlények vagy makrofizikai tárgyak időbeli változása mind endurantista, mind perdurantitsa módon kifejezhető. Ezt egy könnyen általánosítható példa segítségével mutatom be.

Legyen $s :=$ Szókratész, $S := \ldots$ Szókratész ... időpontban, $F := \ldots$ felnőtt ember, $G := \ldots$ gyermek, $B := \ldots$ bölcs, t tetszőleges időpont Szókratész téridejében. Föltevés: Szókratész$=\{x : \exists t Sxt\}$

Endurantista megközelítés:

$\exists t(G(s,t)\,\&\ \sim B(s,t))\,\&\ \sim \exists t(F(s,t)\,\&\ \sim B(s,t))$ (Szókratész gyermekkorában néha nem volt bölcs, viszont felnőtt korában mindig bölcs volt.) Egy táblázat segít jobban megérteni mindezt:

Bölcs	gyerekkor	ifjúkor	felnőttkor
Szókratész	0	1	1
Melétosz	0	0	0
...	...	...	...

Perdurantista értelmezés:

$\exists t \exists x(S(xt)\,\&\,G(x)\,\&\ \sim B(x))\,\&\ \sim \exists t \exists y(S(yt)\,\&\,F(y)\,\&\ \sim B(y))$

(A gyermek Szókratész nem volt bölcs, viszont az érett férfi bölcs volt.) Emlékeztetek arra, hogy ebben a felfogásban Szókratész időszeletei nem azonosak, hanem csak ekvivalensek egymással, azaz egyformák abból a szempontból, hogy egyazon személyhez tartoznak. Egy táblázat segít jobban megérteni mindezt:

Bölcs	Nem bölcs
	gyermek Szókratész, a gyermek Melétosz ...
az ifjú Szókratész	az ifjú Melétosz
a felnőtt Szókratész	a felnőtt Melétosz
...	...

Egy ellenvélemény

Úgy tűnik a változás feltételezése endurantista felfogásban a személyek vagy fizikai tárgyak belső tulajdonságait illetően ellentmondásra vezet. A bölcsesség minden személy belső tulajdonsága, így azé a személyé is akit Melétosz megvádolt. Szókratészről egyszer azt állítjuk, hogy bölcs, másszor meg hogy nem bölcs. Ez nyilvánvaló ellentmondás, tehát a változás föltételezése ellentmondást szül. Csakhogy Szókratész nem matematikai objektum, így tulajdonságai – még az a tulajdonsága is, hogy 'ember' – nem léteznek időn kívül. Időben értelmezve pedig épp az imént láttuk hogyan értelmezhető az, hogy felnőtt kora előtt nem volt mindig bölcs.[26] Perdurantista felfogásban pedig hiba összekeverni az azonosság relációt egy ekvivalencia relációval.

7.5. Átalakuló tárgyak

Harmadik lépcsőben tegyük föl, hogy van egy olyan d tárgyunk, amelynek összetevői is változhatnak az időben, esetleg fokozatosan valamennyi tulajdonsága megváltozhat. (Ilyenek az élőlények.) Nehezítsük a helyzetet annak a föltevésével, hogy d tárgynak t' időpontban keletkezik egy d' hasonmása is. Hogyan tudjuk megkülönböztetni d-t és d'-t?

Az ilyen tárgyak esetén nem érvényes a korábbi világvonal azonosításon alapuló elv, sem a gyönge Lockiánus elv, és ami ennél is fontosabb: nincsenek általános szabályok az azonosításukra nézve. Az, hogy N.N. úr azonos-e a harminc évvel korábbi önmagával döntés kérdése. N.N. úr azonos vagy nem azonos egykori önmagával mint jogi személy, mint egykori barát vagy ellenség, mint munkaerő vagy mint élőlény. Hasonló nehézségek merülnek föl renovált épületek vagy műkincsek önazonossága esetén, és ezt a kérdést feszegeti a 'Thészeusz hajója' filozófiai fejtörő is. Ezekben az esetekben nekünk kell megfogalmazni az önazonosság kritériumait, mégpedig olyan módon, hogy ne keveredjünk önellentmondásba. Némely filozófus relatív azonosságról beszél a kérdéskörrel kapcsolatban, ami valójában egy ekvivalencia relációt jelent, amely reláció valóban relatív abban az értelemben, hogy interpretációra szorul, míg az azonossággal kapcsolatban ennek föltételezése fölösleges bonyodalmakat okoz. A problémával egy külön tanulmányomban foglalkozom.

7.6. Mikrofizikai objektumok, elemi részek

A mikrofizikai objektumokra nem teljesül a korábbi előfeltevésünk kiinduló pontja: nincs minden időpillanatban egy jól meghatározott helyük és egyéb fizikai jellemzőik sem határozhatók meg egyértelműen, csak valamilyen statisztikus eloszlással. Így aztán nem áll a rendelkezésünkre egy azonosításukra alkalmas tér-idő függvény. Amiből az következik, hogy kérdéses, mennyiben alkalmazható velük kapcsolatban az „önazonosság" fogalma. Ezzel a kérdéskörrel most nem foglalkozom, a probléma inkább az elemi részek filozófiai problémája tárgykörébe tartozik, amely terülten nem vagyok kompetens.

Jegyzetek

[1]Tanulányomat 1982-ben írtam, egy későbbi verziója azonos címmel megjelent a „Mi a nyugat? Atlantizmus és integráció" c. kötetben, szerk.: Garaczi Imre (2007) Veszprémi Humán Tudományokért Alapítvány, Viza Kft.,Veszprém. p. 166-187.

[2]Ezzel foglalkozik a következő két tanulmány. Az első szerint a dolgok numerikus azonossága több annál mint amit a dolgok tulajdonságai segítségével megragadni képesek vagyunk. Robert Merrihew Adams 2004. Primitív ezség és primitív azonosság. in. Modern metafizikai tanulmányok szerk.: Farkas Katalin - Huoranszki Ferenc, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest. A következő írás szerint pedig az azonosság jellemzésére használt két alaptétel - miszerint, minden azonos önmagával, és ha valami azonos valamivel, akkor ami igaz az előbbire, éppúgy igaz lesz az utóbbira is - nem határolja jól körül az azonosság fogalmát, mert olyan értelmezése is adható a két alapelvnek, aminek semmi köze az azonosság fogalmához. Timothy Williamson 2007. Absolute Identity and Absolute Generality. in. Unrestricted Quantification: New Essays A. Rayo and G. Uzquiano (eds.), Oxford University Press, Oxford)

[3]„Az azonosság olyan egyszerű és alapvető fogalom, hogy nehéz másképpen megmagyarázni, mint puszta szinonimákkal. Az, hogy x és y azonosak, ugyanazt jelenti, mint az, hogy x és y ugyanaz a dolog. Minden dolog azonos önmagával és semmi mással nem. De egyszerűsége ellenére az azonosság zavarokat okoz. Pl. azt kérdezhetjük: Mire használjuk

az azonosság fogalmát, ha egy objektum önmagával való azonosítása triviális, mással való azonosítása pedig hamis? Ezt a különös zavart arra való hivatkozással tisztázhatjuk, hogy valójában nem kétfajta esetet kell tekinteni, egy triviálisat és egy hamisat, hanem hármat: Cicero = Cicero, Cicero = Catilina, Cicero = Tullius. Az első ezek közül triviális, a második pedig hamis, de a harmadik sem nem triviális, sem nem hamis. A harmadik informatív, mert két különböző terminust kapcsol össze; és ugyanakkor igaz, mert a két terminus ugyanannak az objektumnak a neve. Egy azonosság állításának igazságához csak az szükséges, hogy az '=' ugyanazon dolog két neve között szerepeljen; maguk a nevek lehetnek különbözőek, és a hasznos esetekben különbözőek is. Hiszen nem a nevekről állítjuk, hogy azonosak, hanem a megnevezett dolgokról. Cicero identikus Tulliusszal (ugyanaz az ember), bár a 'Cicero' név különbözik a 'Tullius' névtől. Ha valamit mondunk az adott objektumokról, akkor a megfelelő szót vagy predikátumot az objektumok neveire alkalmazzuk; de értelmetlen lenne azt gondolni, hogy amit az objektumokról mondunk, az magukra a nevekre is igaz. A Nílus pl. hosszabb, mint a Tuscaloosahatchie, de a nevek fordított viszonylatban vannak. Mivel az azonosság hasznos állításai azok, amelyekben a megnevezett objektumok ugyanazok, a nevek pedig különbözők, csak a nyelv sajátossága miatt van szükség az azonosság fogalmára. ...hogy az azonosság szükségessége egy nyelvi sajátságból származik, nem azt jelenti, hogy az azonosság nyelvi kifejezések relációja. Ezzel ellentétben, mint imént hangsúlyoztuk, azonos csak egy objektum és csak önmagával lehet, nem pedig az egyik név a másikkal; az azonossági kijelentésben ugyan a nevek szerepelnek, de a kijelentés a megnevezett objektumokat azonosítja. Továbbá egy azonossági kijelentésben szereplő nevek nyelvi vizsgálata általában nem elegendő az azonosság érvényességének vagy érvénytelenségének eldöntésére. Ezek az azonosságok: Everest = Gaurizankar (vö. 33. §), Alkonycsillag = hajnalcsillag, Az USA 25. elnöke = az USA első olyan elnöke, akit 42 éves korában iktattak be. A Tuxtla középhőmérséklete $= 93^oF$. a megalapozás tekintetében mind nyelven kívüli tények vizsgálatától függnek." Willard Van Orman Quine (1968) A logika módszerei. Ford. Urbán János, Budapest, Akadémiai, p. 248-250.

[4]V.ö.: Robin Jeshion, The Identity of Indiscernibles and the Co-Location Problem. (2006) Pacific Philosophical Quarterly 87 (2) p.163-176

[5]A gondolat forrása Lánczos Kornél Számok mindenütt. (1972) Gondolat, Budapest. p.17.

[6]G. Havas Katalin, Az azonosság törvénye a hagyományos és a modern formális logikában, (1964) Akadémiai Kiadó, Bp. írja, hogy bár szokásosan Leibniztől eredeztetetik, „ ...már Aquinói Tamásnál is megtalálható ez a tétel: 'Ha két dolog azonos, akkor a másikról ugyanazokat állíthatjuk, mint az elsőröl.' (Summa Theologica. p.1., qu. XL., art. 1.,3.)

[7]Köszönettel tartozom Harry Deutschnak a levezetésben nyújtott segítségért.

[8]Jurij Anatoljevic Srejder, Egyenlőség, hasonlóság rendezés. Ford. Vargha András. (1975) Gondolat, Budapest. Maurer Gyula - Virág Imre, A relációelmélet elemei. (1972) Kolozsvár, Dacia könyvkiadó. Részletesebben kifejtve a Bevezetés a struktúrák elméletébe c. könyvükben, (1976) Kolozsvár, Dacia könyvkiadó.

[9]Lehet-e két tárgy azonos? Lehetséges-e két asztal, amelynek minden tulajdonsága megegyező? Ha igen, akkor honnét tudjuk, hogy két tárgyunk van, hogyan tudjuk megkülönböztetni őket? Ha ugyanis a két tárgy valóban azonos, akkor minden szempontból azonos, tehát nem két tárgy. Bertrand Russell filozófiai önéletrajzában erről így ír: „...x-nek egy másik különöstől, y-tól tisztán numerikusan kell különböznie, s ily módon logikailag lehetségesnek kell lennie annak, hogy két különös entitás, x és y egymás összes tulajdonságaiban osztozzék, és mégis kettőt alkossanak. Azt persze nem tudnánk, hogy kettőt alkotnak, hiszen ez azt rejtené magában, hogy tudjuk: x különbözik y-tól, ami y-ról nem mondható; valójában x egy puszta megismerhetetlen szubsztrátummá változna, vagy egy láthatatlan fogassá, amelyről úgy csüngenek le a tulajdonságok, mint egy falusi ház gerendájáról a sonkák." Bertrand Russell 1968. Filozófiai fejlődésem. Ford. Fehér Ferenc, Budapest, Gondolat, p. 220. Később Russell elfogadta azt a nézetet, hogy ha

két objektum minden tulajdonsága azonos, akkor az egy objektum. Lásd még: Forrest, Peter „The Identity of Indiscernibles", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2006 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming

[10] „Many writers, especially in the literature on intrinsic value, use 'relational' for the opposite of intrinsic. This seems to be a mistake for two reasons. The first reason is that many properties seem to be both be relational and intrinsic. For example, most people have the property having longer legs than arms, and indeed seem to have this property intrinsically, even though the property consists in a certain relation being satisfied. Maybe the property is not intrinsic if whether or not something is an arm or a leg is extrinsic, so perhaps this isn't a conclusive example, but it seems troubling. As Humberstone notes, some might respond by suggesting that a relational property is one such that if an object has it, then it bears some relation to a distinct thing. But this won't do either. Not being within a mile of a rhodadendron is clearly relational, but does not consist in bearing a relation to any distinct individual, as we can see by the fact that a non-rhodadendron all alone in a world can satisfy it." Weatherson, Brian, 'Intrinsic vs. Extrinsic Properties', The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/intrinsic-extrinsic/`

[11] V.ö. Weatherson, Brian, „Intrinsic vs. Extrinsic Properties", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.)
`http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/intrinsic-extrinsic/`

[12] „Suppose for the moment that we do not assign any special interpretation to the identity symbol. We treat it like any other two place predicate. Let M be a structure for L and assume that Ref and LL are true in M. Call the relation defined in M by the conjunction of Ref and LL 'indiscernibility' (see Enderton 2000, for the definition of definability in a structure). There are three important points to note about the relationship between indiscernibility, and the relation I(A,x,y). First, indiscernibility need not be the relation I(A,x,y) (where A is the domain of the structure). It might be an equivalence relation E having the property that for some elements u,v, of the domain, E(u,v) holds, although I(A,u,v) fails. Secondly, there is no way to "correct for" this possibility. There is no sentence or set of sentences that could be added to the list beginning with Ref and LL that would guarantee that indiscernibility coincides with I(A,x,y). This fact is usually expressed by saying that identity is not a first-order or 'elementary' relation. (For a proof, see Hodges 1983.) However, in a language such as set theory (as usually interpreted) or second-order logic, in which there is a quantifier 'all X' permitting quantification over all subsets of a given set, I(A,x,y) is definable. Third, given any structure M for L in which Ref and LL are true, there is a corresponding structure QM, the 'quotient structure' determined by M, in which indiscernibility does coincide with I(A,x,y). QM is obtained in roughly the following way: Let the elements of QM be the equivalence classes [x], for elements x of M determined by indiscernibility in M. If F is a one-place predicate true in M of some object x in M, then define F to be true of [x] in QM, and similarly for many-place predicates and constants. It can then be shown that any sentence true in M is true in QM, and vice versa. The existence of quotient structures makes it possible to treat the identity symbol as a logical constant interpreted in terms of I(A,x,y)." Deutsch, Harry, 'Relative Identity', The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/identity-relative/`

[13] „...egy halmazt nem változtatunk meg azáltal, hogy más módon (más nevekkel) adjuk meg elmeit, vagy ha valamely elemét többször említjük." Ruzsa Imre, Matematika pszichológia szakos hallgatók számára - egységes jegyzet. (1975), Tankönyvkiadó, Budapest, p.8.

[14] V.ö.: Saul Kripke 2004. Azonosság és szükségszerűség. ford. Csaba Ferenc, in. Modern metafizikai tanulmányok, Farkas Katalin - Huoranszki Ferenc. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest. Érdekes még a következő Internetes oldal is:
`http://www.umsu.de/wo/archive/2006/08/09/Kripke_s__Alleged__Argument_for_`

the_Necessity_of_Identity_Statements

A blog szerzője, Wolfgang Schwarz így indokolja Kripke álláspontját:

(1) A tulajdonnevek merev jelölők.

(2) A merev jelölők egyazon dolgot jelölnek minden lehetséges világban.

(3) Ha 'a' és 'b' egyazon dolgot jelöl minden lehetséges világban, akkor szükségszerű hogy $a = b$.

(4) Ha 'a' és 'b' tulajdonnevek, akkor ha $a = b$ akkor szükségszerű, hogy $a = b$ (1)(2)(3)

[15]Max Cresswell tudatában van ennek a problémának, ezt írja: „For this reason it may well be preferable to avoid altogether the use of function symbols in modal predicate logic." G.E.Hughes & M.J.Cresswell 1996. A new introduction to modal logic. Routledge, New York, p.328.

[16]Részletesen tárgyalja a relációk típusait Szakadát István: Reláció, szintaktika, szemantika (2004) in: Tudományos és Műszaki Tájékoztatás, 51. évf., 2004/12, p. 531-540.

[17]Srejder i.m. 168. p.

[18]Srejder i.m. 153. p.

[19]„66. Vizsgáld meg például egyszer azokat a folyamatokat, amelyeket 'játékok'-nak nevezünk. A táblajátékokra, kártyajátékokra, labdajátékra, küzdősportokra stb. gondolok. Mi a közös mindezekben? – Ne mondd, hogy 'Kell valami közösnek lennie bennük, különben nem hívnák őket 'játékok'-nak' – hanem nézd meg van-e valami közös mindben. Mert ha megnézed őket, nem fogsz ugyan olyasmit látni, ami mindben közös, de látsz majd hasonlóságokat, rokonságokat, mégpedig egész halomnyit. Szóval: ne gondolkozz, hanem nézz! – Nézd meg például a táblajátékokat és kiterjedt rokonságukat. Majd térj át a kártyajátékokra: itt sok megfelelést találsz ama első osztállyal, de sok közös vonás eltűnik, sok más viszont előtűnik. Ha pedig áttérünk a labdajátékokra, akkor egynémely közös vonás megmarad, de sok el is vész. – Minden játék szórakoztató'? Hasonlítsd össze a sakkot a malommal. Vagy talán mindenütt van nyerés és vesztés, és mindenütt versengenek a játékosok? Gondolj a pasziánszokra. A labdajátékokban van nyerés és vesztés; de ha egy gyermek a labdát a falnak dobja majd ismét elkapja, akkor eltűnik ez a vonás. Nézd meg, hogy milyen szerepet játszik az ügyesség és a szerencse. És milyen más az ügyesség a sakkban és a teniszben. S gondolj most a körjátékokra: itt megvan a szórakozás eleme, viszont mennyi más jellegzetes vonás eltűnt! És így mehetünk végig a játékok sok-sok más csoportján, s láthatjuk, amint hasonlóságok tűnnek fel és el. E vizsgálódás eredménye pedig így hangzik: az egymást átfedő és keresztező hasonlóságok bonyolult hálóját látjuk. Hasonlóságokat nagyban és kicsiben. 67. Ezeket a hasonlóságokat nem tudom jobb szóval jellemezni, mint hogy 'családi hasonlóság'-ok; mert így fedik át és keresztezik egymást azok a különböző hasonlóságok, amelyek egy család tagjai között állnak fenn: termet, arcvonások, a szem színe, a járás, a temperamentum stb., stb. – És azt állítom: a 'játékok' egy családot alkotnak. Éppígy alkotnak például a számfajták is családot. Miért nevezünk valamit 'szám'-nak? Nos, például mert közvetlenül rokon valamivel, amit eddig számnak neveztünk; és ezáltal, mondhatjuk, közvetve rokonságba kerül valami mással, amit szintén így nevezünk. És számfogalmunkat úgy terjesztjük ki, ahogyan egy fonál fonásakor az egyik szálat a másikhoz sodorjuk. A fonál erőssége pedig nem azon múlik, hogy valamely szál egész hosszában végigfut-e a fonálon, hanem azon, hogy elég sok szál fonódik-e össze egymással. De ha valaki azt akarná mondani: 'Tehát mindeme képződményekben van valami közös – tudniillik mindeme közös vonásoknak a diszjunkciója', akkor én azt válaszolnám: ez csak játék egy szóval. Éppígy lehetne mondani: van valami, ami az egész fonálon végigfut – tudniillik e szálak hézagmentes összefonódása." Ludwig Wittgenstein 1992. Filozófiai vizsgálódások. Ford. Neumer Katalin, Budapest, Atlantisz, p. 57.

[20]V.ö: Noonan, Harold, 'Identity', The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2005 Edition), Edward N. Zalta (ed.),
http://plato.stanford.edu/archives/fall2005/entries/identity/

[21]A korai Wittgenstein tehát téved amikor ezt írja: 5.533 „Tehát az azonosságjel nem lényegi alkotórésze a logikai szimbolikának. És most már látjuk, hogy az olyan látszatkijelentések, mint: '$a = a$', '$a = b.b = c. \supset a = c$', '$(x).x = x$', '$\exists x.x = a$' stb., a helyes logikai szimbolikában egyáltalán le sem irhatók." Wittgenstein, Logikai-filozófiai értekezés. p. 157.

[22]Ennek a problémának átfogó ismertetése található a következő helyeken: Ruzsa Imre „Extenzionális és intenzionális problémák a logikában", MFISZ, 1972/1.; Ruzsa Imre, Klasszikus, modális és intenzionális logika. (1984) , Akadémiai kiadó, Budapest, 44. p.

[23] 'There cannot be two or more indiscernible things with all the same parts in precisely the same place at the same time. . . . I call this the Weak Lockean Principle since it resembles a principle suggested by Locke, but this is considerably weaker and more compelling than Locke's principle. The restriction to objects of the same kind is supposed to indicate that the principle of interest here is not one (much more controversial) aimed at ruling out the co-location of (say) the sculpture and the clay from which it is formed - involving objects of different kinds. Making this kind of restriction is fairly standard in the literature.' Robin Jeshion, i.m.

[24]A gondolat már Kantnál fölmerül: „Ily módon teljeséggel elvonatkoztathatunk két vízcsepp minden belső (mennyiségi és minőségi) különbségétől: elegendő ugyanabban az időpontban különböző helyeken látnunk, hogy számszerű értelemben különbözőnek tekintsük." TÉK, B320=A265. ford. Kis János, Atlantis, Budapest, p. 278.

[25]Max Black 1952, The Identity of Indiscernibles, Mind 61 (242), pp.153-164.
`http://www.alfanos.org/pdfs/03_intro_philo_spr09/05_Black.pdf`

Max Black e példáját alaposan elemzi Boda Mihály (2006) Az azonosság egy jellemzője: a Leibniz-elv. Pro Philosophia Füzetek, 2006/3.

[26]A fizikai tárgyak belső (intrinzikus) tulajdonságai nem csak az idő dimenzióban lehetnek relációsak. Vegyük Szókratész ama tulajdonságát, hogy a lába hosszabb volt, mint a keze. Ez nyilvánvalóan belső tulajdonsága volt Szókratésznek, ami egy viszonyt határoz meg.