

Hasonlóság, egyformaság, azonosság

1982 - 2006

Sok hazai filozófus véli úgy, hogy az 'azonosság' fogalma ahogy a klasszikus logikában megjelenik felettébb korlátozott és filozófiailag vitatható. Szerintük ez egy olyan pont ahol elérkeztünk a klasszikus logika teljesítőképességeinek határaihoz. Tanulmányom ezzel a nézettel vitatkozik.¹ Célom az, hogy megmutassam miképp a mozgás esetén, akképpen az azonossággal rokon fogalmak területén is, a kétértékű logika korlátait állító vélemény megalapozatlan. Bemutatom a relációelmélet filozófia számára fontos alapfogalmait, és ezen belül kitérek a kevésbé ismert tolerancia relációk ismertetésére. Példákkal magyarázom el, hogy miképpen képes leírni a kétértékű logika a finom átmeneteket és a fokozatos változásokat. Foglalkozom a kérdéskörhöz kapcsolódó olyan fogalmakkal, mint a 'felcserélhetőség' és 'egyformaság'.

Olyan alapvető relációelméleti fogalmakat ismertetek, mint egy reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonsága. Azért fontosak ezek és az ehhez hasonló tulajdonságok, mert a relációk használati körük – alaphalmazuk – szűkítése során megőrzik e tulajdonságaikat, ezért ezek a tulajdonságok ebben az értelemben állandóak, és mi emberek szeretjük az állandóságot. Megpróbálok közérthető, szemléletes példákat bemutatni, mert egy filozófiai magyarázatnak, hacsak lehet minél szélesebb körben érthető, a mindennapi nyelven megfogalmazott példákból és kérdésekből kell kiindulnia. Érinteni fogom a tárgyak önazonosságának kérdését is.

A toleranciarelációk rendszeres vizsgálata elsősorban Jurij Anatoljevic Srejder és tanítványai nevéhez fűződik. Az erről a témáról írt kiváló könyv – Egyenlőség, hasonlóság, rendezés – 1975-ben jelent meg. Nem tudok róla, hogy megjelenése idején a hazai filozófiai életben valaki írt volna Srejder filozófiai szempontból is fontos könyvéről.² Először a kapcsolódó filozófiai alapkérdéseket tárgyalom, majd a tolerancia és ekvivalencia relációkra mutatok be példákat, végül a fogalmak

gyakorlati használatának néhány filozófiai érdekes kérdéseire térek ki az alábbi tagolásban:

- ❖ Filozófiai háttér
- ❖ A bináris relációk alapvető tulajdonságai.
- ❖ Hasonlóságtól az egyformaságig.
- ❖ Egyformaság és fölcserélhetőség.
- ❖ Azonosság és fölcserélhetőség.

Filozófiai háttér. Madártávlatból nézve az azonossággal kapcsolatos filozófiai kérdések négy csoportba oszthatók.

1: Sok logikai szakkönyv a klasszikus elsőrendű logikában az azonosságot két axiómával jellemzi, amit pontosság igényéből engedve természetes nyelven adok meg:

(A1) Minden x -re, $x=x$

(A2) Minden x -re és y -ra, ha x F tulajdonságú és $x=y$, akkor y -is F tulajdonságú.

(A2-val ekvivalens, hogy minden x és y -ra ha $x=y$ akkor ha $F(x)$ akkor $F(y)$.)

Jó-e az azonosság fenti jellemzése? Nem túl tág vagy épp ellenkezőleg túlságosan szűk-e ez a meghatározás? Előbbi esetben előfordulhat, hogy két dolog annak ellenére kettő, azaz nem azonos egymással, hogy minden tulajdonságukban megegyezik, az utóbbi esetben pedig olyan relációk is kielégítik az azonosság axiómáit melyeknek nyelvérzékünk szerint semmi köze sincs az azonosság fogalmához.³ Ha hiba van az azonosság fenti axiómaiban, annak az lenne a meggyőző bizonyítéka, hogy az axiómák alkalmazásával hibásan következtetünk. Ha az első eset fordulna elő, és az axióma túl tágas volna, akkor megtörténhetne, hogy két dolgot hibásan azonosítunk, a második esetben viszont ellenkezőleg arra következtetnénk tévesen, hogy két dolog különbözik, amikor valójában egy.

Meggyőző érv volna a fenti két axióma hibás mivolta mellett az is, ha valaki előállna a helyes megoldással, a helyesség és teljesség igényének tökéletesen megfelelő új axiómákkal.

2: Vajon az azonosságot állító igaz mondatok azon túl hogy igazak, egyszersmind szükségszerűen is igazak-e? Vagy vannak ezzel szemben csak esetlegesen igaz azonossági állítások is? Az erre való válasz természetesen előfeltételezi a szükségszerűség és esetlegesség fogalmának értelmezését.⁴ Az azonosság szükségszerűsége mellett a következőképpen érvelhetünk. Nehéz lenne vitatni, hogy a dolgok önazonossága szükségszerű igazság. Tehát szükségszerű, hogy minden x -re $x=x$. Tegyük föl azonban azt az egyébként nem nyilvánvaló feltevést is, hogy ha szükségszerű, hogy minden x $F(x)$, akkor minden x szükségszerűen $F(x)$. Ebből a két tételből következik, hogy minden x dologra szükségszerűen igaz, hogy $x=x$. Az azonosság második axiómája szerint, bármely dolgokra ha $x=y$ akkor ha $F(x)$ akkor $F(y)$. Ennek egy alkalmazása az az eset, hogy bármely x és y -ra, ha $x=y$ és szükségszerű, hogy $x=x$ akkor szükségszerű, hogy $y=x$. De mivel az előbb elfogadtuk, hogy minden x -re szükségszerű, hogy $x=x$, ezért ebből az következik, hogy bármely x és y dolgokra, ha $x=y$ akkor szükségszerű, hogy $x=y$. Vajon elfogadható ez a következmény, vagy inkább el kell vessük a levezetés valamelyik lépését, az elfogadhatatlan következmény elutasítása végett? Szerintem elfogadhatatlan. Addig nincs baj, ameddig x és y merev jelölők, pl. fizikai tárgyak nevei. Csakhogy a változók értékei nem kizárólag tárgyak lehetnek, hanem tárgyak jellemzőinek értékei, tárgyak állapotai is. Ez pedig különös következményhez vezet. Használjunk ugyanis egy olyan nyelvet az anyagi világ leírására, amelyik a szokásos $F(x)$, $R(xy)$ egy illetve kétargumentumú predikátumok helyett függvényeket használ olyan módon, hogy $F(x)$ nek megfelel egy $a=f(x)$ kifejezés, $R(xy)$ -nak pedig $b=g(xy)$ kifejezés. Nos erre a nyelvre lefordítva az elsőrendű logika formuláit bármely dolog tulajdonságának az állítása egy azonossági állítás lesz. Pl. annak, hogy x -forró t -kor az fog megfelelni, hogy forró=hőmérséklete(x,t). Így tehát ha a tűzhelyen lévő lábosban lévő víz most forró, akkor ez egy azonossági állítás ezen a nyelven, és ezért – az azonosság szükségszerűségét feltételezve – nem pusztán tényigazság,

hanem egyben szükségszerű igazság is. Épp így, ha én tegnap megbotlottam a küszöbön, akkor szükségszerűen botlottam meg, mert bármely dolog bármely tulajdonsága szükségszerűen igaz vagy nem igaz a korábbiak szerint. Ekkor viszont értelmetlenné válik a 'szükségszerű' operátor használata. Hiszen bármely dologra ha $F(x)$ akkor ennek fordítása $a=f(x)$, viszont ha $a=f(x)$ akkor szükségszerűen $a=f(x)$, viszont ezt visszafordítva, ha $F(x)$ akkor szükségszerű hogy $F(x)$. Így minden dolog minden tulajdonsága szükségszerű volna, semmi sem lenne esetleges, ami haszontalanná tenné a 'szükségszerű' fogalmának használatát. Az egyik lehetséges kiút, hogy a részben vagy egészében elvetjük a 'szükségszerű' és 'lehetséges' fogalmát alkalmazó modális logikát, vagy megkülönböztetjük a nevek egy behatárolt körét, a merev jelölők, más szóval logikai tulajdonnevek kategóriáját.

3: Miképpen lehet egy időben változékony dolog azonos önmagával? Több egymással vitázó álláspont alakult ki ezzel kapcsolatban a filozófiai irodalomban.⁵ Az egyik lehetséges válasz erre a kérdésre a tárgyak négydimenziós szemléletén alapul, összemosva az objektumok és folyamatok filozófiai kategóriáját. Quine szerint "Az azonossággal függ össze az az ismert talány is, amit most említünk: Hogyan mondhatjuk egy olyan dologról, amely a lényegét megváltoztatja, hogy azonos marad önmagával? Hogy van az pl., hogy egy személyről évek után is mint ugyanarról a személyről beszélhetünk? A probléma Hérakleitosztól ered, aki ezt mondta: »Nem léphetsz kétszer ugyanabba a folyóba, mert mindig más víz áramlik benne.« Valójában ennek a nehézségnek a kulcsát nem az azonosság eszméjében, hanem a dolog és idő eszméjében kell keresni. Egy fizikai dolog - akár egy folyó, akár egy emberi test, akár egy kő - bármely pillanatban térbelileg elhelyezkedő atomok vagy más fizikai alkotóelemek egyidejű pillanatnyi állapotainak az összessége. Ahogyan a dolog egy pillanatban e térbeli részecskék összessége, úgy egy időszakon keresztül a dolgot az egymásra következő pillanatnyi állapotok meghatározta időbeli kis részek összességének tekinthetjük. Ezeket az eszméket kombinálva a dolgot mint térben és időben egyaránt kiterjedtet tekintjük; a dolog részecskék pillanatnyi állapotainak, vagy röviden részecske-momentumoknak összegévé válik, amely egyaránt időbeli és térbeli kiterjedésű. Mindezt egyaránt alkalmazhatjuk akár a folyóra vagy az emberi

testre, akár a kőre. A két esetben csak a részletekben van különbség: a kő esetében az alkotó részecske-momentumok szinte teljesen mint ugyanazon részecske pillanatnyi állapotai haladnak egyik időponttól a másikig, míg az emberi test vagy a folyó esetében e tekintetben több a heterogeneitás. A folyó vagy az emberi test egy részecskének rendszeresen csak egy bizonyos pillanatnyi állapotát fogja tartalmazni, és ugyanennek a részecskének más pillanatnyi állapotát kizárja, míg a kővel kapcsolatban, nem számítva a kis periferikus változásokat vagy a végső elpusztulást, nem ez a helyzet. Itt olyan megkülönböztetést tettünk, amely a hagyományos filozófiában a „szubsztanciák” és „móduszok” közötti megkülönböztetésre emlékeztet. De mindkét típusú dolog fizikai dolog ugyanabban az értelemben: részecskemomentumok összessége. És minden dolog azonos önmagával; beléphetünk kétszer ugyanabba a folyóba. Amit nem tudunk megtenni, az, hogy kétszer lépünk be a folyó ugyanazon időbeli részébe, amennyiben az időbeli rész rövidebb, mint a belépés ideje. Az egész egyes részei közötti eltérések nem homályosíthatják el az egésznek, sem valamennyi részének önmagával való azonosságát.”⁶ Nem ez az egyedül lehetséges válasz Herakleitosznak. Más felfogásban az időben létező objektumok minden egyes rövid időtartományban teljes egészében léteznek, és nem csak létezésük elmúltával tudjuk meg, hogy mik is voltak valójában. Ami állandó, változatlan bennük, ami összefogja időben kiterjedt egymástól különböző állapotait, az a közös lényeg⁷, vagy a közös modell, attól függően, hogy miféle objektumról van szó. Az élőlények idegrendszeri modellek öntudatlan használatával érzékelik a külvilág tárgyait és a teret. Az emberi nyelv tárgynevei is gyakran ilyen modelleken keresztül vonatkoznak a valóságra. Ezek a modellek a külvilág tárgyait mint a környezet változásaira adott hatás-válasz rendszer viselkedésének állandó szabályszerűségeit írják le, és segítik a túlélést. A harmadik megoldás olyan módon magyarázza a tárgyak időben egymást követő állapotainak egymással való kapcsolatát, hogy ezek az időben közeli állapotok annál jobban hasonlítanak egymásra, minél közelebb időben az állapot. Utóbbi megoldásnak az egyik eszköze a hasonlóság reláció matematikai leírása, melyet a továbbiakban bemutatok.

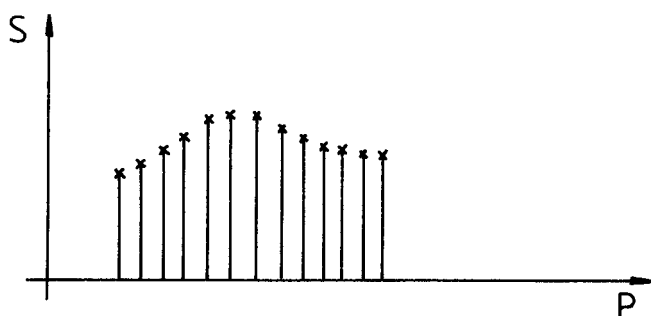
4: A homályosan körvonalazott fogalmak használata. Miképpen kerülhető el, hogy a homályos fogalmak ellentmondásokba keverjenek bennünket?⁸ Egyáltalán léteznek-e homályos terjedelmű fogalmak vagy bizonytalan határvonalú tárgyak? Ez utóbbi két kérdés talán nem is függetleníthető egymástól. Mindenesetre a válasz attól függ, hogy leírhatók-e kétértékű logikával a finom átmenetek és lágy struktúrák?

Meglátunk egy ismerős arcot az utcán, emlékezetet valakire akit már nagyon régen nem láttunk, ám bizonytalanok vagyunk benne ő-e az, hogy azonos-e a látott arc a mi régi barátunkkal. Figyelünk a hangjára, talán az segít a felismerésben. Ha az sem segít megszólítjuk, és a nevét vagy közös ismerőseinket kérdezzük. Ugyanakkor aki naponta látta ezt az arcot, nem veszi észre a változást, pedig a változás megtörténik, csak olyan kis mértékű, hogy emberi szemmel nem érzékelhető. Nem biztos, hogy ez a látás hibája. Nem volna könnyű olyan gépet készíteni, amelyik pontosan érzékelné a napi változásokat ám egyúttal arra is képes lenne, hogy arcokat azonosítson. Hogyan lehetne ezt a jelenséget leírni matematikai nyelven? Alkalmas-e erre a feladatra a matematika és a kétértékű logika?

Lehet-e két tárgy azonos? Lehetséges-e két asztal, amelynek minden tulajdonsága megegyező? Ha igen, akkor honnét tudjuk, hogy két tárgyunk van, hogyan tudjuk megkülönböztetni őket? Ha ugyanis a két tárgy valóban azonos, akkor minden szempontból azonos, tehát nem két tárgy. Bertrand Russell filozófiai önéletrajzában erről így ír: „... x-nek egy másik különöstől, y-tól tisztán numerikusan kell különböznie, s ily módon logikailag lehetségesnek kell lennie annak, hogy két különös entitás, x és y egymás összes tulajdonságaiban osztozzék, és mégis kettőt alkossanak. Azt persze nem tudnánk, hogy kettőt alkotnak, hiszen ez azt rejtené magában, hogy tudjuk: x különbözik y-tól, ami y-ról nem mondható; valójában x egy pusztán megismerhetetlen szubsztrátummá változna, vagy egy láthatatlan fogassá, amelyről úgy csüngenek le a tulajdonságok, mint egy falusi ház gerendájáról a sonkák.”⁹ Később Russell elfogadta azt a nézetet, hogy ha két objektum minden tulajdonsága azonos, akkor az egy objektum.

Ha csak annyit mondunk, hogy két tárgy egyforma, azt nyilván úgy értjük, hogy legalább a helyük különböző. Vagy van két tárgyunk, és akkor azért nem beszélhetünk azonosságról, mert a kettő nem egy, vagy pedig csak egyetlen tárgyunk van, tehát nem beszélhetünk két tárgyról, csak azt mondhatjuk, hogy az a tárgy önmagával azonos. Ámde mindezeket belátva mint haszontalant el kell-e vessük az "azonosság" fogalmát? Ha ezt megteesszük és következetesen végrehajtjuk kérdés, hogy megmarad-e nekünk legalább a hasonlóság?

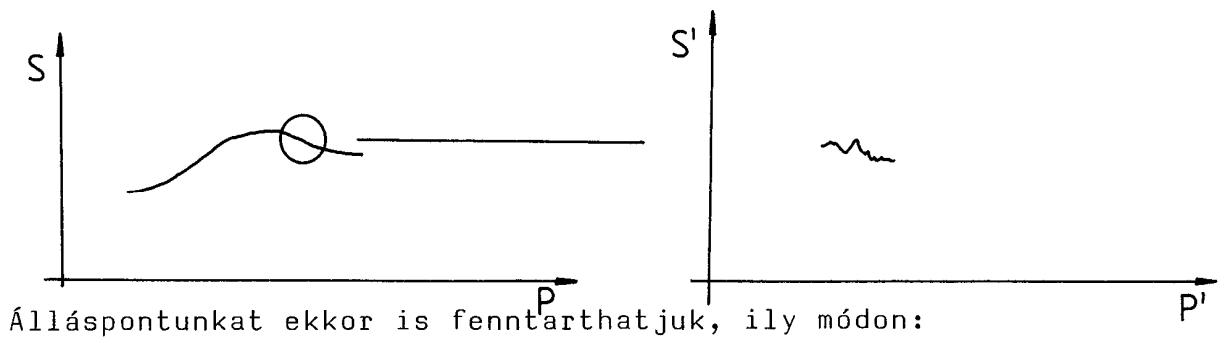
Mi alapján állítjuk, hogy $a=a$, amikor az, ami az azonosság jel baloldalán szerepel, nem mindig tökéletesen egybevágó azzal, ami a jobb oldalán van, különösen ha kézzel írom le a két betűt? Egyáltalán honnét tudjuk, hogy a köztük lévő két párhuzamos vonal az azonosság jel? Vajon itt valami egyedülálló emberi képességgel van dolgunk? Hogy lehet, hogy a kutya megismeri a gazdáját, hisz korántsem biztos, hogy az alakja és szaga változatlan, megegyező a korábbival? Honnét tudja a fenolftalein, hogy mit kell csinálnia, amikor nincs két egyforma sav, de még két egyforma kénsav sincs? Honnan tudja egy automata, hogy a sok különböző gépbe dobott kétforintos mind kétforintos? Vajon valamiféle mély dialektikai rejtély van abban, hogy úgy véljük, hogy egy csőbe bedobott golyó ugyanaz, amikor a cső végén kigurul? David Hume azt kérdezte több mint kétszáz évvel ezelőtt, hogy miért hisszük, hogy ma ugyanaz a Nap kelt föl, mint tegnap? A válasz egy hit, egy filozófiai–metafizikai hit. Mi önkéntelenül hiszünk valami folytonosságban. Ha a mérési eredmények ilyenek:



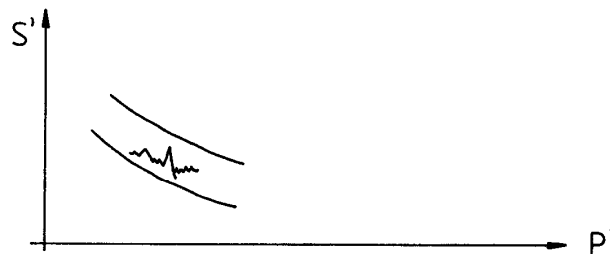
akkor hajlamosak vagyunk azt így felfogni:



Megeshet persze, hogy valóban módunkban áll a mérést jóval sűrűbben és pontosabban elvégezni, és ekkor az elképzelt folytonos összefüggés egy részletét kinagyítva ezt kapjuk:



Álláspontunkat ekkor is fenntarthatjuk, ily módon:



/ A jelenség "S" paramétere "p" függvényében a sávban van, Ehhez azt is hozzátehetjük, hogy milyen valószínűséggel./

Más ehhez hasonló metafizikai hiteink is vannak, ám ennek belátásához rövid kitérőt kell tegyünk, részben megelőlegezve későbbi vizsgálódásokat. Egy dolog azt mondani, hogy $a=b$ *logikai* értelemben, és más dolog azt mondani, hogy "a" alma azonos súlyú, mint "b" alma, vagy "a" szakasz megegyező hosszú "b" szakasszal, *fizikai* értelemben. A második esetben a tárgyakhoz tartozó *jellemzők értékeiről* – más szóval *állapotokról* – állítjuk, hogy azonosak vagy nem azonosak, és nem magukról a tárgyokról. Ha például látunk két egyforma hosszú – mondjuk 'a' és 'b'

betűvel jelölt – egyenes szakaszt, akkor mondhatjuk, hogy 'a' adott pontossággal való megmérése során kapott szám, és 'b' azonos pontossággal való mérése során kapott szám megegyezik, azonos. Legyen a 'hosszúság' jellemzőt leíró függvény valamely tetszőleges x tárgyra ilyen módon kifejezve: $hossza(x)$. Ekkor az 'a' szakasz hossza így fest: $hossza(a)$, míg a 'b' szakasz hossza ehhez hasonlóan: $hossza(b)$. A két szakasz távolságának adott pontosságú megegyezése egy szám önazonosságába megy át illetéknéppen: $hossza(a)=hossza(b)$. A két szakasz egyenlő távolságán valamiféle tárgyi manipulációra gondolunk. Pl. egy merev rudat kétszer tudunk "a" mentén lefektetni úgy, hogy ne lógjon túl, és "b" mentén is kétszer tudjuk megtenni ugyanezt. A mérés során feltesszük, hogy a merev test nem, vagy csak elhanyagolható mértékben változtatja hosszát, és a mérendő szakasz sem változik, sem a mérés következtében, sem egyéb okból. Mérési eljárásunk olyan – épp ezért találtuk így ki –, hogy számokat tudjunk kapcsolni a tárgyak tulajdonságaihoz. A számokról aztán már állíthatjuk a logikai azonosságot. De, hogy az egyenlő hosszúságokkal való haladást egyenlő – azonos – számokban kell kifejezni, ez inkább alapfeltevés – játékszabály –, mint kísérleti tény, aminek hasznossága a matematika és geometria hasznos alkalmazásaiban mutatkozik meg.¹⁰ A logikai azonosság használata kapcsolatban van a fizikai (materiális) egyformasággal. Az, hogy mi látjuk, hogy $a=a$, az úgy *történik* – nem ezt jelenti(!) – hogy a baloldali 'a' jel egyforma a jobboldali 'a' jellel. Nem mindig tökéletesen egybevágó, de mi mégis úgy értjük, hogy a két jel ugyanaz, és ez csak úgy lehetséges, hogy a két jelpéldány alakjában van valami közös. Ha egy olyan gépet kívánunk készíteni amely tud olvasni, felismeri az azonosnak szánt jeleket, akkor ugyancsak úgy kell megszerkesztenünk, hogy fölismerje a jelek alakjában lévő hasonlóságot, és a szoros hasonlóságot mint egyformaságot tekintse. Ha azonban megkérdezzük, hogy mi az egyformaság, és egy olvasó gép miket tekint egyformának, akkor magyarázatunk nem mondható el az 'azonosság' logikai terminus nélkül. A nyelvhasználat támaszkodik a jelpéldányok egyformaságára, de ezáltal mégsem kerültünk a körbeforgás csapdájába, mert az 'azonos' terminus meghatározása a nyelven belül nem támaszkodik fizikai, tapasztalati tényekre. A modern logika és

filozófia egyik legnagyobb eredménye, hogy az 'azonosság' definiálható a másodrendű logikában, és jellemezhető axiómákkal az elsőrendű logika nyelvében.

A bináris relációk alapvető tulajdonságai. A vizsgálatunk tárgyát képező szavak viszonyokat írnak le, mégpedig olyan viszonyokat, melyek két különböző vagy nem különböző dolog között állhatnak fenn. Másképp fogalmazva e szavak logikai elemzésben olyan hiányos kifejezések, melyek két üres helyet tartalmaznak, és ha az üres helyeket szabályos módon kitöltjük, akkor mondatokat kapunk. Az ilyen szavakat klasszikus logikai elemzésben 'kétargumentumú predikátum'-nak, némelykor 'bináris reláció'-nak nevezik. Néhány példa rögtön érthetővé teszi mindezt. Értelmetlenség azt mondani minden összefüggés nélkül, hogy 'Péter kisebb.' viszont értelmes az a mondat, hogy 'Péter kisebb mint Pál.' A 'Péter kisebb' mondat csak olyan helyzetben értelmes, ha tudjuk, hogy valakiről beszélünk, adott esetben Pálról, és arról a kérdésről, hogy ki az a családban aki kisebb mint Pál. Ilyen esetben értelmes lehet egy egyszavas válasz is, vagy egy töredékes kifejezés is, mint az, hogy 'Péter kisebb.' Mindezzel azt emeltem ki, hogy a 'kisebb' szó viszonyt ír le, amelyik két dolog között állhat fenn. Ilyen esetekre gondolok, hogy 'A szomszéd háza kisebb mint a polgármester háza'; 'Az én autóm kisebb mint a te autód. 'Ez a körte kisebb mint az asztalon lévő körte'. A 'kisebb' szó használatát logikai-grammatikai szempontból tehát úgy jellemezhetjük, hogy 'x kisebb mint y' ahol az x és y változók helyén az előbb említett egyedi dolog: ház, autó, gyümölcs vagy 'Péter' és 'Pál' szerepelhet. Amikor azt állítjuk, hogy Péter kisebb mint Pál, akkor személyek közötti viszonyról beszélünk, és nem magyar személynevek viszonyáról. Magyar személyneveket *használunk* ennek a viszonynak a leírására, de amiről beszélünk, azok nyelven kívüli dolgok. Az 'egyforma, felcserélhető, hasonló, egyenlő, azonos' szavak az előbbi példához hasonlóan kétargumentumú predikátumok, tehát használatuk sémája ilyen: x egyforma y-al; x felcserélhető y-al; x hasonló y-hoz. Más betűket is használhatunk a szerkezet kifejezésére, pl. így: z egyenlő v-vel, vagy w_1 azonos w_2 -vel. Még egy technikai, jelölésbeli kérdésre kell kitérjek, ami néha nehezíti a megértést. Azt a logikai-grammatikai szerkezetet, hogy 'x idősebb mint y' gyakran

célszerű ilyen formában fölírni: idősebb mint(x,y). Az 'idősebb' viszonyzó helyére egy általánosságot kifejező nagybetűt írva ezt kapjuk: R(x,y). Ezt tehát úgy kell érteni, hogy x R viszonyban áll y-al, ahol 'R' jelen esetben az 'idősebb mint' kifejezést jelenti. Ennek a jelölésmódnak a tömörség és az áttekinthetőség a haszna.

Tekintsük azt a predikátumot, hogy 'testvére'. Ennek a logikai-grammatikai szerkezete ilyen: x testvére y-nak. Ezen kívül arra a kérdésre is válaszolnunk kell, hogy mik állhatnak x és y helyén? Egyedi dolgok állhatnak, de ennél több is igaz. Nem állhatnak almák és körték, kavicsok vagy üveggolyók, viszont élőlények igen. Sőt még ennél többet is tudunk. Tudjuk, hogy ha x testvére y-nak, és x személy, akkor y-is személy, vagy ha z testvére w-nek és z kutya, akkor w is kutya. A szó egy átvitt értelmében beszélhetünk testvérvárosokról is, de ez inkább csak színesíti a használatot. Nem követünk el súlyos hibát, ha úgy tekintjük, hogy a 'testvér' szó használata csak élőlények között értelmes. Úgy fejezhetjük ezt ki szaknyelven, hogy a 'testvér' predikátum terjedelme élőlények rendezett páryainak halmaza. Ez semmi mást nem jelent, mint hogy mindig csak két dolog között áll fenn ez a viszony, és e dolgok élőlények. Még mást is tudunk a 'testvére' szó által meghatározott relációról. Azt is tudjuk, hogy *szimmetrikus* reláció a 'testvére', mert ha x testvére y-nak, akkor y is testvére x-nek. De ugyanakkor nem *reflexív*, mert senki sem testvére önmagának, azaz ha valaki egyedüli gyerek, akkor nincs testvére. Ennek viszont ellentmond, ha *tranzitív* relációnak tekintjük. Ez a következőképpen látható be. Bármely édestestvérekre, ha x testvére y-nak és y testvére z-nek, akkor x is testvére z-nek. Ez a tranzitív tulajdonság igaznak tűnik az édestestvérek halmazán. Ebből következik, hogy ha A és B testvérek, akkor B és A is testvérek, de mivel A testvére B-nek, és B testvére A-nak, akkor A is testvére kéne legyen A-nak, a tranzitív tulajdonság következtében. Ez pedig azt jelentené, hogy a 'testvére' reláció reflexív, amit az előbb kizártunk. Célszerű tehát a szó eredeti jelentését kissé megváltoztatva reflexív relációnak tekinteni a 'testvére' relációt, hogy a tranzitivitás tulajdonsága is érvényes legyen az édestestvérek között. Az így módosított értelemben a 'testvére' reláció tehát reflexív is, szimmetrikus is és tranzitív is. Ezzel szemben *aszimmetrikus* reláció a 'felesége' vagy 'gyermeke', mert senki sem felesége vagy gyermeke

önmagának, és ha x felesége y -nak, akkor fordítva nem áll; valamint ha z_1 gyermeke z_2 -nek akkor z_2 nem gyermeke z_1 -nek. Lássunk egy másik példát. Az 'idősebb' kétargumentumú predikátum terjedelmébe személyek, növények és állatok is tartoznak, de épp úgy hajók, városok vagy borok és vallásos hitek vagy hangszerek, és zenei irányzatok, viszont nem tartoznak számok, vagy halmazok. Tudjuk azt is, hogy *tranzitív* relációt határoz meg az 'idősebb' viszony. Ez azt jelenti, hogy ha x idősebb mint y , és y idősebb mint z , akkor x is idősebb mint z . Az 'őse' predikátum által meghatározott reláció is tranzitív, hiszen ha x -nek őse y és y -nak őse z , akkor x -nek őse z is. Érdekes a következő példa. Különbözőféle relációkat határoz meg a 'szereti' predikátum – másképp fogalmazva a 'szereti' viszony – attól függően, hogy milyen emberek köréről beszélünk. Az önző, önelégült emberek halmazán ez egy pusztán reflexív reláció, mert az ilyen emberek csak önmagukat szeretik, a boldogtalan szerelmesek halmazán viszont aszimmetrikus, mert ha az egyik szereti a másikat, a másik sajnos nem szereti őt. Kiegyensúlyozott emberek baráti társaságában, ahol mindenki szereti a másikat és önmagát is, reflexív is és szimmetrikus is. Ez a példa bemutatta azt, hogy egy kétargumentumú predikátum – mint amilyen a 'szereti' – különböző halmazokon más-más bináris relációt határoz meg. A 'bináris' reláció dolgok párpai között áll fenn, ezzel szemben mondjuk a 'futballcsapat' egy értelmezése tizenegy tagú reláció a játékosok halmazán. Természetesen másképp is értelmezhetjük a klubokat, beleértve a futballcsapatokat is. Ezek a legegyszerűbb esetben halmazok, más esetben, ha még a portások, takarító személyzet és az épületek is részei a modellnek, akkor meglehetősen bonyolult matematikai struktúrát kapunk.

Eddig egyedi tulajdonságait ismertük meg a relációknak. Vannak azonban olyan relációk is, melyekre több reláció tulajdonság és teljesül. Ezekre is mutatok néhány példát. Milyen reláció az egybevágóság a geometriában? Nyilván reflexív is – mert minden alakzat egybevágó saját magával – szimmetrikus is – ha az egyik egybevágó a másikkal, akkor a másik is az egyikkel – és tranzitív is, mert ha az első egybevágó a másodikkal, és a második a harmadikkal, akkor az első is a harmadikkal. Az ilyen relációkat, melyekre ez a három követelmény egyaránt teljesül,

'*ekvivalencia reláció*'-nak nevezik. Ilyen a módosított értelmű 'édestestvére' reláció is. A jól olvasható festékfoltok egy halmazán ekvivalencia relációt határoz meg a 'betű' fogalma. Ez azonban csak akkor igaz, ha nem érdekelnek bennünket a betűtípusok, vagy a kézírás azonosítása. Hasonlóan ehhez a hangok halmazán egy ekvivalencia osztályt határozza meg a 'szó' fogalma, ha csak a jelentés érdekel bennünket, és nem érdeklődünk a kiejtés által kifejezett érzelem iránt. Ha játékvasutunk van, akkor a sínek között is meghatározhatunk egy ekvivalencia relációt. Egyformák lesznek az egyenlő hosszúságú és azonos alakú sínek. Ekkor az egyforma sínek egymással fölcserélhetők is lesznek. Egyformák egymással az azonos működésű és teljesítményű, valamint azonos fajta foglalatot igénylő villanykörték, de épp így az egyforma esernyők vagy sapkák egy bolt árukészletében. Vajon az egyforma dolgok minden esetben fölcserélhetők egymással? Később visszatérek erre a kérdésre.

A relációknak többféle értelmezése is használatos. Röviden bemutatom ezeket, mielőtt tovább haladok. Alapvetően a bináris relációkkal foglalkozom, de ennek megértéséhez szükséges néhány elvont fogalom használata. Ilyenek a 'rendezett pár' és a 'halmazok Descartes' szorzata. A rendezett párok jelek kéttagú sorozatai, melyek esetében megkülönböztetjük a jelek sorrendjét. Tehát $\langle a,b \rangle$ különbözik $\langle b,a \rangle$ -tól és $\langle a,a \rangle$ különbözik $\langle a \rangle$ -tól. Két halmaz Descartes szorzatán pedig rendezett párok olyan halmazát értjük, melyek első eleme az első halmazba, második eleme a második halmazba tartozik. Pl. legyen a két nem üres halmaz A és B a következő módon meghatározott. $A=\{a,b\}$ és $B=\{a,c\}$ Ekkor $A \times B$ jelöli a halmazok Descartes szorzatát (direkt szorzatnak is nevezik), ahol $A \times B = \{\langle a,a \rangle, \langle a,c \rangle, \langle b,a \rangle, \langle b,c \rangle\}$ A legegyszerűbb értelmezés rendezett párok valamely halmazát tekinti relációnak. Ekkor a rendezett párok halmaza, mint egy kétargumentumú predikátum terjedelme értelmezendő. Egy másik értelmezés szerint a relációk olyan rendezett hármassok: $\langle A,B,S \rangle$ ahol S részhalmaza $A \times B$ -nek. S lehet üres halmaz is, és ha A és B közül az egyik üres, akkor S is üres. Ezt 'üres reláció'-nak nevezzük. Ebben a felfogásban 'homogén relációnak' nevezik az olyan relációkat, ahol A és B azonosak. Bármely bináris reláció úgy is tekinthető mint két halmaz egymáshoz való rendelése, ahol a hozzárendelést írják le a S halmaz elemeit jelentő rendezett párok.

Más felfogásban éppen a leképezés az alapfogalom, és a relációkat értelmezik a leképezés fogalmának alkalmazásával. Én most egy harmadik utat követek. A következőkben a (bináris) relációk úgy értelmezettek, min egy $\langle M, S \rangle$ rendezett pár, ahol S részhalmaza $M \times M$ -nek. Az előbb említett felfogásból nézve ezek tehát homogén relációk. Úgy is felfoghatjuk, hogy ebben az értelmezésben M az A és B halmazok egyesítése. Ettől a felfogástól csak a leképezések ábrázolásakor térek el, melyeket inhomogén relációknak fogom tekinteni. A relációkat mint 'predikátumok' által meghatározott struktúrákat értelmezem. Pl. a 'barátja' predikátum más és más barátokat határoz meg attól függően, hogy emberek mely körére szűkítjük le a vizsgálódás körét. A relációk tehát a mostani értelmezésben teljesen meghatározott matematikai struktúrák, ami azonban nem zárja ki, hogy maguk a relációk is rendszert alkossanak. Könnyen belátható, hogy a főváros lakosain értelmezett 'testvére' relációnak egy kibővítése az ország lakosain értelmezett 'testvére' reláció. És még ez utóbbi reláció is tovább bővíthető a kontinensek vagy a bolygó lakóinak irányába. Ennél is tovább lépve beszélhetünk az összes olyan relációról, melyek a 'testvére' relációhoz hasonlóan szimmetrikusak. Így eljutunk a 'reláció forma' fogalmához. Megjegyzem, hogy a következő gondolatok lényegét nem érinti, hogy melyik reláció felfogást fogadjuk el.¹¹ Célszerű rögzíteni néhány további alapfogalmat a teljesség igénye nélkül.

\mathfrak{R} -**üres** reláció M halmazon $=_{df}$ M halmaz semelyik két elem között nincs kapcsolat.

\mathfrak{R} -reláció valamely x és y eleme **összehasonlítható** $=_{df}$ ha vagy $x \mathfrak{R}$ -relációban y -al vagy fordítva, $y \mathfrak{R}$ -relációban van x -el. Röviden $x \mathfrak{R} y$ vagy $y \mathfrak{R} x$. Nem zavarjon meg bennünket, hogy a bináris relációkat kétféle módon is szokták jelölni: $x \mathfrak{R} y$ vagy $\mathfrak{R}(x, y)$. Az x és y elemeket vasútállomásoknak tekintve közöttük kiindul vagy megérkezik legalább egy irányba egy sínpár.

\mathfrak{R}^{-1} -reláció az eredeti \mathfrak{R} reláció **megfordítása** $=_{df}$ x akkor van kapcsolatban y -al, ha az eredeti reláció esetén $y \mathfrak{R} x$. Szokták ezt a reláció **konverzánek** vagy **inverzének** is nevezni. Pl. a 'gyermek' reláció megfordítása a 'szülője' reláció.

\mathfrak{R}^* -reláció az eredeti \mathfrak{R} reláció **tranzitív lezártja** =_{df} Az eredeti \mathfrak{R} relációt olyan módon egészítjük ki, hogy igaz lesz bármely három x,y,z elemére, hogy ha x kapcsolatban van y -al és utóbbi z vel, akkor x is kapcsolatban – \mathfrak{R} relációban – van z -vel. Ennek a nem könnyen érthető meghatározásnak azért nagy a jelentősége, mert segítségével értelmezhető az 'őse' vagy 'leszármazottja' reláció a 'gyermeke' reláció alapján. Ha x leszármazottja y -nak, akkor x vagy gyermeke y -nak, vagy gyermeke gyermekének, vagy gyermeke valamely gyermeke egy gyermekének, és a sor még tovább is folytatható.

A relációk szemléletesen ábrázolhatók táblázatokkal és nyilakkal is. Utóbbiakat a matematikában irányított gráfoknak nevezik. Legyen M halmaz két eleme 'a' és 'b' melyek között fennáll az $a\mathfrak{R}b$ reláció. Mint említettem, ez így is felírható: $\mathfrak{R}(ab)$. Ezt grafikusan is ábrázolhatjuk: $a \rightarrow b$. Ha fordított irányban is igaz a kapcsolat – $a\mathfrak{R}b$ ÉS $b\mathfrak{R}a$ – akkor így: $a \leftrightarrow b$. Ha viszont 'a' elem önmagával van kapcsolatban, akkor a belőle kiinduló nyíl önmagába tér vissza, és így mintegy hurokkal jelölhetjük ezt a relációt. A reflexív relációkat ilyen módon ábrázolva minden elemükön hurkot találunk.

Az alábbi táblázatokban szereplő '1' jel azokra a párokra áll fenn, amelyek között fennáll a reláció. A párokat vízszintes-függőleges sorrendben kell kiolvasni. Vajon miért írtam ugyanolyan sorrendben az alaphalmaz elemeit, mind a vízszintes, mind a függőleges oszlopban? Ezért, hogy szép szabályos ábrákat kapjunk bizonyos esetekben. Így a táblázatok ránézésre mutatják a relációk nevezetes tulajdonságait. Ha pl. egy reláció reflexív, akkor a relációt ábrázoló táblázat átlójában mindenütt '1'-jelet látunk. Ha nem azonos sorrendben lennének fölírva a táblázat vízszintes és függőleges oszlopában az elemek, akkor ez nem látszana ilyen szépen. Ahelyett, hogy azokat a rendezett párokat adom meg, amelyekre fennáll a reláció, megadhatom azokat is, amelyekre nem áll fenn, minden információvesztés nélkül. Természetesen a szokásokon túl, olyan szempontok is vezérelhetnek, hogy minél egyszerűbb legyen a táblázat. Ezért, ha majdnem minden négyzetbe "1"-et kell írunk, akkor célszerűbb azokat a helyeket megadni, ahova nem kell "1"-et írunk.

Az is megeshet, hogy azoknak a pároknak a száma, amelyekre a reláció fönnáll, véges, ám azoké, amelyekre nem áll fenn, végtelen. Ilyenkor nyilván csak az egyik megadási mód a célszerű. Táblázat helyett megadhatjuk azon párok halmazát, amelyekre a reláció fönnáll (vagy nem áll fönn), valamilyen szabállyal is. Most a bináris relációk tulajdonságait csak táblázattal mutatom be, de célszerű gyakorlás képpen gráfokkal is ábrázolni a példákat. Legyen adott egy M halmaz melynek négy eleme az ABC első négy betűje által jelölt négy különböző dolog. Azaz $M = \{a, b, c, d\}$

\mathfrak{R}	a	b	c	d
a	1			
b		1	1	
c			1	
d	1			1

Ez a reláció **reflexív** de nem szimmetrikus, mert d kapcsolatban áll a -val, de a nem áll kapcsolatban d -vel, és b kapcsolatban áll c -vel, de c nem áll kapcsolatban b -vel. Általánosságban: \mathfrak{R} reflexív egy M halmazra nézve pontosan akkor ha M bármely x elemére $\mathfrak{R}(x,x)$. Az azonosság egy olyan viszony – az egyetlen ilyen viszony – amely reflexív és csak reflexív relációt határoz meg az élőlények és élettelen tárgyak halmazain. Mivel bármely tárgy csak önmagával azonos, ezért a tárgyak valamely M halmazán ennek a relációnak a meghatározásához nincs szükség az azonosság fogalmára. Egyszerűen az M halmazbeli $\langle x,x \rangle$ párok halmaza.

A reflexív reláció ellentéte az **irreflexív** reláció. Akkor az átlóban csupa 0-t látunk.

\mathfrak{R}	a	b	c	d
a	1			
b			1	
c		1	1	
d				

Ez a reláció **szimmetrikus**, de nem reflexív mert sem b sem d nincs kapcsolatban önmagával, viszont M teszőleges x és y elemére, ha x kapcsolatban áll y -val akkor fordítva is igaz, azaz y is kapcsolatban áll x -el. Általánosságban: \mathfrak{R} szimmetrikus egy M halmazra nézve pontosan akkor ha M bármely x,y elemeire ha $\mathfrak{R}(x,y)$ akkor $\mathfrak{R}(y,x)$.

Ennek ellentéte az **aszimmetrikus** reláció. Ekkor a reláció x és y között legfennebb csak az egyik irányban állhat fenn.

Részleges ellentéte az **antiszimmetrikus** reláció. Ekkor ha x és y között mindkét irányban fennáll a reláció, akkor $x=y$.

\mathcal{R}	a	b	c	d
a			1	1
b				
c				1
d				

Ez a reláció sem nem szimmetrikus, sem nem reflexív, viszont **tranzitív**, mert M tetszőleges x,y és z elemére, ha x kapcsolatban áll y -val és y z -vel, akkor x is kapcsolatban áll z -vel. Általánosságban: \mathcal{R} tranzitív egy M halmazra nézve pontosan akkor ha M bármely x,y,z elemeire ha $\mathcal{R}(x,y)$ és $\mathcal{R}(y,z)$ akkor $\mathcal{R}(x,z)$.

\mathcal{R}	a	b	c	d
a	1	1		
b	1	1		
c			1	1
d			1	1

Ez a reláció szimmetrikus, reflexív és tranzitív, melyet **ekvivalencia** relációnak neveznek. Figyeljünk föl arra, hogy az eredeti M halmazt olyan egymással nem keveredő részekre oszthatjuk, hogy azokon belül bármely két elem kapcsolatban fog állni egymással. Jelen esetben ezek az $\{a,b\}$ és $\{c,d\}$ részhalmazok. Bebizonyítható, hogy bármely ekvivalencia reláció M alaphalmazára felosztható ilyen módon. Ezeket a részhalmazokat **ekvivalencia osztályoknak** nevezik. Tetszőleges két elem pontosan akkor van ekvivalencia relációban egymással, ha van olyan ekvivalencia osztály, melynek mindketten elemei.

\mathcal{R}	a	b	c	d
a	1	1		
b	1	1	1	
c		1	1	1
d			1	1

Ez a reláció szimmetrikus és reflexív, viszont nem tranzitív. Az ilyen relációkat **tolerancia** relációnak nevezik.

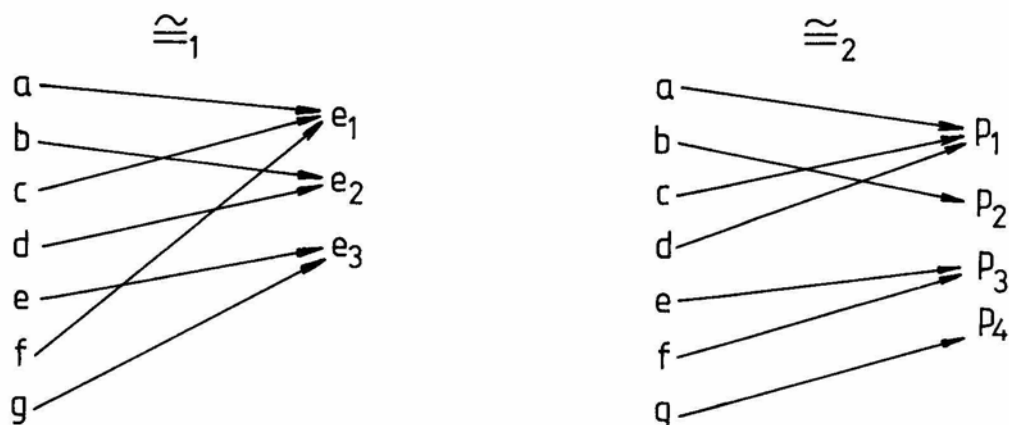
Mint a bevezetőben említettem, a relációk most bemutatott tulajdonságai – reflexív, szimmetrikus, tranzitív és az ellentétes tulajdonságaik – azért fontosak, mert ha egy alaphalmazon érvényesek, akkor azon belül

minden szűkítésén is érvényesek. Ezek a reláció tulajdonságok tehát a szűkítést tekintve öröklődnek.¹²

Hasonlóságtól az egyformaságig. A toleranciareláció reflexív és szimmetrikus, mert minden dolog hasonlít önmagához, és ha az egyik dolog hasonlít a másikhoz, akkor a második is hasonlít az elsőhöz. Ha a toleranciát mint a „hasonlóság” matematikai megfogalmazását tekintjük, akkor vitatható lehet a reflexivitás tulajdonsága. Ugyanis egy egyenesen irreflexív (irreflexív=nem reflexív), de szimmetrikus relációt is a hasonlóság kifejezőjének tarthatjuk. Ilyen reláció például a „rímel” a magyar szavak halmazán. „Nyilván, hogy ha x szó rímel y szóval, akkor ez fordítva is igaz. A verselési hagyományok szerint azonban egy szó önmagával nem rímelhet, tehát ez a reláció irreflexív. ... Bár ellenpéldákat lehet találni egyes költőknél. Mint a Tinódi százötven valá-ja ... Ha ugyan jól emlékszem reája - írja Arany János”.¹³ Nyilvánvaló, hogy egy irreflexív, de szimmetrikus reláció nem lehet tranzitív. Konstruálható ugyanis olyan rímsorozat, ahol az egymást követő szavak rímelnek egymással, az első és utolsó azonban nem. Ha azonban el is vetjük a reflexivitást, a kapott reláció éppúgy megadható lesz, M halmaz elemeinek L halmaz elemeihez – a jegyekhez – való hozzárendelésével, mint egy reflexív reláció. Az egyformaságot és hasonlóságot tárgyak, nyelvek, szavak, szokások, emberek és csillagok, általában tetszőleges objektumok között értelmezhetjük. Az egyformaság a hasonlóság szélső esete. „A hasonló objektumok nem bonthatók fel élesen olyan osztályokra, ahol az egy osztályon belüliek hasonlóak, a különböző osztályokba tartozók pedig nem. A szituációk sokkal elmosódottabbak, nincsenek éles határok. Minden halmazbeli elem tartalmaz bizonyos információt a hozzá hasonló elemekről. De nem tartalmaz minden információt mint az egyforma elemek esetében. Nem úgy áll a probléma, hogy minden vagy semmi, teljes információ vagy teljes információtlanság. Különböző fokozatai lehetnek annak az információnak, amit az egyik elem hordoz más elemekről.”¹⁴ Lássunk néhány példát.

1. példa: Féltestvére reláció. Rendeljük az $M=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ -beli emberekhez hozzá az édesanyjukat, és legyenek egyformák azok az emberek, akiknek azonos az édesanyjuk. Az anyák halmaza $L_1=\{e_1,e_2,e_3\}$. Ezt a relációt \cong_1 jelöli. Ehhez hasonlóan legyenek egyformák azok az emberek, akiknek azonos az édesapjuk. Az

apák halmaza $L_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Utóbbi relációt \cong_2 jelöli. Ebben a példában a szülők és gyerek közötti reláció inhomogén reláció, mivel két különböző alaphalmazon van értelmezve a kapcsolat, míg a gyerekek relációi homogén relációk. Az emberek és szüleik relációit mutatja az alábbi ábra:



Ábrázoljuk táblázatokkal ezt a két ekvivalencia relációt. Az első azokat mutatja akiknek közös az édesanyjuk, a második azokat akinek az édesapjuk,

\cong_1	a	b	c	d	e	f	g
a	1		1			1	
b		1		1			
c	1		1			1	
d		1		1			
e					1		1
f	1		1			1	
g					1		1

\cong_2	a	b	c	d	e	f	g
a	1		1	1			
b		1					
c	1		1	1			
d	1		1	1			
e					1	1	
f					1	1	
g							1

A táblázatokat más módon is elkészíthetjük, úgy hogy más sorrendben írjuk föl a halmazok elemeit.

\cong_i	a	c	f	b	d	e	g
a	1	1	1				
c	1	1	1				
f	1	1	1				
b				1	1		
d				1	1		
e						1	1
g						1	1

(2)	a	c	d	b	e	f	g
a	1	1	1				
c	1	1	1				
d	1	1	1				
b				1			
e					1	1	
f					1	1	
g							1

Valójában ezek a relációk nem pontosan a 'féltestvére' kapcsolatot írják le, mivel úgy tekintik, hogy az egyedüli gyerekeknek is van féltestvére, és pedig önmaga. Tehát ezek a relációk egy reflexív relációval kibővített féltestvére relációt ábrázolnak. Ez hasznos a matematikai elegancia szempontjából, mert egyszerűbbé teszi az összefüggések tárgyalását. Ezek azután ábrázoljuk az 'édestestvére' és a 'féltestvére' relációt egy-egy táblázattal.

(é.testv.	a	c	b	d	e	f	g
a	1	1					
c	1	1					
b			1				
d				1			
e					1		
f						1	
g							1

\approx_f .testv.	b	d	c	a	f	e	g
b	1	1					
d	1	1	1	1			
c		1	1	1	1		
a		1	1	1	1		
f			1	1	1	1	
e					1	1	1
g						1	1

Az 'édestestvére' reláció ekvivalencia reláció (azzal a kis hibával, hogy mindenki testvére önmagának), míg a 'féltestvére' reláció tolerancia reláció. Mindkét relációt meghatározzák az ekvivalencia illetve a tolerancia osztályok. Két elem akkor és csak akkor ekvivalens, ha van őket tartalmazó *ekvivalencia osztály*, és ehhez hasonlóan, két elem akkor hasonlít egymásra – akkor van tolerancia relációban – ha van őket tartalmazó *tolerancia osztály*. Az előbbieket a $\{a,c\}$ $\{b\}$ $\{d\}$ $\{e\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ halmazok, míg a tolerancia osztályok a következők: $\{b,d\}$ $\{d,c,a\}$ $\{c,a,f\}$ $\{f,e\}$ $\{e,g\}$.¹⁵

2. Példa: a látás. Legyen 'd' a szem felbontóképességének határa, olyan kis érték, amelyen belül lévő pontokat a szem nem tudja megkülönböztetni egymástól. Vegyünk fel egy egyenes szakaszon n osztáspontot úgy, hogy a szomszédos pontok egymástól való távolsága kisebb legyen, mint d. A szakaszon lévő egymás melletti pontok nyilván nem különböztethetők meg egymástól, de a szakasz távolabbi pontjai már igen. Nevezzünk két pontot hasonlóknak, ha a szakaszon lévő távolságuk kisebb, mint d. A pontokat nevezzük el az első tíz természetes számmal, és tételezzük föl, hogy a szem azon pontokat tudja megkülönböztetni, amelyek három egységnél távolabb vannak. A három egységen belüli pontokat így hasonlóknak fogjuk tekinteni. Ennek a relációnak a táblázatát mutatja a következő ábra. Az ábrán jól látszanak az egymásba átfolyó tolerancia osztályok. Két pont összerosódik – nem megkülönböztethető – ha egy tolerancia osztályba esik.

Felbontóképesség	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1							
1	1	1	1	1						
2	1	1	1	1	1					
3		1	1	1	1	1				
4			1	1	1	1	1			
5				1	1	1	1	1		
6					1	1	1	1	1	
7						1	1	1	1	1
8							1	1	1	1
9								1	1	1

Talán Wittgenstein volt az első aki felfigyelt a tolerancia relációk struktúrájára a nyelvi jelentés tanulmányozása során. A természetes nyelv képlékeny jelentés hálózatát sokkal jobb közelítéssel írhatjuk le tolerancia relációkkal, mint ekvivalencia relációkkal. „66. Vizsgáld meg például egyszer azokat a folyamatokat, amelyeket „játékok”-nak nevezünk. A táblajátékokra, kártyajátékokra, labdajátékokra, küzdősportokra stb. gondolok. Mi a közös mindezekben? - Ne mondd, hogy „Kell valami közösnek lennie bennük, különben nem hívnák őket 'játékok'-nak” - hanem

nézd meg van-e valami közös mindben. - Mert ha megnézed őket, nem fogsz ugyan olyasmit látni, ami mindben közös, de látsz majd hasonlóságokat, rokonságokat, mégpedig egész halomnyit. Szóval: ne gondolkozz, hanem nézz! - Nézd meg például a táblajátékokat és kiterjedt rokonságukat. Majd térj át a kártyajátékokra: itt sok megfelelést találsz ama első osztállyal, de sok közös vonás eltűnik, sok más viszont előtűnik. Ha pedig áttérünk a labdajátékokra, akkor egynémely közös vonás megmarad, de sok el is vész. - Minden játék `szórakoztató'? Hasonlítsd össze a sakkot a malommal. Vagy talán mindenütt van nyereség és veszteség, és mindenütt versengenek a játékosok? Gondolj a pasziánszokra. A labdajátékokban van nyereség és veszteség; de ha egy gyermek a labdát a falnak dobja majd ismét elkapja, akkor eltűnik ez a vonás. Nézd meg, hogy milyen szerepet játszik az ügyesség és a szerencse. És milyen más az ügyesség a sakkban és a teniszben. S gondolj most a körjátékokra: itt megvan a szórakozás eleme, viszont mennyi más jellegzetes vonás eltűnt! És így mehetünk végig a játékok sok-sok más csoportján, s láthatjuk, amint hasonlóságok tűnnek fel és el. E vizsgálódás eredménye pedig így hangzik: az egymást átfedő és keresztező hasonlóságok bonyolult hálóját látjuk. Hasonlóságokat nagyban és kicsiben. 67. Ezeket a hasonlóságokat nem tudom jobb szóval jellemezni, mint hogy „családi hasonlóság”-ok; mert így fedik át és keresztezik egymást azok a különböző hasonlóságok, amelyek egy család tagjai között állnak fenn: természet, arcvonások, a szem színe, a járás, a temperamentum stb., stb. - És azt állítom: a `játékok' egy családot alkotnak. Éppígy alkotnak például a számfajták is családot. Miért nevezünk valamit „szám”-nak? Nos, például mert közvetlenül rokon valamivel, amit eddig számnak neveztünk; és ezáltal, mondhatjuk, közvetve rokonságba kerül valami mással, amit szintén így nevezünk. És számfogalmunkat úgy terjesztjük ki, ahogyan egy fonál fonásakor az egyik szálát a másikhoz sodorjuk. A fonál erőssége pedig nem azon múlik, hogy valamely szál egész hosszában végigfut-e a fonálon, hanem azon, hogy elég sok szál fonódik-e össze egymással. De ha valaki azt akarná mondani: „Tehát mindeme képződményekben van valami közös - tudniillik mindeme közös vonásoknak a diszjunkciója”, akkor én azt válaszolnám: ez

csak játék egy szóval. Éppígy lehetne mondani: van valami, ami az egész fonálon végigfut - tudniillik e szálak hézagmentes összefonódása.”¹⁶

Egyformaság és fölcserélhetőség. A józanész nem sorolja a szilárd testek tulajdonságaihoz térbeli helyüket, és egyes tulajdonságaik megváltozását sem, ha azok nem fontos változások. Egy asztal ugyanaz marad, ha máshová teszem, ha haraggal nézek reá, vagy más leltári jegyet ragasztok rá. Ezeket külső tulajdonságoknak nevezik, míg az asztal belső tulajdonságához tartozik, hogy a politúr egy kicsit megkopott vagy sem. Amennyiben kopottnak tartjuk, úgy tekintjük, hogy egy tulajdonsága megváltozott, nem pedig úgy fogjuk föl a dolgot, hogy egy új asztal keletkezett. Képzeljük egy, hogy egy kerékpár alkatrészeit az évek során egymás után kicseréljük, a kicserélt hibás alkatrészeket pedig egy zsákban összegyűjtjük. A kerékpár időben szomszédos állapotait mindaddig hasonlónak tartjuk, amíg apró alkatrészeket cserélünk ki rajta. Mindaddig úgy véljük ez az eredeti kerékpár, csak felújítottuk. Mit mondunk azonban, ha a kerékpár vázát vagyunk kénytelenek kicserélni? Ekkor új kerékpárunk lesz és a régi megszűnik létezni, avagy a régit használjuk tovább új vázzal? És mi van a zsákban? Mi történik, ha a zsákban lévő kopott, hibás alkatrészekből összeszerelünk egy kerékpárt, ekkor melyik a mi kerékpárunk? ¹⁷ Nincs az ehhez hasonló kérdésekre általános válasz, mert nincs a tárgyaknak nyelvtől és a gyakorlati használatától független lényege. Hogy mely szempontok alapján, mely jellemzők, mely jegyek, tulajdonságok alkalmazásával csoportosítjuk a tárgyakat és jelenségeket gyakorlati céloktól függ, és nincs a szempontoknak egy eleve elrendelt, egyedül helyes osztályozási módja. A következőkben példákat mutatok arra, hogy miképp csoportosíthatók az egyforma dolgok különféle szempontok alapján.

1. Példa. Vegyük az emberek halmazát, és tekintsük egyformának azokat az embereket, akiknek azonos az életkoruk és foglalkozásuk. Ezt a relációt megadhatjuk oly módon, hogy minden egyes emberhez hozzárendeljük az életkorát és a foglalkozását. Egyformák lesznek azok az emberek, akikhez egyazon életkort

és foglalkozást rendeltünk. Külön kérdés, hogy hogyan osztályozzuk a foglalkozással nem rendelkező embereket? Egy lehetséges megoldás az, hogy ezekhez "foglalkozással nem rendelkezik" jegyet, rendeljük.

2. Példa. Vegyünk egy műszaki példát is. Az a feladatunk, hogy egy tartószerkezetben, amelyben néhány csavar tönkrement, a hibás csavarokat hibátlan csavarokkal helyettesítsük. Ehhez meg kell határoznunk a csavarok azon tulajdonságait, amelyeknek igaznak kell lennie azon csavarokra, amelyeket a hibásak helyébe tehetünk. Tehát osztályoznunk kell a raktárunkban található csavarokat. Az osztályozás több jegy alapján fog történni. Ha ezek után megadják, hogy mely jellemzők, paraméterek a lényegesek a tartószerkezet egy adott helyén, akkor meg tudjuk határozni azon csavarok halmazát, amelyek ott alkalmazhatók. Az egyforma csavarok halmazai egy ekvivalencia relációt határoznak meg. A csavarokat egyformának tekinthetjük, minden egyes jellemzőjük alapján külön-külön, majd ennek alapján megadhatjuk a jellemzők bármely együttesére nézve az egyforma csavarok osztályait.

3. Példa Egy egyszerű matematikai példa. Rendeljük minden nem negatív egész számhoz a kettővel való osztási maradékát. Ekkor egy olyan ekvivalencia relációt kapunk, ahol bármely két páros, illetve bármely két páratlan szám egyazon ekvivalencia osztályba tartozik. Két szám akkor lesz relációban, ha azonos az osztási maradéka. Vegyük alapul csak az első tíz természetes számot a nullát is beleértve. M a dolgok – a természetes számok – halmaza, L a dolgokhoz rendelt jegyek – osztási maradékok – halmaza. $M=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $L=\{0,1\}$ A következő táblázat mutatja a számokat és alatta az osztási maradékot.

Szám	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
osztási maradék	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Ez alapján az alábbi relációt kapjuk.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1		1		1		1		1	
1		1		1		1		1		1
2	1		1		1		1		1	
3		1		1		1		1		1
4	1		1		1		1		1	
5		1		1		1		1		1
6	1		1		1		1		1	
7		1		1		1		1		1
8	1		1		1		1		1	
9		1		1		1		1		1

Ha másképp rendezzük sorba az alaphalmaz elemeit, szemléletesebb ábrát kapunk.

	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9
0	1	1	1	1	1					
2	1	1	1	1	1					
4	1	1	1	1	1					
6	1	1	1	1	1					
8	1	1	1	1	1					
1						1	1	1	1	1
3						1	1	1	1	1
5						1	1	1	1	1
7						1	1	1	1	1
9						1	1	1	1	1

Két ekvivalencia osztályunk van: $\{0,2,4,6,8\}$ és $\{1,3,5,7,9\}$ Figyeljük meg, hogy két szám ekvivalens – azonos a kettővel való osztási maradéka – ha egy ekvivalencia osztályba tartoznak.

4. Példa Az ekvivalencia reláció fogalmával értelmezhető a jeltípus fogalma is. Az egyforma jelpéldányok egymással fölcserélhetők, ezért a jelpéldányok halmazán értelmezünk egy ekvivalencia relációt a jelpéldányok tipográfiájának bizonyos egyforma tulajdonságai alapján, és az egy ekvivalencia osztályba sorolt jelek adják

egy jeltípus terjedelmét. Bizonyos egyforma festékfoltok ekvivalencia osztályai a számjelek, és az egyforma számot megnevező számjelek ekvivalencia osztályai a számok. Hasonló összefüggés áll fenn a hangok, szavak és fogalmak között. Ezt mutatja az alábbi táblázat.

Jelpéldányok	Jelek	Gondolatok
Festékfoltok, képernyő fénypontok alakzatai, megnyilatkozások, hangok, tapintási érzetek, kézjelek látványai	Szavak, számjelek, azokat tartalmazó kifejezések, mondatok	Számok, fogalmak, proposíciók

A XX. század előtt az ábrák, hangok nem, vagy csak körülményesen voltak továbbíthatók, és ezért különös hangsúlyt kapott a nyelv írott formája. A jelpéldányok azonban sem az írott, sem a szóbeli nyelven nem kommunikálhatóak, ezért kellett megalkotnunk a 'számjegy', 'szó' és 'mondat' fogalmát, ahonnan már csak egy lépés volt a 'szám', 'fogalom' és 'gondolat' fogalma. Pl. az 1, a $\sin(\pi/2)$, $\lg(10)$ jelek egyazon számot nevezik meg, így ezek fölcserélhetőek és ezért egy ekvivalencia osztályba tartoznak. A szavak és kifejezések az általuk kifejezett fogalom, míg a mondatok az általuk kifejezett gondolat alapján sorolhatók az egyformaság ekvivalencia osztályaiba. Az, hogy a számokat jelek ekvivalencia osztályainak neveinek tekintjük, vagy ideális létezőknek melyeket megneveznek az ekvivalencia osztályok elemei, filozófiai álláspont kérdése.

Mire használható, illetve mire nem feltétlen használható az egyformaság, mit jelent az egyformaság a gyakorlatban? Az egyformaság némelyik esetben a tárgyak, objektumok fölcserélhetőségét határozza meg. Egy elektronikai áramkörben egy $1k\Omega$ -os ellenállás kicserélhető vele azonos értékű, elektromos teljesítményű és zajtényezőjű másik ellenállással. Figyelmünk kiterjedhet még a lábak vastagságára és a geometriai méretekre, valamint az elrendezésre is, de lehet, hogy az ellenállás színe, vagy az ára már nem érdekel bennünket. A geometriai méretek közül is csak néhány alapvetően fontosra terjed ki a figyelmünk. Ha viszont ez az ellenállás egy

modern képzőművészeti alkotásban szerepel, akkor a színe és alakja is lényeges lehet. De nem mindig ilyen egyszerű a helyzet. Lehetséges, hogy egy rendszer valamely tagjával sikerül egyforma tagot találnunk, de a rendszer nem viseli el a két tárgy közötti felcserélés során keletkezett átmeneti állapotot. Más esetben a rendszer a beavatkozás során csak úgy válik ismét működőképessé, ha egy x alkatrészét egy olyan y alkatrészre cserélik ki, amelyik éppen nem egyforma x alkatrésszel, hanem attól valamilyen szempontból eltér. Erre példa, ha egy szöveget kihúzzunk a helyéről, akkor nem célszerű oda sem ugyanazt a szöveget, sem más vele egyforma szöveget visszakalapálni, hanem csak valamivel nagyobbat. Ha egy nagy megbízhatóságot igénylő berendezésből vizsgálat céljára kiforrasztunk egy alkatrészt, akkor gyakran előírják, hogy ugyanazt az alkatrészt, (tehát a már egyszer kiforrasztott alkatrészt) nem szabad visszaültetni a helyére, hanem csak egy vele egyforma (azonos), de új alkatrészt. Itt láthatóan nem teljesül az felcserélhetőség reflexív jellege. Vegyünk szemügyre jó sok csavart és csavar anyát. A csavarokat jellemzi az átmérő, a menetemelkedés, az anyagminőség, a felületkezelés, a hossz, a csavarokat a fej formája, az anyacsavar alakja, és talán még az is, hogy új-e a csavar és anya vagy használt. A használatától függően egyes jegyek, jellemzők fontosak lehetnek, mások meg nem. Kritikus alkalmazáskor még azt is előírhatják, hogy minden egyes csavart egyenként meg kell vizsgálni a fizikai szilárdság szempontjából, és ilyenkor ez is egy fontos jegy, egy fontos jellemző lesz. Lényeges lehet még a csavar ára is, vagy a beszállítási idő, ha a költségek és a gyártási idő nem mellékesek. Figyeljünk föl arra, hogy nincs eleve elrendelve, hogy mely csavarok egyformák és melyek nem. A lényeges jellemzőket (jegyeket) nekünk kell kellő körültekintéssel meghatározni, valamiféle fogalmi elemzés ebben nem lehet segítségünkre. Ismét a gyakorlati alkalmazás dönti el a lényeges és lényegtelen jellemzők, tulajdonságok megkülönböztetését. Felcserélhetők-e egymással az egyforma csavarok? Ne hamarkodjunk el a választ. Képzeljünk egy hidat, ahol a feladatunk a rozsdás, előregedett csavarok ellenőrzése, és kicserélése. Vajon ekkor fölcserélhetők-e egymással az egyforma öreg csavarok, vagy akár egy rozsdás csavar önmagával? Lehetséges, hogy egy beteg szívű embernek a szívével egyforma szívet sikerül

találni, olyat, amelyik minden szükséges szempontból megfelelő egy szívatültetés céljára, nem vált ki pl. immunválaszt a szervezetből. Ez azonban még nem jelenti, hogy a beteg megoperálható, hisz lehet, hogy más okok – pl. a beteg kora – az operációt nem teszi lehetővé. Az is nyilvánvaló, hogy egy szívatültetés során nem a régivel teljesen egyforma másik beteg szívet operálnak a testbe, hanem éppen ellenkezőleg egy egészséges szervet. Látható, hogy két objektum felcserélhetősége nem mindig ekvivalencia relációt határoz meg. Mindezekből levonhatjuk azt a következtetést, hogy a felcserélhetőség korántsem jelent mindig egyformaságot. Különböző példákat soroltam föl arra, amikor a felcserélhetőség nem reflexív, amikor az egyformaságból nem következett minden körütekintés nélkül a felcserélhetőség. Van valami közös azonban ezekben a példákban. Egy bizonyos szempontból valamennyi példa egyforma volt. A példák abból a szempontból voltak egyformák, hogy nem jelek, hanem fizikai tárgyak, vagy élő testek felcserélhetőségére vonatkoztak. Első látásra a jelek világában mindig egybeesik az egyformaság és felcserélhetőség. Egy számjel fölcserélhető egy másik példányával, egy betű egy másik ugyanolyan betűvel. Azonban látni fogjuk, hogy a dolog nem ilyen egyszerű, az egyformaság és felcserélhetőség kapcsolata a jelek világában sem probléma mentes.

Egy ekvivalencia relációt használhatunk arra, hogy jelek, jelöletei között fennálló kapcsolatokat, viszonyokat fejezzünk ki, de használhatjuk arra is, hogy maguk a jelek közötti viszonyokat adjunk meg. Ezért az az állítás, hogy két jel ekvivalens, nagyon semmitmondó. Mindig meg kell mondanunk, hogy milyen vonatkozásban ekvivalens a két jel, tehát, hogy mit értünk a konkrét esetben a két jel ekvivalenciáján. Érthetjük úgy, hogy a két jel által jelölt objektumok bizonyos meghatározott jellemzői, jegyei, tulajdonságai közösek. Erre adtunk meg néhány példát a korábbiakban. De nem ez az egyedüli lehetséges értelmezés. Használhatjuk arra is az ekvivalencia relációt, hogy megadjuk azon jelek halmazait, amelyek egy jelrendszerben, nyelvben egymással fölcserélhetőek. Megint más esetben arra használhatjuk az ekvivalenciát, hogy jeleket egy adott jelrendszerben, nyelvben betöltött szerepük alapján osztályozzuk, pl.: grammatikai kategóriákba soroljuk. Az

'azonosság' egy adott nyelvet alapul véve egy speciális ekvivalencia reláció, ami lehetőséget ad arra, hogy bizonyos meghatározott esetekben, de korántsem mindig, az egy ekvivalencia osztályba tartozó jeleket egymással fölcseréljük.

Azonosság és fölcserélhetőség. Képzeljük el, hogy az iskolában a matematikatanár a következő feladatot adta egy tanulónak: Mivel egyenlő $\sin(\pi/2)$? A diák elgondolkodott, és így szólt: „Tanár úr kérem $\sin(\pi/2)$ éppen $\sin(\pi/2)$ -vel egyenlő.” A matematika tanár mivel járatos volt a filozófiában és a logikában nem lett mérges, hanem így szólt. „Az azonosság hasznos esetei fiam azok, amikor az azonosság jel két oldalán különböző jelek fordulnak elő. Így azt mondd meg fiam, melyik az a másik számjel, aminek jelölésével $\sin(\pi/2)$ azonos?” A diák újra elgondolkodott, és így felelt: „Értem, $\sin(\pi/2) = (\sin(\pi/2) + \pi - \pi)$ ” A tanár újra elgondolkozott és így felelt: „Látom fiam, hogy érted a dolgod, ezért kénytelen vagyok teljesen egyértelműen fogalmazni. Melyik az a természetes számot jelölő atomi számjel, melynek jelölése azonos $\sin(\pi/2)$ jelölésével?. A diák erre nem tehetett mást, mint hogy megmondta a helyes választ: „ $\sin(\pi/2)$ egyenlő 1-el.”

Az iménti példa mutatja, hogy a matematika gyakorlatilag lehetetlenné válna az azonosságpredikátum (azonosság reláció) alkalmazása nélkül. A matematika számait kapcsolatba hozzuk a valósággal, és ilyen módon hasznos adatokat tudunk átadni egymásnak, és némelykor még bizonyos eseményeket is előre ki tudunk számolni formulák (képletek) segítségével. Az azonosság predikátumra tehát nem csak azért van szükség, mert néha egy dolognak két neve is van, hanem hogy összekapcsoljunk dolgokat és jeleket.¹⁸ Az azonosság haszna az, hogy lehetőséget ad a kifejezések átalakítására az igazság megváltozása nélkül, de a kifejezés praktikus használhatóságának jelentős megváltozásával.

Az „a azonos b-vel” séma akkor és csak akkor igaz, ha az 'a' és 'b' individuumnevek ugyanazt az individuumot nevezik meg. Világítsa meg ezt a tételt két példa. gr. Széchenyi István Naplóját olvasva megállapíthatjuk, hogy Széchenyi br. Eötvös Józsefet gyakran "Eötvös Pepi" néven említi. Nem szükséges kifejtteni a "Pepi" és a "József" közötti stiláris, hangulati különbséget. Ezt úgy fejezi ki a logikai

szaknyelv, hogy az "Eötvös József" és az "Eötvös Pepi" nevek jelentése különböző – intenzionálisan nem azonos –, bár az általuk megnevezett dolgok – az extenziójuk, vagy más szóval faktuális értékük – azonosak. Mi azonban most nem törődünk az intenziókkal, figyelmünk az extenziókra irányul. Ezért a hangulati, jelentésbeli különbség ellenére csak a jelöletekre figyelve a két nevet azonosnak tekintjük. Tehát: br. Eötvös József = Eötvös Pepi. Ehhez hasonló a következő példa. Radnóti Miklós bizonyos műveit álnéven írta. Ez alapján állítjuk, hogy Radnóti Miklós = Eaton Darr. Ám, ha ez igaz, akkor igaz kell legyen a következő is: Radnóti Miklós munkái és Eaton Darr munkái azonosak. Ez hamisságnak *tűnik*, hisz Radnóti csak bizonyos munkáit írta álnéven. Amit álnéven írt, azt álnéven írta és nem a valódi nevéen. Hamisságnak *tűnik*, de mégsem az. Amire ugyanis ez az érv utal, az a következő állítás lenne: A "Radnóti Miklós" néven írt munkák azonosak az "Eaton Darr" néven írt munkákkal. Ez az utóbbi állítás valóban hamis, de nem ekvivalens (felcserélhető az igazság megsértése nélkül) az előzővel. Az előzőnél ugyanis a neveket *használjuk* – a nevek jelölt értelemben szerepelnek, és egy egykor élt valóságos személyre utalnak, aki bizonyos verseket írt – míg az utóbbi esetben a neveket *említjük*, amit kiemel az idézőjelek használata.

Visszatérve az előző elképzelt példához, egy rossz tanuló is tudja, hogy $1=1$, viszont nyilvánvalóan nem igaz, hogy egy rossz tanuló is tudja, hogy $1 = \sin(\pi/2)$. Az olyan szavak, mint „tudja”, „hiszi”, „gondolja” megváltoztatják az utánuk következő szavak, kifejezések használati módját. Nem használják a szavakat (jeleket), hanem említik, és ilyen esetben nem érvényes az azonosak felcserélhetőségének törvénye.¹⁹ A felcserélhetőség tehát a tárgyak világához hasonlóan a jelek világában sem triviális kérdés. Más szempontból sem az. A matematika egész története azt bizonyítja, hogy a jelek világában milyen fáradságos munkával lehet az azonosságot felismerni, nem is szólva a régóta megoldatlan matematikai kérdésekről. Az azonossággal kapcsolatos filozófiai kérdések közül az egyik legérdekesebb, hogy az azonosság olyan alkalmazásai mondanak gyakran legtöbbit a tárgyi világról, amelyek tisztán a jelek, pl. a matematika világán belül maradnak. A felszínes gondolkodás azt hihetné, hogy ha az azonosságot valamely a tárgytól távoli

tartományban használjuk, pl. a mátrixok világában, akkor annak már nagyon kevés köze lehet a "valósághoz". Ennek épp az ellenkezője az igaz. Miközben a fizikus matematikai formába önti a fizikai világról való teóriáit, és ez alapján jóslásokat végez, akkor nem tesz mást, mint, hogy alkalmazza az azonosságpredikátumot tisztán a matematikai formulák világában, azaz számításokat, levezetéseket, átalakításokat végez. Az azonosság kapcsolata különös módon épp ott a legtermékenyebb a tárgyi világgal, ahol a felületes szemlélő a legnagyobb távolságot látja. Ha a matematikát csak és kizárólag önkényes játékszabályok gyűjteményének tekintjük, akkor megfoghatatlan marad, hogy miképp lehetséges ez?

Az 'azonosság' definiálhatatlan alapfogalomnak tűnik, ezért írja Quine: „Az azonosság olyan egyszerű és alapvető fogalom, hogy nehéz másképpen megmagyarázni, mint pusztán szinonimákkal. Az, hogy x és y azonosak, ugyanazt jelenti, mint az, hogy x és y ugyanaz a dolog. Minden dolog azonos önmagával és semmi mással nem. De egyszerűsége ellenére az azonosság zavarokat okoz. Pl. azt kérdezhetjük: Mire használjuk az azonosság fogalmát, ha egy objektum önmagával való azonosítása triviális, mással való azonosítása pedig hamis? Ezt a különös zavart arra való hivatkozással tisztázhatjuk, hogy valójában nem kétfajta esetet kell tekinteni, egy triviálisat és egy hamisat, hanem hármat: Cicero = Cicero, Cicero = Catilina, Cicero = Tullius. Az első ezek közül triviális, a második pedig hamis, de a harmadik sem nem triviális, sem nem hamis. A harmadik informatív, mert két különböző terminust kapcsol össze; és ugyanakkor igaz, mert a két terminus ugyanannak az objektumnak a neve. Egy azonosság állításának igazságához csak az szükséges, hogy az '=' ugyanazon dolog két neve között szerepeljen; maguk a nevek lehetnek különbözőek, és a hasznos esetekben különbözőek is. Hiszen nem a nevekről állítjuk, hogy azonosak, hanem a megnevezett dolgokról. Cicero identikus Tulliuszal (ugyanaz az ember), bár a 'Cicero' név különbözik a 'Tullius' névtől. Ha valamit mondunk az adott objektumokról, akkor a megfelelő szót vagy predikátumot az objektumok *neveire* alkalmazzuk; de értelmetlen lenne azt gondolni, hogy amit az objektumokról mondunk, az magukra a nevekre is igaz. A Nílus pl. hosszabb, mint a Tuscaloosahatchie, de a nevek fordított viszonylatban vannak. Mivel az azonosság

hasznos állításai azok, amelyekben a megnevezett objektumok ugyanazok, a nevek pedig különbözők, csak a nyelv sajátossága miatt van szükség az azonosság fogalmára. ... hogy az azonosság szükségessége egy nyelvi sajátásból származik, nem azt jelenti, hogy az azonosság nyelvi kifejezések relációja. Ezzel ellentétben, mint imént hangsúlyoztuk, azonos csak egy objektum és csak önmagával lehet, nem pedig az egyik név a másikkal; az azonossági kijelentésben ugyan a nevek szerepelnek, de a kijelentés a megnevezett objektumokat azonosítja. Továbbá egy azonossági kijelentésben szereplő nevek nyelvi vizsgálata általában nem elegendő az azonosság érvényességének vagy érvénytelenségének eldöntésére. Ezek az azonosságok: Everest = Gaurizankar (vö. 33. §), Alkonycsillag = hajnalcsillag, Az USA 25. elnöke = az USA első olyan elnöke, akit 42 éves korában iktattak be. A Tuxtla középhőmérséklete = 93°F. a megalapozás tekintetében mind nyelven kívüli tények vizsgálatától függnnek.”²⁰

Az 'azonosság' reláció – hasonlóan a természetes számokhoz – annyira alapvető fogalomnak tűnik, hogy sokan úgy vélik ezek meghatározhatatlan alapfogalmak. Valóban, a használatukat gyakorlással sajátítjuk el és nem valamiféle definícióval, és az is igaz, hogy nehéz lenne bármiféle definíciót megérteni, ha még az olyan alapvető szavak jelentését sem értenénk, mint az azonosság. A logikának egy magasabb fejezetében – a másodrendű logikában, ahol már nem csak egyedi dolgok, hanem azok tulajdonságai, viszonyai is beletartoznak a „minden” hatókörébe – azonban definiálható az azonosság:

(A3) $x = y$ pontosan akkor, ha bármely F tulajdonságra igaz, hogy (ha x F tulajdonságú, akkor y is F tulajdonságú)

A definíció előzetes várakozásunkkal ellentétben nem úgy fest, hogy $x = y$ pontosan akkor, ha bármely F tulajdonságra igaz, hogy (x F tulajdonságú, akkor és csak akkor ha y is F tulajdonságú). Ennek az a magyarázata, hogy A3-ból logikailag következik ez utóbbi megfogalmazás, így az 'akkor és csak akkor' kitétel a definiensben

főösleges. A definíció alapgondolata az, hogy ha két dolog minden tulajdonsága megegyezik, akkor az a két dolog valójában egy dolog.²¹ A definícióban a 'minden tulajdonság' hatókörébe nem tartozhat bele a valamivel való azonosság tulajdonsága, mivel épp ez a definíció rögzíti az azonosság jelentését. Viszont a definícióban a dolgok tulajdonságaihoz a külső, relációs tulajdonságaik, pl. a térbeli koordinátáik is hozzátartoznak. Ennek hiányában könnyen találhatnánk cáfoló ellenpéldát, pl. két olyan az űrben elhelyezkedő vasgömböt, melyek tömege, formája, felülete és sűrűsége is tökéletesen egyforma, és csak azért tudjuk, hogy két vasgömbünk van, mert a helyük különböző.²²

Az 'azonos' kétargumentumú predikátum terjedelmét reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk alkotják. Beletartozik az összes 'hasonlóság' és 'egyformaság' reláció közös részét képező reflexív reláció, amit annak geometriai alakja alapján 'diagonális reláció'-nak is neveznek. (Ha nem azonos sorrendben lennének felsorolva az elemek a relációt megadó táblázat soraiban és oszlopaiban, nem lenne értelme az elnevezésnek.) Az egyformaság és a hasonlóság a jeleken kívüli világ leírásakor élőlények vagy élettelen tárgyak közötti viszony. Ugyanezen tartományon az azonosság reláció használata az egyformaság elfajulása, annak szélső esete, a diagonális reláció. Ezért az azonosság sem a '=' jel két oldalán álló jelek, hanem a jelek által jelölt dolgok közötti viszony. Ezek adott esetben lehetnek fizikailag érzékelhető tárgyak, de lehetnek számok, vagy halmazok is.²³ Az '=' jel mást és mást jelent a geometriában vagy a programozási nyelvekben, bár a jelentések hasonlóak. Két háromszög oldalainak egyenlő hosszúsága semmiképp sem azt jelenti, hogy a két oldal azonos volna, csupán azt, hogy a hosszúságuk azonos. Hasonlóképpen, két fizikai tárgy egyenlő súlya vagy tömege sem azonosságot, hanem csupán a jellemzőjükhöz rendelt számok azonosságát jelenti. Éppen ebben van a mérések haszna. A programozási nyelvekben a '=' jel gyakran nem relációt, hanem értékadást jelent.

Az azonosság egy nem triviális ekvivalencia relációt határoz meg adott nyelven belül a jelek, számok, formulák világában, és amennyiben a jelek a külső fizikailag érzékelhető világra vonatkoznak, szintén nem triviális relációt a fizikai

tárgyak világában. Hogy ez a reláció mennyire nem triviális, azt a tudomány és technikatörténet bizonyítja. Az azonosság által meghatározott fölcserélhetőség épp úgy kérdéseket vet fel a jelek világán belül, mint az egyformaság és fölcserélhetőség viszonya a fizikai tárgyak világában. Ezt mutatja be a következő példa.

Vegyünk egy római számot, egy tízes számrendszerbeli számot, és egy kettes számrendszerbeli számot tartalmazó egyelemű halmazt: $\{III\}$ $\{3\}$ $\{11\}$. Azonos-e ez a három halmaz egymással? Az első halmaz részhalmaza-e a római számok, míg a második az arab számok halmazának? A római számok halmaza és az arab számok halmaza számjegyeket tartalmaz, és nem számokat. E kettőnek nincs közös része, bár mindkettő számokat tartalmaz a szó elnagyolt értelmében. A kérdés tehát az, hogy a $\{III\}$ $\{3\}$ halmazoknak mik az elemeik, számok, vagy számjelek? A $\{III\}$ halmaz csak akkor eleme a római számok halmazának, ha számjel az eleme és nem szám, és ehhez hasonlóan a $\{3\}$ csak akkor eleme az arab számok halmazának, ha számjel az eleme, és nem szám. Ha számjelek az elemeik, akkor nyilván nem azonosak egymással, ha viszont számok az elemeik, akkor mindhárom halmaz azonos. A halmazelmélet tanítása szerint két halmaz azonos, ha egyazon elemeik vannak, azaz bármely x ami eleme $\{III\}$ -nak az $\{3\}$ -nak is eleme, és megfordítva. Figyeljünk föl arra, hogy a halmazok elemei nincsenek idézőjelben, így az elemek, az általuk megnevezett dolgokat képviselik. Ebből kiindulva jutunk el a válaszhoz. A $\{3\}$ halmaz nem részhalmaza az arab számok halmazának, viszont a $\{3\}$ halmaz már igen. Ez alapján a kérdésben szereplő három halmaz azonos. Hasonló kérdéseket vet fel az idézőjelek, a rendezett párok és sorozatok jelölése, valamint az ilyen jelöléseket alkalmazó kifejezések azonossága. Ezek vizsgálata azonban már túlmutat mostani céljainkon.

Végezetül visszatérek a tárgyak önazonosságának a kérdéséhez. Az objektumok, tárgyak egymást követő időben közeli állapotai hasonlítanak egymásra. Némelyik esetben minél közelebb az állapot, annál nagyobb a hasonlóság, bár ez nem áll bizonyos ismétlődő változások esetén. Az egymást követő, feltételezésünk

szerint egymásból származó hasonló állapotok sorozatán értelmezünk egy 'leszármazottja' relációt az állapotok nevére nézve. Ez az eredeti jelentés egy kiterjesztett használati módja, amelyik élettelen tárgyak körén is értelmezett. Ennek a névhasználatot kiterjesztő 'leszármazottja' relációnak az alapján, a tolerancia relációnak vesszük a tranzitív lezártját, és ezzel kapunk egy névhasználaton alapuló ekvivalencia relációt. Ennek a relációnak az ekvivalencia osztályai az objektumok.

Sok esetben ezek az ekvivalencia relációk jellemzők csoportjaival is meghatározhatók. Ezek a jellemzők – melyeket az objektumok lényeges tulajdonságainak tartunk – egyaránt függnék a valóságtól és a használt nyelvtől. Pusztán előítélet, hogy a lényeges tulajdonságoknak tekinthető jegyek csoportjai bármely objektum esetén nyelvtől és gyakorlattól függetlenül meghatározhatók.

Ezzel kapcsolatos az egyik gyakori vitatéma, hogy egy tárgy (objektum) azonos-e tulajdonságai rendszerével? Rendszerével és nem összességével, hiszen míg az előbbi egy egyedi dolog, az utóbbi nem az, hanem csak a terjedelmébe tartoznak egyedi dolgok. Egy objektum azonosítható jól megválasztott tulajdonságok csoportjával, de a tulajdonságok semmilyen csoportja nem azonos magával a dologgal. Az ilyen azonosításra szolgáló kifejezéseket „meghatározott leírás”-nak nevezik. Ezek a leírások nem feltétlen tartalmazzák a tárgy összes tulajdonságát, csak azt amit mi lényegesnek tartunk és szükséges az azonosításhoz. De a tárgyakat nem csak azonosítani lehet, hanem a modelljüket is elkészíthetjük. Ezek a modellek jellemzők összefüggéseit és állapotait fogják tartalmazni, és úgy tekintjük, hogy a modell képviseli egy elméletben az objektumot. A szónak tehát ebben az értelmében mondhatjuk, hogy egy elméleten belül a modell, mint tulajdonságok rendszere, azonos az objektummal, tárggyal. Ehhez kapcsolódik a matematikai struktúrák hasonlóságának elemzése, de erre – tekintettel a kérdés bonyolultságára – nem térek ki. Megtalálható ez a jegyzetben szereplő irodalomban.

András Ferenc

1982 – 2006

ferenc@andrasek.hu

Jegyzetek:

¹ A filozófiai klíma 1982 óta jelentősen átalakult, kevesebben hisznek a dialektikus spekulációban, így a logika sem szorul védelemre. Egy kivétel: Szigeti József: Azonosság és nem-azonosság azonossága. Magyar Filozófiai Szemle. 1998. 4-6. 445-507.

² Jurij Anatoljevic Srejder: Egyenlőség, hasonlóság rendezés. Ford. Vargha András. Budapest, 1975, Gondolat. Az előszóban Varga Dénes ismerteti a tolerancia relációk tanulmányozásának kialakulását. A könyv megjelenése óta az Interneten rákeresve úgy tűnik Srejder munkája megfelelő elismertségre tett szert. Szakadát István továbbfejlesztette Srejder reláció felosztását, Ungváry Rudolf pedig alkotó módon alkalmazta a hasonlóság matematikai elemzését: <http://www.artpool.hu/Artistamp/Ungvarye.html>

Lásd még Ungváry következő írását:

http://ontologia.hu/Members/ungvary/letoltott_tanulmanyok/Srejder.DOC

³ Ezzel foglalkozik a következő két tanulmány. Az első szerint a dolgok numerikus azonossága több annál mint amit a dolgok tulajdonságai segítségével megragadni képesek vagyunk. Robert Merrihew Adams: Primitív eztség és primitív azonosság, in. Farkas Katalin - Huoranszki Ferenc: Modern metafizikai tanulmányok, ELTE Eötvös Kiadó, Bp. 2004. (Primitive Thisness and Primitive Identity, Journal of Philosophy, Vol. 76, No. 1 Jan., 1979, pp. 5-26) A következő írás szerint pedig az azonosság jellemzésére használt két alaptétel – miszerint, minden azonos önmagával, és ha valami azonos valamivel, akkor ami igaz az előbbire, éppúgy igaz lesz az utóbbira is – nem határolja jól körül az azonosság fogalmát, mert olyan értelmezése is adható a két alapelvnek, aminek semmi köze az azonosság fogalmához. Timothy Williamson: "Absolute Identity and Absolute Generality", A. Rayo and G. Uzquiano (eds.), Unrestricted Quantification: New Essays (Oxford: Oxford University Press, 2007.)

⁴ V.ö.: Ruzsa Imre: Klasszikus, modális és intenzionális logika. Akadémiai Kiadó, Bp., 1984. 170-71 p. valamint Saul Kripke: Azonosság és szükségszerűség, ford. Csaba Ferenc, in. Farkas Katalin - Huoranszki Ferenc: Modern metafizikai tanulmányok, ELTE Eötvös Kiadó, Bp. 2004. ("Identity and Necessity", In Identity and Individuation, edited by M. K. Munitz. New York: New York University Press, 1971.) érdekes még a következő Internetes oldal is:

http://www.umsu.de/wo/archive/2006/08/09/Kripke_s_Alleged_Argument_for_the_Necessity_of_Identity_Statements A blog szerzője, Wolfgang Schwarz meggyőzően indokolja Kripke álláspontját:

- 1) A tulajdonnevek merev jelölők.
- 2) A merev jelölők egyazon dolgot jelölnek minden lehetséges világban.
- 3) Ha 'a' és 'b' egyazon dolgot jelöl minden lehetséges világban, akkor szükségszerű hogy a=b.
- 4) Ha 'a' és 'b' tulajdonnevek, akkor ha a=b akkor szükségszerű, hogy a=b (1)(2)(3)

⁵ A relációkat meghatározó tények gyakran okoznak fejtörést a filozófiában. A gondokat az okozza mind a mozgás, mind az idő fogalmaival kapcsolatban, hogy az igazság dimenziójában minden igaz mondat időtlenül igaz. Ezért egy olyan mondat, hogy 'a piszkavas vörösen izzik', hallgatólagosan tartalmaz egy időadatot. A piszkavas mindig adott időtartományban izzik, és olyankor a színe vörös, máskor pedig nem izzik, és olyankor a színe fekete. Ama tény tehát, hogy a piszkavas egyik tulajdonsága, nevezetesen a színe megváltozik, semmiféle ellentmondást nem okoz, mert különböző időpontokban más színű a piszkavas. Ha óvatlanul átsiklunk eme tény relációs jellege fölött, akkor olyan kérdésekbe bonyolódunk, hogy miképpen lehet a piszkavas vörös is meg fekete is, miközben semmi sem lehet egyszerre vörös és fekete. Ekkor tévesen úgy tűnhet, hogy a piszkavas egy tulajdonságának megváltozása ellentmondás. Nem az, csak föl kell ismerni a változás időbeli, időhöz kötött mivoltát. A piszkavas minden pillanatban azonos önmagával, és soha nincsenek egymást logikailag kizáró tulajdonságai. A piszkavasra igaz, hogy vörös t1-kor, és fekete t2-kor. A piszkavasat 'a'-val jelölve ezt a tényt kétféle módon is kifejezhetjük:

a. vörös(a, t1) és fekete(a, t2) vagy függvények alkalmazásával

b. vörös=színe(a, t1) és fekete=színe(a, t2)

Figyeljük meg, hogy az időadat nélkül ellentmondás keletkezik feltéve, hogy semminek sem lehet egyszerre kétféle színe. Ez a látszólagos ellentmondás sugallja azt, hogy a fizikai tárgyak változása ellentmond az azonosság logikai törvényének.

⁶ Willard Van Orman Quine: A logika módszerei. Ford. Urbán János, Budapest, 1968, Akadémiai, 250-251. p. Quine álláspontját 'perdurance theory'-nak, míg a rivális álláspontot – miszerint a tárgyak teljes egészében

léteznek minden időpontban és numerikusan azonosak önmagukkal az egymást követő időpontokban – 'endurance theory'-nak nevezi a kortárs analitikus filozófiai irodalom.

⁷ Kripke nyomán, a klasszikus logika nyelvének határai között azt hogy valamely F egyargumentumú predikátum lényegi tulajdonsága egy bizonyos 'a' nevű dolognak olyan módon fejezhetjük ki, hogy minden x-re, ha van olyan t időpont amikor nem Fxt, akkor x nem azonos az 'a' nevű dologgal.

⁸ Részletesen tárgyalja ezt a kérdést Stephen Read, Bevezetés a logika filozófiájába c. könyve egyik fejezetében. Ford. Bánki Dezső, Bp., Kossuth Kiadó, 2001. pp. 202-234. (Thinking about Logic : An Introduction to the Philosophy of Logic, Oxford ; New York: Oxford University Press, 1995.)

⁹ Bertrand Russell: *Filozófiai fejlődésem*. Ford. Fehér Ferenc, Budapest, 1968, Gondolat, 220. p.

¹⁰ A gondolat forrása Lánczos Kornél: *Számok mindenütt*. Budapest, 1972, Gondolat, 17. p.

¹¹ V.ö. Ruzsa Imre: *Matematika pszichológia szakos hallgatók számára – egységes jegyzet*. Budapest, 1975, Tankönyvkiadó. Maurer Gyula – Virág Imre: *A relációelmélet elemei*. Kolozsvár, 1972, Dacia könyvkiadó. Részletesebben kifejtve a *Bevezetés a struktúrák elméletébe* c. könyvükben, Kolozsvár, 1976, Dacia könyvkiadó. illetve Srejder elmített könyve.

¹² Részletesen tárgyalja a relációk típusait Szakadát István, Reláció, szintaktika, szemantika, in: TMT, 51. évf., 2004/12, 531-540.o. Bodó Balázs, Szakadát István, Nyílt szoftverek, nyílt archívum, nyílt hozzáférés 1., in: Magyar Távközlés, 2004/3., 2-5.o.

http://mook.bme.hu/archive/relacio_tmt2004/pdf/data/at_download

illetve egy rövidebb írása:

<http://dsd.sztaki.hu/conferences/ontologia/eloadasok/szakadat/relationship.pdf>

¹³ Srejder i.m. 168. p. Utóbbi a fordító megjegyzése.

¹⁴ Srejder i.m. 153. p.

¹⁵ A példák elektronikus formában is tanulmányozhatók. Innen letölthetők:

<http://ferenc.andrasek.hu/doc/hasonlosag.xls>

¹⁶ Ludwig Wittgenstein: *Filozófiai vizsgálódások*. Ford. Neumer Katalin, Budapest, 1992, Atlantisz, 57. p.

¹⁷ V.ö. Noonan, Harold, "Identity", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2005 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/fall2005/entries/identity/>>

¹⁸ A korai Wittgenstein tehát téved amikor ezt írja: 5.533 "Tehát az azonosságjel nem lényegi alkotórésze a logikai szimbolikának. És most már látjuk, hogy az olyan látszat kijelentések, mint: "a = a", "a = b . b = c. \supset a = c", "(x).x=x", " \exists x.x = a" stb., a helyes logikai szimbolikában egyáltalán le sem írhatók." Ludwig Wittgenstein: Logikai-filozófiai értekezés. Ford. Márkus György, Budapest, 1963, Akadémia Kiadó, 157. p.

¹⁹ Ennek a problémának átfogó ismertetése található a következő helyeken: Ruzsa Imre „Extenzionális és intenzionális problémák a logikában”, MFISZ, 1972/1. Ruzsa Imre: Klasszikus, modális és intenzionális logika. Budapest, 1984, Akadémiai kiadó, 44. p.

²⁰ Quine, i.m. 248-250. p.

²¹ V.ö.: Forrest, Peter "The Identity of Indiscernibles", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2006 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/fall2006/entries/identity-indiscernible/>>.

²² Max Black e példáját alaposan elemzi Boda Mihály "Az azonosság egy jellemzője: a Leibniz-elv" c. tanulmányában. Pro Philosophia Füzetek, 2006/3. A példa egy olyan izolált világot képzel el, amely pontosan és kimerítően leírható három formulával: G(a); G(b); R(a,b)

Ebből a három formulából nem vezethető le sem az, hogy a=b, sem az hogy a<b. Megváltozik a helyzet, ha kikötjük, hogy az 'R' reláció irreflexív. Az irreflexivitást akkor tartjuk evidenciának, ha a formulákat pl. így interpretáljuk: G(x)=x tömör adott tömegű vasgömb; R(x,y)= x 2km-re van y-tól

Az 'R' relációt jellemzők függvényével kifejezve ezt kapjuk: 2km=távolsága(x,y) ahol a 'távolsága' funktorról feltételezhetjük, hogy: 0=távolsága(x,y) akkor és csak akkor ha x=y.

Ebből valóban következik, hogy mivel 0<2km, és 2km=távolsága(x,y) tehát x<y. Csakhogy ez a feltevés nem logika igazság, hiszen két hanghullám vagy két illatfelhő lehet egy helyen.

²³ Frege ezzel ellentétes érvelése a Fogalomírás c. munkájában a következő: „A tartalomazonosság annyiban különbözik a feltételestől és a tagadástól, hogy nem tartalmakra, hanem nevekre vonatkozik. Egyéb esetekben a jelek csupán tartalmuk képviselői, úgy, hogy minden kapcsolatot, amelybe valamivel lépnek, csak tartalmuk valamilyen vonatkozását fejezi ki. Ha viszont a tartalomazonosság jelével kötjük össze a jeleket, rögtön saját maguk lépnek előtérbe; ugyanis ezzel azt a tényt fogjuk jelölni, hogy két névnek ugyanaz a tartalma. Így tehát a

tartalomazonosság jelének bevezetésével kettősség adódik minden jel jelentésében, amennyiben azok hol tartalmukat, hol saját magukat jelentik.” Gottlob Frege: *Logika, szemantika, matematika*. Ford. Máté András Budapest, 1980, Gondolat, 40. p. Később a „Jelentés és jelölés” c. írásában változtat felfogásán: "Az azonosság a hozzá kapcsolódó és nem egykönnyen megválaszolható kérdések révén elgondolkodásra készítet: Reláció-e az azonosság, és pedig tárgyak, vagy pedig a tárgyak nevei, illetőleg jelei közötti reláció-e? Fogalomírás c. dolgozatomban az utóbbi nézetet fogadtam el. E felfogás mellett látszanak szólni a következő okok: $a = a$ és $a = b$ nyilvánvalóan különböző ismeretértékkel rendelkező mondatok: $a = a$ a priori érvényes és Kant nyomán analitikusnak nevezhető, míg $a = b$ alakú mondatok gyakorta ismereteink igen értékes kibővítését tartalmazzák, és nem alapozhatóak meg a priori. Az, hogy nem minden reggel új Nap kel fel, hanem mindig ugyanaz, bizonyára egyike volt az asztronómia legtermékenyebb felfedezéseinek. Egy kisebb bolygó vagy üstökös azonosítása még ma sem mindig magától értetődő. Ha mármost az azonosságon olyan relációt akarnánk érteni, amely azon dolgok között áll fenn, amelyeket az "a" és "b" nevek jelölnek, akkor abban az esetben, amelyben $a = b$ igaz, $a = b$ és $a = a$ között nem lehetne különbség. Ilyen módon az azonosság csupán egy dolognak önmagához való viszonyát fejezné ki, azt a relációt, amelyben minden dolog saját magával áll, de amelyben egy dolog sem áll egy másikkal. Úgy látszik, hogy $a=b$ azt fejezi ki, hogy „a” és a „b” név vagy jel ugyanazt jelöli, tehát ezekről a jelekről szól; egy közöttük fennálló relációt állít. De ez a nevek vagy jelek közötti reláció csak akkor állhat fenn, ha azok megneveznek, jelölnek valamit. Ez a reláció tehát közvetett lenne, a két jelnek megjelölthöz való kapcsolódása révén. Ez azonban önkényes. ...” i.m. 156. p. A Tractatus-beli Wittgensteinnek az azonossággal kapcsolatban egyéni álláspontja van, de ebben a kérdésben egyetért Fregevel eredeti nézetével: "5.5301. Nyilvánvaló, hogy az azonosság nem tárgyak közötti viszony. Ez igen világossá válik, ha szemügyre vesszük például a „ $(x):fx \supset x=a$ ” kijelentést. E kijelentés egyszerűen azt mondja, hogy kizárólag "a" elégíti ki az "f" függvényt, és nem azt, hogy csak azok a dolgok elégítik ki az "f" függvényt, amelyek "a"-val meghatározott viszonyban állnak. Valaki persze most azt mondhatná, hogy kizárólag "a" áll ebben a viszonyban "a"-val, de ennek kifejezéséhez már magára az azonosságjelre lenne szükségünk." Wittgenstein, i.m. 156. p.