Véges automaták mint a leírás és realitás modelljei

András Ferenc

2008

1. Bevezetés

A következő filozófiai vizsgálódás azon alapul, hogy megkülönbözteti a jelenlét, a történeti idő, valamint az igazság létezési módjait. Ennek során az igazság korrespondencia elméletéről mutat be egy kibernetikai modellt. Ez a modell elektronikus formában működik is. Az elemzés során megemlítem, hogy milyen egyéb irányban fejleszthető tovább javaslatom. Gondolatmenetem Tarski alapgondolatait követi, Kripke vagy Barwise vonatkozó elméletére – illetve az ehhez kapcsolódó szituációs logikájára – az igazság revíziós elméletére (The Revision Theory of Truth) nem tér ki. Viszont fölhasználom az állításlogika egy aritmetikai fordítását, mint egy nyelv modelljét, egy másik nyelven a leírás, a magyarázat dimenziójában maradva, majd ezt a fordítást fölhasználva az állításlogika egy elektronikus modelljét is bemutatom. Ez egyszerűen egy táblázatkezelő program használatát jelenti. Ennek során ismertetem a (Mealy féle) véges automaták elméletének alapgondolatát, majd az igazság probléma megközelítését ebből a nézőpontból. Azért használom ezt az utat a kérdések elemzésére, mert egy filozófiai gondolatnak számolótáblázattal való ábrázolása példája annak, hogy mi számít a XXI. században közérthető magyarázatnak. A kibernetikai modell a maga valóságában nem része e szöveg nyomtatott változatának. A modell működésének magyarázata, leírása nem maga a modell. Utóbbi létmódja a felhasználóval való jelen idejű, élő, gyakorlati kapcsolat, és így a mindennapi életben múló idő. Letölthető az internetről:

`http://ferenc.andrasek.hu/modellek/dim07_hun.xls`

A világnézetet artikuláló minták közé tartozik minden esetben a világnézettel kapcsolatban lévő szaktudományos háttér és értékrendszer. Az ezt alkotó közösség által begyakorolt nyelv és gondolkozásmód meghatározza, hogy milyenek a megvilágosító erejű példák és magyarázataik, mely hasonlatokat (analógiákat) képes valaki megérteni, milyen gondolkodói stílus esetén érez szimpátiát és mikor ellenszenvet, és akkor még nem is említettem az eltérő pszichológiai beállítottságokat a képi vagy szöveg alapú gondolkodás tekintetében, illetve a gondolkodás lineáris vagy szerteágazó hajlamát. Egy magyarázatot akkor értünk, ha számunkra otthonos nyelven fogalmazzák meg. Tegyük fel, hogy az egyik jelenség csoport hasonlít egy másik jelenség csoporthoz, és a másikat leíró szaktudomány modelljei lefordíthatók az előbbi jelenségkört leíró szaktudomány nyelvébe. Ha most valaki az első nyelvében járatos, akkor számára egy másodikból való fordítás a magyarázat, ha viszont valaki a második nyelvében mozog otthonosan, akkor számára az elsőnek a másodikba való fordítása a magyarázat. Az, hogy „A világ egy nagy óramű." semmiképp sem azt jelenti, hogy éjszaka, ha kimegyünk a kertbe a nagy csöndben hallgatózva óra ketyegést hallunk, sokkal inkább arra utal, hogy az óra, ami egykoron a legbonyolultabb emberi alkotás volt amelynek működését értettük, célszerű modellje lehet a világnak. Jó magyarázat annak, aki szereti a mechanikát, és kellően találékony a mechanikai modellek készítésében és alkalmazásában, képes alkotó módon használni mechanikai modelleket, de nem magyarázat annak, akinek sokkal inkább egy mechanikus gép a probléma, és nem a csillagos ég. A bonyolult gép, ami egykoron az óramű volt, az mostanság a számítógép, a véges automata.[1]

Kai-Uwe Kühnberger a körbeforgás jelenségéről írt disszertációjában megvizsgálta a problémát a formális és természetes nyelvekben. Számos ismert és kevésbé ismert logikai rejtvény után a matematika, nyelvészet, számítástudomány, és a filozófiai érvelés területéről is bemutat példákat a körbenforgás jelenségére. E példák egy részét az általam javasolt megközelítésben is meg fogjuk vizsgálni. Kühnberger véleménye szerint nem minden paradox szituáció szükségszerűen körbeforgó, és nem minden körbefogó jelenség paradox. Éppen arra a kérdésre próbál meg választ keresni, hogy a körbenforgás jelensége miért vezet némelykor paradox eredményhez, némelykor meg nem. Szerinte egy entitás akkor körbeforgó, ha valamely szempontból nem alapozható meg a matematikai jólfundáltság követelménye szerint.[2] Úgy véli azonban, hogy önmagában azért mert egy gondolat körbeforgó, még nem kell szükségképpen elvetni. Csak akkor hibás szerinte egy körbeforgó gondolat, ha azt lehetetlen jól fundált formára átalakítani. Sorra bemutatja a probléma legújabb megközelítésit, de a 'visszacsatolás' elvének a problémával kapcsolatos összefüggéseit nem vizsgálja.[3]

2. Idő és igazság

Amíg a tudományos magyarázatokban az idő csak egy a lehetséges paraméterek közül, speciális folyamat, állapotok sorozata, melyhez más állapotokat, eseményeket, folyamatokat hozzárendelünk, addig a mindennapi életet átéljük az időben. Ezen a papíron egy teória található, mely időtlen, de amikor valaki olvassa, az egy történés, az élet része. Minden leírás és magyarázat egyben realitás is, de a papíroson létező tudomány nem vállalkozhat másra, mint hogy magyarázat legyen. A jelek nem mozdulnak meg a papíron, a kör egyenlete nem kerek, a mozgás matematikai leírása nem mozog. Ez az, amit képtelenek voltak fölfogni a spekulatív filozófiák. Egy állítás igaz vagy hamis mivolta nem tett, csak kimondása teheti azzá, és egy helyesen kigondolt gondolat sem lesz kimondott kizárólag igazsága folytán.

Egy elavult tudományos magyarázat a szaktudós számára értéktelen, míg a történész számára értékes lehet. Ez azért van így, mert a történész figyelme nem az állításokra, hanem az állításkimondásokra, azok körülményeire, keletkezésük magyarázatára irányul. A tudományos könyvek szólhatnak az időről, de a teória, melyeket felállítanak ez esetben is időn kívüli. Egy kérdéskör története hasznos vagy egyenesen elengedhetetlen feltétele lehet a megértésnek, de a vita története sohasem érvényes érv a vita tárgyában. Az igazság nem történeti. A történeti és az igazság dimenziója összeolvasztásának egyik esete volt az a marxista historizmus, amelyik egy történeti magyarázat egyedüli igazságának feltételezésével, a kérdések és válaszok, az elméleti problémák és magyarázataik megismerési dimenzióját beolvasztotta a történeti dimenzióba. Ezek után levezette a történelemből azt a választ, ami igazolta ama történeti levezetés helyességét, önmaga igazságát. Ezért e teória, ha bármilyen elfajult formában is, de a valóságos és válságos történeti ágensek részévé vált, logikus következménye volt önmagának.

A körbeforgó gondolkodás nemcsak az igazság és történeti dimenzió összemosásának az esetén fordulhat elő, hanem a jelenlét (a mindennapi élet) és a igazság (megismerési) dimenzió összemosásakor is. A hazug paradoxonhoz hasonló mondatok látszólag olyanok, amikkel állítást tehetünk. Ha azonban ezt megkíséreljük, események olyan sorozatát kapjuk, ahol a mondat igazságértéke változó. Ugyanakkor a paradox mondatokat képesek vagyunk megérteni. Teljesen ellentmondásmentesen megértjük, hogy valahányszor igazságértéket tulajdonítunk ama nevezetes mondatnak, utána az ellenkezőjére kell következtessünk. Azért vagyunk erre képesek, és egyáltalán azért értjük meg a problémát, mert az időben kiterítve, az időben elmondva az antinómia leírható ellentmondásmentesen. Egy állítás megtételének a ténye is megváltoztathatja a világot, megváltoztathatja azt, amiről az állítás szól. Így akár ugyanaz a mondat többször elmondva más-más igazságfeltételekkel rendelkezhet pusztán csak attól, hogy már elhangzott. [4]Megértjük a talányos mondatot, ha viszont valaki teljes komolysággal azt mondaná nekünk a telefonba, hogy „meglátogatlak és nem látogatlak meg”, akkor nem értenénk, hogy mit mond. A paradoxon viszont maga nem érthetetlen abban az értelemben, hogy arra szólít föl, oldd meg a problémát, keresd meg, hogy mi okozza az ellentmondást, és szüntesd meg a forrását! (Később kitérek arra, hogy nem a logikai ellentmondás a legfontosabb jellemzője a problémának.)

Az egyén három dimenzióban éli az életét: a jelenlét (a mindennapi élet), a történeti és az igazság (a leírás, magyarázat és elmélet) dimenzióiban. Ezek a dimenziók, miként a tér síkjai, metszik egymást, és létünk egy vonal ebben a térben.[5] A jelenlét (a mindennapi élet) ideje jelen idő, az átélt pillanat, a történelem ideje a jövő felé mutató múló idő, míg a megismerés, az igaz és hamis dimenziójának ideje egyfajta végtelenség, örökkévalóság. Az így kapott három dimenziónak, és az azok közötti relációnak három nagy filozófiai irányzat felel meg: életfilozófiák, történelemfilozófiák és tudományfilozófiák. A három dimenzió vetülete a megismerés dimenziójában mint sajátos nyelvfilozófia is megjelenik. A modern nyelvfilozófia egyik megalapítója írja iskolateremtő alapművében: „Először a mondás közben végrehajtott dolgok egy olyan csoportját különítettük el, amelyet összefoglalóan úgy jellemezhetünk, hogy lokúciós aktust végzünk. Ez nagyjából egyenértékű azzal, hogy valamely mondatot bizonyos értelemmel és jelölettel mondunk ki, ami viszont nagyjából egyenértékű a 'jelentés' hagyományos értelmével. Másodszor azt mondtuk, hogy illokúciós aktusokat is végzünk, így tájékoztatunk, utasítunk, figyelmeztetünk, felvállalunk stb., vagyis a megnyilatkozásoknak van bizonyos (konvencionális) ereje. Harmadrészt megvalósítunk perlokúciós aktusokat is: akkor, amikor valaminek a mondása révén valósítunk meg vagy érünk el valamit, amikor meggyőzünk, elrettentünk vagy akár meglepünk vagy félrevezetünk valakit. Itt a 'mondatok használatának' vagy a 'nyelvhasználatnak' három, sőt több különböző értelméről, vagy ha úgy tetszik, dimenziójáról van szó ...".[6] A megnyilatkozások lokúciós ereje, egyes mondatok ismeretközlő mivolta, az általuk kifejezett igaz vagy hamis propozíció, nem más, mint a megnyilatkozás vetülete a magyarázat, a megismerés dimenziójában; a megnyilatkozás cselekvő ereje, az illokúció nem más, mint a megnyilatkozások megjelenése a mindennapi lét dimenziójában; a perlokúciós aspektus, a megnyilatkozások hatása, következménye, pedig nem más, mint a megnyilatkozás lenyomata a történeti dimenzióban. (A hívő ember számára Isten is három vetületben, három dimenzióban jelenik meg: mint a jelen idő, a mindennapi lét része, mint az egyházak istene, amely történelem ágense, és legelvontabban mint a teológia-filozófia nehezen megragadható fogalma.)

A nyelv alapvető célja nem az igazságok gyűjtögetése, hanem a cselekvés. Az ismeretérték a 'tedd ezt ha igaz, és amazt ha hamis' feltételes utasítás esetén bír jelentőséggel a való életben. Hasonló ez a programozási nyelvek feltételes utasításaihoz, melyek szintén egy megítélhető tartalmú mondat igazságától teszik függővé, hogy merre fusson tovább, mit tegyen a számítógép program. Ebből a nézőpontból a programozási nyelvek teljesebben tükrözik a ember és világa kapcsolatát mint a szimbolikus logikai nyelvek. Ezt a lehetőséget használják a ki a következőkben bemutatott automata modellek.

3. Magyarázat és modell

> Szókratész: S mit gondolsz, Glaukón, ha valaki azt kérdezné tőlük: »Miféle számokról beszéltek ti, szerelmes barátaim, ahol

> az egy olyan, amilyennek ti állítjátok: egyik a másikkal teljesen egyenlő, köztük a legkisebb különbség sincs, s egyik sem osztható részekre?«, vajon mit válaszolnátok erre? Glaukón: Bizonyára azt, hogy ők arról beszélnek, amiről csak gondolkodni lehet, és amihez semmiféle más módon nem lehet hozzányúlni. Szókratész: Látod tehát, kedves barátom, valóban nagy szükségünk van erre a tudományra, ha egyszer a lelket arra szorítja, hogy magával a gondolkozással közeledjék a tiszta igazsághoz.[7]

A minket érdeklő kérdés azonban nem az, hogy az „egy"-nek vagy általában az eszméknek van-e önálló léte, hanem fordítva, hogy látható, érzékelhető dolgok lehetnek-e eszmék? Ha a király játék katonákkal ábrázolta az elképzelt, vagy már lezajlott csata lefolyását, akkor ez milyen viszonyban állt a csata írásba foglalt tervével, vagy egy történeti feljegyzéssel a csata lefolyásáról? Vizsgáljunk meg egy planetáriumot, egy régebbi mechanikus csillagászati modellt, egy emberi testet ábrázoló orvosi célokat szolgáló szobrot, régi és új térképeket, földgömböt vagy egy hajó modelljét! Segítenek-e választ adni ezek a tárgyak bizonyos elméleti kérdésekre? A hajó modellként való megépítése nem teszi fölöslegessé a számításokat, a kettő kiegészíti egymást és nem tagadása a másiknak. Bonyolult differenciálegyenletek megoldásai megtalálhatók analóg számítógépekkel, vagy rugókból és tömegekből álló komplikált mechanikai szerkezetek, vagy melegedéssel kapcsolatos jelenségek viselkedését is meg lehet jósolni elektronikus áramkörök viselkedésével. Minden műszaki egyetemen tanítják ezeket a hasonlóságon alapuló modelleket.[8] Ezek az anyagi modellek vajon magyarázatai-e a modellált jelenségnek? Lehet-e az egyik anyagi rendszer eszmei modellje egy másik anyagi rendszernek? Véges automatákkal illetve számítógépekkel különösen sok minden modellálható, a kémiai molekuláktól kezdve egészen a gazdasági folyamatokig.

Említettem korábban, hogy a jelek nem elevenednek meg a papíron. De igaz-e ez az állítás akkor, ha a jelek elektronikus formában jelennek meg egy Internet WEB oldalon? Nem igaz. Ezeknek a fizikai illetve számítógépes modelleknek előnyös tulajdonsága, hogy időbeli létezők, mozgásra, változásra képesek, ellentétben a holt betűkkel, sőt abban az értelemben is eleven létezők, hogy válaszolnak külső hatásokra. A formális diszciplínákban számos esetben alkalmaznak modelleket olyan módon, hogy egy bizonyos formális struktúrát egy másik modelljének tekintenek. Ennek célja sok esetben valaminek a bebizonyítása, más esetben hasznos gyakorlati alkalmazása vagy közérthetőbb nyelvre való lefordítása. Most hasonló feladatra vállalkozom. Egy véges automata modellel – ami jelen esetben egyszerűen egy számítógépes táblázat használatát jelenti – szeretném világosabbá tenni Tarski lapvető gondolatait az igazságról. Ugyanis filozófiailag fontos elvárás egy magyarázattól – jelen esetben az igazág korrespondencia modelljével kapcsolatban – hogy a kor minél szélesebb olvasói köre számára legyen érthető. Manapság a számítógépes táblázatok használata a legközönségesebb dolognak számít, így amit annak segítségével lehet megmagyarázni, az egy világos és közérthető magyarázat. Mindkettő alapvető a filozófia célját illetően.

4. Mi a véges automata?

Természetes nyelven, egy közös ismeretalapot elképzelve példákkal, és egzakt matematikai formulákkal is bemutatom a fogalmat. Utóbbira azért van szükség, hogy a filozófiában oly gyakori körbeforgó meghatározás csapdáját elkerüljem.

A determinisztikus véges automaták szemléletesen úgy képzelhetők el, mint olyan teljesen egyértelműen meghatározott működésű gépek, melyeknek csak véges sok belső és külső állapota van. Amennyiben az állapotok száma kettő, úgy kétállapotú (digitális) automatáról fogok beszélni. Ilyenek a digitális áramkörök, digitális hálózatok, vagy más néven logikai áramkörök. A teljes meghatározottság azt jelenti, hogy a mindenkori jelen időhöz tartozó bemeneti és belső állapotok egyértelműen meghatározzák a következő időponthoz tartozó kimeneti és belső állapotokat. Ebből látható, hogy diszkrét időben képzeljük el a működésüket, amit a valóságos automaták elég jól meg tudnak közelíteni. Az automaták ezen csoportjába tartoznak a digitális számítógépek vagy az automata mosógép, de vasalót, a hűtőszekrényt vagy a légkondicionálót célszerűbb analóg szabályozásnak tekinteni és nem véges automatának, mivel lehetséges állapotaik száma nem véges. Viszont a zsebszámológépek szintén véges automaták, és a véges memóriától eltekintve úgy is tekinthetők, mint aritmetikai műveletek fizikai modelljei. Az ilyen automaták absztrakt matematikai elméletét a műszaki gyakorlat igényei jelentősen befolyásolták. Ennek megfelelően egy fizikailag létező automata működése többféle szempontból is osztályozható, és többféle absztrakt automata fizikai megvalósításának, modelljének is tekinthető. „Az, hogy egy a gyakorlatban előforduló automata determinisztikus vagy sztochasztikus-e, nem annyira az automatán múlik, inkább attól függ, hogy, hogy milyen modellt használva, milyen nézőpontból, milyen fokú pontosságra törekedve, írjuk le az automata működését.”[9]

A továbbiakban olyan automatákkal foglalkozom, amelyekről feltételezhető, hogy az első (kezdeti) állapotot követően teljesen determinisztikusan működnek, és bemeneti, kimeneti valamint belső állapot jellemzőik csak véges sok diszkrét állapotot vehetnek föl. Ezek az automaták diszkrét időpontok sorozatában változtatják meg állapotukat, és az automata bármely jelen időpontban adott állapotleírása – a bemenetek és belső állapotok értékei – két, az automatára jellemző függvény segítségével teljesen meghatározzák a kimenetek következő diszkrét időponthoz (ütemhez) tartozó állapotát. A bemenetek, kimenetek és belső állapotok egyazon időponthoz tartozó sorozatai helyett röviden ’bement’-ről, ’kimenet’-ről és ’belső állapot’-ról fogok beszélni. Szokás ezeket bemeneti, kimeneti valamint belső állapot vektornak is nevezni arra utalva, hogy értékek sorozatait vizsgáljuk. A műszaki gyakorlatban bemeneti és kimeneti 'jel' a szokásos elnevezés, mostani filozófiai céljainknak azonban jobban megfelelnek a 'jellemző' és 'állapot' terminusok. Mielőtt tovább haladnánk, fogalmazzuk meg az eddigieket pontosabb matematikai nyelven is.

Legyenek X, A és Y egy véges automata összes bemeneti, belső és kimeneti állapotainak halmazai. Ezek egy tetszőleges elemét rendre x, a, és y jelekkel jelölöm. Az $\langle A, X, Y, \delta, \gamma \rangle$ algebrai struktúrát Mealy-féle automatának nevezem, ahol X, A és Y nem üres halmazok. A '$\delta = A \times X \to A$' és a '$\gamma = A \times X \to Y$' függvények az A és X halmazok Descartes szorzatán definiált függvények, amelyeket rendre belső állapot-függvénynek, illetve kimeneti függvénynek nevezem. Az automata az x bemenő állapot (bemenő jel) hatására a jelenlegi a (belső) állapotból átmegy az $a' = \delta(a, x)$ állapotba és közben $y' = \gamma(a, x)$ kimenő jelet ad ki.

Felteszem, hogy a δ és γ függvények minden (a, x) párra értelmezve vannak. Megadom az automata kezdetei, iniciális állapotát. Mealy féle automaták esetén – mint amilyeneket most tárgyalunk – az automatának csak az iniciálist követő állapotában van kimeneti állapota. Feltételezzük, hogy valamilyen bemeneti állapot sorozatra az automata az összes belső és kimeneti állapotot legalább egyszer fölveheti. Röviden, nincsenek fölösleges elemei az A és Y halmazoknak. Az ilyen automatákat iniciálisan összefüggő automatáknak nevezik. Ezeknél bármely állapot elérhető a kezdő állapotból véges számú bemenő jel alkalmazásával. Ha X – a bemenetek halmaza – egyelemű, akkor az automatát 'generátor'-nak fogom nevezni. Ilyenkor X halmazt el is hagyhatjuk, mivel az automata viselkedését a $\delta = A \to A$ és a $\gamma = A \to Y$ függvények leírják. A generátornak tekinthető automaták bemeneti hatásoktól függetlenül hoznak létre kimeneti állapotokat (jelsorozatokat). Kombinációs hálózatnak (vagy automatának) nevezem az olyan automatát, amely egyedül a bemenet és kimenet közötti függvénnyel teljesen leírható. Ilyen esetben is alkalmazható a $\delta = A \times X \to A$ és a $\gamma = A \times X \to Y$ függvények alkotta leírás olyan módon, hogy a belső állapotok A halmaza egyelemű. Generátornak tekinthető mind a mechanikus mind az elektronikus óra, kombinációs hálózatnak tekinthető a villanykapcsoló és lámpa, első megközelítésben egy jól működő autó vezetése alacsony sebességgel, a televízió az antenna jelek felől nézve, a zongora a leütések és hangok összefüggésében, és általában a klasszikus mechanika tárgyait leíró formulák jó része. (Pl. egy súly hatására gyorsuló kocsi, ahol a bemenet a súly és a kocsi tömege, kimenet a kocsi gyorsulása.) Kombinációs hálózatot alkotnak az elemi logikai funktorok (függvények) működését szimuláló automaták is, amivel később részletesen foglalkozom. Azokat az automatákat amelyek nem kombinációs struktúrájúak, sorrendi hálózatoknak (néha sorrendi automatának) fogom nevezni. A legtöbb automata a mosogatógéptől kezdve a riasztó rendszerig, még az egyszerű hagyományos villanycsengő is a működését tekintve sorrendi hálózat. A sorrendi hálózatokat emlékező rendszereknek is nevezik, mert a külső hatásokra a korábban ért hatások függvényében válaszolnak. Egy egyszerű példa sorrendi hálózatra a következő. Legyen $A = \{a, b, c\}$, $X = \{x, x'\}$, $Y = \{y, y'\}$ és δ valamint γ az alábbi táblázattal megadott függvények. Az 1. táblázat első oszlopa a bemeneti állapotok, a legfelső sor a belső állapotok halmazát tartalmazza, a többi helyen lévő érték a következő diszkrét időpontban (ütemben) létrejövő belső állapotot mutatja. A 2. táblázatban az első oszlop a bemeneti állapotok, a legfelső sor a belső állapotok halmazát tartalmazza, a többi helyen lévő érték egyazon diszkrét időpontban (ütemben) létrejövő kimeneti állapotot mutatja. (Ennek az absztrakt automatának a működése tanulmányozható az elektronikus modellen is.)

Az olyan automatákat, amelyek bármely állapotukat akárhányszor fölvehetik, ciklikus automatáknak nevezik, azokat amelyeknek viszont van olyan állapota amiből csak kiindulni, vagy megérkezni lehet, nem ciklikus (aciklikus) automatáknak nevezik. A keletkező és elmúló tárgyak modelljei nyilván nem ciklikus automaták lehetnek, ha a véges létüket is ábrázolni akarjuk.

δ	a	b	c
x	c	c	b
x'	b	b	a

1. táblázat. Belső állapot táblázat

Az is nyilvánvaló, hogy minden kombinációs struktúrájú automata ciklikus, de ha egy automata nem ciklikus, akkor nem lehet kombinációs struktúrájú, hanem csak sorrendi hálózat. Pontosabb, mélyebb elemzésben a tárgyak mindig sorrendi struktúraként viselkednek, és a diszpozíciós tulajdonságok is inkább sorrendi hálózatként értelmezhetők és nem kombinációs automataként.

A véges automaták mostani felosztása egy lényeges ponton még további finomításra szorul. A kombinációs struktúrájú automaták viszonylag egyszerűen leírhatók lennének a bemenet és kimenet közötti függvénykapcsolat megadásával. A belső állapotok figyelembe vétele kombinációs automaták esetén pusztán azt a filozófiai szempontot hangsúlyozza, hogy ezek is időben működnek.

γ	a	b	c
x	y	y	y'
x'	y	y'	y'

2. táblázat. Kimeneti függvény

Ezzel szemben az automatáknak van egy másik csoportja, a sorrendi hálózatok, melyek működése leírásakor még technikai szempontból sem hagyható figyelmen kívül a belső állapotuk. Ezek ugyanis egy hatásra attól függően válaszolnak, hogy éppen milyen belső állapotban vannak. Vannak olyan sorrendi hálózatok is, melyek egy kiterjesztett értelemben szintén kombinációs struktúrát alkotnak. Ezek működése olyan, hogy a belső állapotuk csak rövid távon befolyásolja működésüket, hosszabb idő eltelte után mindig a bemenetek által egyértelműen meghatározott állapotba kerülnek. Ezért ezek működése ebben a későbbi állandósult állapotban a kombinációs struktúrákhoz hasonlóan leírható pusztán a bemenet és kimenet közötti függvény kapcsolattal.

5. Igazságfüggvények és automaták

Azok a véges automaták, amelyek az elemi logikai függvényeknek felelnek meg kombinációs struktúrák. Többek között ilyenek az ÉS kapu, VAGY kapu valamint az Inverter mint a tagadás megjelenítője. Vizsgáljuk meg részletesen az ÉS kaput. A mostani elemzés kis mértékben eltér attól, amit a logikai tankönyvek a modern logika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatban megemlítenek. Erre azért van szükség, hogy kiemeljem ezen automaták időben működő mivoltát.

δ	a
00	a
01	a
10	a
11	a

3. táblázat. Belső állapotok

Az ÉS kapu az alábbi módon írható le (0=hamis, 1=igaz). Legyen $A = \{a\}$, $X = \{00, 01, 10, 11\}$, $Y = \{0, 1\}$ és δ (belső állapot) valamint γ (kimenet) az alábbi táblázatokkal megadott függvények. Az első a belső állapotokat meghatározó 3. táblázat. A baloldali oszlop a bemeneti állapotok halmaza, a legfelső sorban lévő 'a' jel az egyetlen belső állapotot tartalmazza, a többi helyen lévő értékek a következő diszkrét időpontban létrejövő belső állapotot mutatják. Ez az automata mindig egyazon belső állapotban van, ezért az automata működése megadható lenne belső állapotokra való hivatkozás nélkül is. Az ÉS kapu kimeneti értékeit mutatja a 4. táblázat. Az első oszlop itt is a bemeneti állapotok halmaza, és a legfelső sorban csak egyetlen belső állapot van a, ezért a kimenet független a belső állapottól. A többi helyen lévő 0 vagy 1 érték a következő diszkrét időpontban (ütemben) létrejövő kimeneti állapotot mutatja.

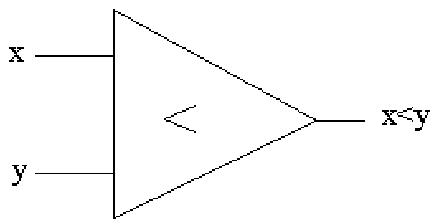
γ	a
00	0
01	0
10	0
11	1

4. táblázat. kimeneti állapotok

Mint a táblázatokból látható, ha az automata magas és alacsony szintű kimeneti állapotát rendre az 'igaz' és 'hamis' logikai értékeknek feleltetjük meg, akkor ezek a gépek fizikai modelljei egy logikai igazságfunktornak, az ÉS kapcsolatnak. Mivel a logikai tagadás és az 'és kapcsolat' modellálható véges automatákkal, és minden igazságfunktor kifejezhető ezzel a két logikai művelettel, ezért minden elemi logikai igazságfunktor modellálható véges automatákkal. (Mindaz, ami Wittgenstein Tractatusa szerint megfogalmazható formális logikai nyelven, véges automatákkal is modellálható, viszont fordítva nem igaz!) Ebből következik, hogy bármely állítás logikai szerkezetét az állításlogika szintjén kifejezi egy izomorf digitális áramkör, ahol a bemenetek a formula atomi állításainak igazságértékei, a kimenet az összetett formula igazságértéke, és a magas és alacsony jelszintnek az 'igaz' és 'hamis' logikai értékek felelnek meg. A digitális áramkör időbeli működése modellálja az állítás atomi összetevőinek egy-egy értékelését. Így egy logikai ellentmondást kifejező 'p & p' struktúrájú állításnak egy olyan áramkör (véges automata) a modellje, amelyik kimenete mindig alacsony szintű. Ezzel szemben egy logikai igazságot kifejező '$\sim p \vee p$' struktúrájú állításnak megfelelő automata kimeneti állapota mindig magas szintű. A 'kondicionális' nevű igazságfunktornak is megfeleltethető egy automata, ezért automatákkal a következmény reláció is vizsgálható. Bonyolult esetekben ez indokolt lehet annak ellenére, hogy a papíron ceruzával történő levezetése egyszerűbb.

Szokásosan csak az igazságfunktorok elméletének szoktak megfeleltetni áramköröket, automatákat, de ez a megfeleltetés tovább is vihető. A funktorok – a hiányos nyelvi kifejezések – automatának is tekinthetők, ahol a bemenetek az argumentumok, míg a kimenet állapota a függvényérték.

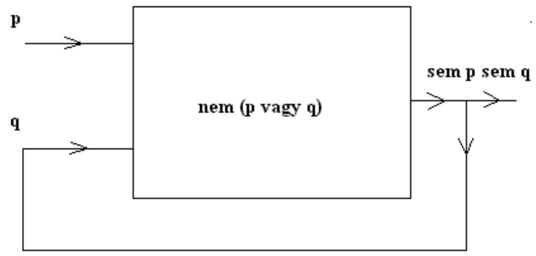
Az 1. ábra egy olyan automatát ábrázol, amelyik kimenete 1 értékű, ha a bemenetei között fennáll egy reláció, és 0 értékű más esetben.



1. ábra. Funktor

A kimenet=1 ha az egyik bemenetre kisebb jel kerül mint a másikra ($x < y$), és a kimenet=0 más esetben. A bemenetek értékei számok. E kétargumentumú predikátum argumentumainak a neki megfelelő véges automata két bemenete, míg az argumentumok szabályos kitöltésével kapott formula igazságértékének az automata kimeneti állapota felel meg.[10]

Nem minden kétállapotú véges automata (logikai áramkör) tekinthető igazságfunktorok anyagi modelljének, ezzel foglalkozom a következőkben. Bemutattam, hogy az igazságfunktorok egyszerűen ábrázolhatók olyan véges automatákkal, amelyeket a digitális elektronikában és automatikában 'logikai kapu'-nak neveznek. Említettem, hogy amit az egyszerű állításlogika képes kifejezni az állítások logikai struktúrájából, azt a neki megfelelő anyagi modell, véges automata is kifejezi úgy, hogy az atomi állítások 'igaz' és 'hamis' szemantikai értékelésének az automata bemeneti állapotai felelnek meg, a kimeneti állapot pedig az összetett állítás igazságértékének. 2. ábrán látható, amihez később nyelvi példát is adok: Kérdés, hogy meddig érvényes ez a megfelelés, ez a hasonlóság. Formulákat igazságfunktorokkal összekapcsolva ismét formulát kapunk. Bár ezekhez a nem atomi formulákhoz is mindig van megfelelő kombinációs automata, utóbbiakkal nem ilyen egyszerű a helyzet. Egy kombinációs automatát egy másikkal összekapcsolva nem mindig kapunk kombinációs automatát, még az is lehet,



2. ábra. Buridan Isten érve

hogy semmiféle automatát – működőképes gépet, áramkört – nem kapunk. Vannak ugyanis olyan igazságfüggvény elemekből felépített automaták, melyek működése nem igazságfüggvény, nem kombinációs automata és kifejezhetetlen az állításlogika keretei között. (Ugyanakkor fejlettebb logikai apparátussal már esetleg leírhatók az ilyen struktúrák.) Egy ilyen véges automata a következő, amihez később nyelvi példát is adok. Amikor a 2. ábrán látható automatának a bemenete magas szintű, akkor a kimenete a következő ütemben mindig alacsony szintű lesz. Ha viszont a bemente alacsony szintű, akkor nincs állandó értéke a kimenetének. Ilyenkor a kimenete fölváltva hol magas, hol alacsony szintű.

δ	0	1
0	1	0
1	0	0

5. táblázat. Belső állapot táblázat

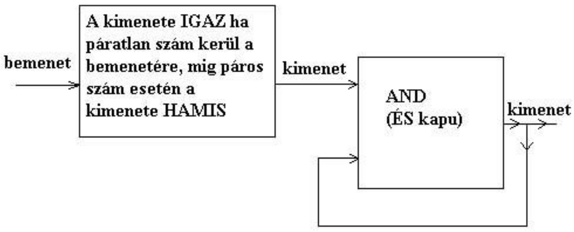
γ	0	1
0	1	0
1	0	0

6. táblázat. Kimeneti függvény

Mint látható a belső állapot működését leíró 5., és a kimenetet megadó 6. táblázat azonos. Ez azért van, mert a kimenet azonos a belső állapottal. Ez az automata nem írható le a belső állapotok megadása nélkül. Alacsony szintű bemenet esetén nincs a kimenetnek állandósult értéke, viszont bármelyik állapotba van átmenet, ezért ez egy ciklikus rendszer. Eltér ettől a 3. ábrán látható nem ciklikus automata.

Táblázatok vagy függvények megadását mellőzve a működése a következő. Az automata bemeneti állapotai páros vagy páratlan számok lehetnek. Mindaddig, amíg páratlan számok kerülnek a bemenetére, addig a kimenete magas (1) szintű, ha viszont csak egyetlen egyszer is páros szám kerül a bemenetére, akkor a kimenete az ellenkezőjére vált (0), és úgy is marad az idők végezetéig. (Később erre is adok egy nyelvi példát.)

Annak a pontos meghatározására, hogy mikor kapcsolhatók össze egymással szabályosan a véges automaták, mit jelent egy ilyen összekapcsolás során a visszacsatolás, továbbá, hogy mi az általános feltétele annak, hogy a



3. ábra. A király mindig igazat mond

kombinációs szerkezetű véges automatákból alkotott újabb automata maga is kombinációs struktúrájú legyen – vagy ha nem is kombinációs struktúrájú, de véges sok ütem után bármely megengedet bemeneti állapotra a belső állapottól függetlenül egyértelműen meghatározott kimeneti állapotot vegyen föl – nem térek ki. Ezek bonyolult matematikai apparátust igénylő kérdések, és mostani célunkhoz elegendő ha ezeket a fogalmakat intuitívan értelmezzük. A minket érdeklő kérdés az, hogy vannak-e olyan dolgok, jelenségek, megnyilatkozások vagy elméletek, amelyek logikai struktúráját a fizikai modell – véges automata, illetve egy digitális rendszer vagy számítógépen futó alkalmazás – ki tudja fejezni, miközben a klasszikus állításkalkulus nem? Miféle dolgoknak lehetnek a modelljei az ilyen sorrendi hálózatok?

6. Nyelvi szintek

Említettem korábban, hogy a mozgás leírása nem mozog. Tegyük föl azonban, hogy a leírás egy olyan elektronikus dokumentum része, amely rövid mozgókép betéteket tartalmaz. Vajon egy ilyen elektronikus dokumentum mozgást tartalmazó része tekinthető-e a mozgás magyarázatának? A papíron még sok más sem szerepelhet. Egy könyv lapjain nem eshet a hó. Ha meg akarjuk magyarázni egy elmélettel a hóesés és egy róla szóló leírás kapcsolatát, akkor valamiképp a hóesést is és a róla szóló leírást is meg kell jelenítsük a papíron, és meg kell adjuk a kettő közötti kapcsolatot is. A hóesést a papíron épp úgy mondatok fogják képviselni, mint a róla szóló beszámolót, bár a két fajta mondat más-más dimenzió polgára. Az első egy időben létező esemény képviselője a papíron, a második a magyarázatok és leírások – az igazság – időn kívüli világának (dimenziójának) a polgára. Ezt a különbséget fejezi ki a Tarski által bevezetett tárgy nyelv-metanyelv megkülönböztetés. A metanyelvi szint jeleníti meg a papíron az eseményeket, folyamatokat – a jelenlét, a mindennapi élet dimenzióját – L_1 tárgynyelv pedig leírja az eseményeket, folyamatokat. Utóbbi atomi mondatai eseményekhez, folyamatokhoz való viszonyát a metanyelv szintjén írjuk le. Az eseményeket, folyamatokat megjelenítő metanyelvi részt L_0-nak nevezem, míg magát a metanyelvet L_2-nek. L_2-nek nyilván része L_0. Az 7. táblázat mutatja, hogy egy egyszerű véges világ és a róla szóló beszámoló miként ábrázolható nyelvi szintek segítségével:

<table>
<tr><td>L_1 nyelven – tárgy nyelvi szinten – állításokat fogalmazunk meg W_1 világról, és egy függvény megadja a nyelv atomi mondat paramétereinek interpretációját, azaz a paraméterek faktuális értékét.</td><td>Metanyelvi szinten L_0 nyelven jelenítjük meg W_1 világot és annak történetét. Ezt a nyelvet nem interpretáljuk formálisan, csak szóbeli magyarázatot fűzünk hozzá. L_0 része L_2 nyelvnek.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Metanyelvi szinten (L_2 nyelv) kapcsolatokat (relációkat) adunk meg L_1 metanyelvi fordítása és L_0 elemei között, és L_1 mondatai neveinek segítségével meghatározzuk az igazság L_1-ben érvényes fogalmát.</td></tr>
</table>

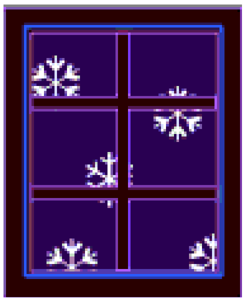
7. táblázat. Tárgy nyelv – metanyelv

„A hó fehér.” mondat – Tarski egyik példamondata – kevéssé szerencsés, mert legalább annyira tudósít a nyelvhasználatról, mint egy tényről. Ennek belátásához elég ha felidézzük azt a mondatot, hogy „Hófehérke bőre olyan fehér volt mint a hó.” Mindenesetre e fizikai jelenséggel kapcsolatos mondat még mindig sokkal alkalmasabb az igazság filozófiai problémájának elemzése céljára, mint egy matematikai állítás. Utóbbi esetben fel sem vethető a nyelv és a nyelven kívüli fizikai világ kapcsolata, amely pedig alapköve egy adekvát igazság teóriának. De követve a hagyományokat, maradok a hónál. Az a mondat, hogy „A hó fehér.” logikai szerkezetét tekintve hasonló az „Esik a hó.” mondathoz, de az utóbbi sokkal inkább tudósít egy nyelven kívüli tényről, ezért ez utóbbi mondatot tekintem példának. Az a meghatározás, hogy:

Az 'Esik a hó.' mondat igaz pontosan akkor, ha esik a hó.

mint metanyelvi mondat mindazt modellálja a nyelv és valóság kapcsolatából, amire a nyelv a holt betűk segítségével képes a papíron a magyarázat és leírás dimenziójában. A baloldalon egy tárgynyelvi mondat neve, míg a jobboldalon annak metanyelvi szintű fordítása található. (Jelen esetben a fordítás megegyezik a tárgynyelvi mondattal.) Utóbbi képviseli a valóságot a magyarázat dimenziójában. Ismét fölvetődik azonban az előző kérdés. Mi a helyzet, ha a hóesést egy mozgó ábra képviseli egy elméletben? Lehet-e az „Esik a hó.” mondat igazságának magyarázata az alábbi metanyelvi „mondat”? Mit állít ekkor a kép? A telet, a hóesést, a csukott ablakot vagy az ablakkeret geometriai formáját? (Interneten nézve hullanak is a hópelyhek (lásd 8. táblázat):

`http://ferenc.andrasek.hu/it-is-snowing.htm`)

Az „Esik a hó.” mondat igaz pontosan akkor, ha 

8. táblázat. Havazik

A hóesést attól függően hogy papírt, vagy elektronikus formátumot választunk közlendőnk megjelenítésére, ábrázolhatjuk rajzzal, fényképpel, szimbolikus ábrával, esetleg mozgó animációval, de a leggyakoribb a természetes nyelv használata erre a célra. Amikor azonban számot akarunk adni a nyelv és az általa leírt valóság kapcsolatáról, akkor a világosság és pontosság igényének jobban megfelel egy olyan közeg, ahol matematikai jellegű kapcsolatot adhatunk meg a magyarázat dimenziójában megjelenő realitás és nyelv kapcsolatáról. Az általánosság igényének is jobban megfelel egy formális nyelv vagy modell használata. Ezért nem helyes az iménti ábrát tartalmazó mondat. A mondat egy logikai kapcsolatot kéne kifejezzen, ahol egy említett mondat egy használt mondat által kifejezett igazság-függvénytől függően beletartozik egy halmazba (igaz), vagy nem tartozik bele (hamis), csakhogy itt egy kép szerepel egy nyelvi kifejezés alkotórészeként, ami értelmetlenség. Azonnal nyilvánvalóvá válik mindez, ha megpróbáljuk fölolvasni, amit látunk. Amit mint látványt itt megértünk, az a szó szoros értelmében kimondhatatlan. Lehetséges azonban más út is a hóesés megjelenítésére, a hóesést modellálhatjuk véges automatával, amit később mutatok be.

Tarski kimutatta, hogy egy olyan kellően erős nyelv, amely megengedi saját mondatainak korlátlan megnevezését, és a nyelven belüli 'igaz' kifejezés használatát és meghatározását a mondat nevek segítségével, szükségképpen ellentmondásra vezet. Ez a veszély akkor is fenyeget, ha az 'igaz' szó helyett olyan más szemantikai kifejezéseket használunk, mint a 'jelöl'. A kivezető út a nyelvek rendekbe sorolása, aminek következtében ezek a veszélyes kifejezések egy nyelvre csak kívülről, egy annál bővebb nyelven, metanyelven fogalmazhatóak meg. Ezzel Tarksi lényegében úgy döntött, hogy metanyelvi szinten – ahol rögzítjük az 'igaz' szó jelentését – az igazság relációt fejez ki, egy adott nyelvre vonatkoztatható tulajdonság. Tehát a parttalan 'x - igaz' tulajdonságot föl kell cseréljük az 'x - igaz L nyelvben' relációval. Egy adott L_1 nyelvre vonatkoztatva természetesen megkapjuk a szokásos beszédmódot, amikor is az 'x - igaz L_1 nyelvben' kifejezés már tulajdonsága L_1 nyelv x nevű mondatainak. Ilyen kifejezéseket azonban L_1 nyelvben magában nem használhatunk. Tekintsük az alábbi meghatározást.

$$\begin{array}{ll} & x \text{ mondat } L_1\text{-igaz pontosan akkor,} \\ (1) & \text{ha } x \; L_1 \text{ egy mondatának a neve-nek és } \Psi(x) \end{array}$$

A jobb oldalon álló '$\Psi(x)$' nyitott mondat az 'igaz' terminus meghatározása L_2 metanyelvben, de az 'igaz' terminus nem lehet alkotórésze Ψ-nek. Tarski kimutatta, hogy némelyik nyelvre definiálható az igazság. Legyen az L_1 nyelvre vonatkozó igazság jele '$igaz_1$' és azt, hogy egy x mondat neve eleme L_1 nyelvnek fejezzük úgy ki, hogy $x \in L_1$. Ekkor az erre a nyelvre vonatkozó igazság fogalma így határozható meg, feltéve hogy meghatározható:[11]

(2) $x \in igaz_1 := x \in L_1$ ÉS $\Psi(x)$

(Ez a formula nagyon hasonlít a ZF halmazelméletből ismeretes részhalmaz axiómához.)[12]

Tarski szerint a tartalmi adekvátság feltétele az, hogy ebből logikailag levezethető legyen L_1 nyelv bármely x nevű mondatára:

(3) $x \in igaz_1 \leftrightarrow \varphi(x)$

Ahol '$\varphi(x)$' az x név által megnevezett mondat maga.

7. Egy igazság definíció

Hogy a feladatot a célnak megfelelően minél egyszerűbbé tegyem és ne foglalkozzam fölösleges technikai részletekkel, fölteszem, hogy az általam vizsgált nyelv (L_1) – a tárgynyelv – nem tartalmaz kvantifikációt, legfeljebb csak mint rövidítést, azaz nem több mint az állításlogika egyszerű nyelve. Egy ilyen nyelv alkalmas egy véges világ leírására. Mivel a mai fizika tanítása szerint a mi világunk épp ilyen, ezért ez a nyelv alkalmas a világ leírására. Az L_1-hez hasonló egyszerű véges univerzumon értelmezett logikai nyelvek a logikusok és matematikusok számára érdektelenek, de a filozófia céljaira megfelelőek, sőt a legmegfelelőbbek. Lehetővé teszik, hogy az igazsággal kapcsolatos filozófiai problémákra, és ne technikai részletekre összpontosítsuk figyelmünket. A feladat ugyanis az 'igazság mint a tényeknek való megfelelés' filozófiai eszméjének pontos megfogalmazása.[13] Bemutatok egy igazság definíciót egy állításlogikára egyszerűsített L_1 nyelven. A megoldás hasonlít Rudolf Carnap állapotleírás elméletéhez.

Legyen L_1 nyelv atomi mondatainak száma véges, és ezek halmazát jelölje A_1. Carnap kutatásai alapján megadhatjuk az elemi tények leírásának szintén véges halmazát, melyet G_1 jelöl. A_1 minden atomi mondata vagy a tagadása – de csak az egyik – eleme G_1-nek, és semmi más nem eleme

G_1-nek. Ha tehát 'p' eleme A_1-nak akkor vagy 'p' vagy '$\sim p$' eleme G_1-nek. Nyilvánvaló, hogy G_1 része L_1 nyelvnek. Legyen p formula neve x – azaz $p \leftrightarrow \varphi(x)$ – és ekkor a $\Psi(x)$ feltétel így is megadható: x szintaktikailag levezethető G_1 - ből. (Bonyolultabb nyelvek esetén ez nem lenne elfogadható, mert az axiómákból való levezethetőség nem meríti ki az igazság fogalmát.) Mivel L_1 nulladrendű nyelv, ezért igaz, hogy benne minden állítás elemi tényállítások igazságfüggvénye, és megadható olyan kalkulus, amellyel az igazak le is vezethetők tetszőleges G_1-ből (a 0-rendű elméletek negációteljesek).[14]

Most azonban más utat fogok követni. Vegyük szemügyre a hóesés példáját. Legyen W_1 egy véges világ, amely egyetlen jellemzőt tartalmaz. Ez a jellemző az, hogy 'havazik', illetve hogy 'tiszta idő van', azaz nem havazik. Feltesszük, hogy egyazon időpontban vagy havazik, vagy tiszta idő van, de a kettő egyszerre nem lehetséges. Viszont előfordulhat, hogy nincs tiszta idő, de nem is havazik. A 'havazás' meglehetősen bonyolult jelenség. Egy pontosabb elemzésben meg kéne különböztessünk közbenső állapotokat, azt az állapotot amikor még csak szállingózik a hó, attól, amikor szakadó hóesés van. Akár mérőskálát is használhatnánk a hóesés leírásához a hóesés intenzitásának értékeihez különféle számokat rendelve. Mostani célunknak azonban az a legegyszerűbb modell is megfelel, amikor csak két állapotot használunk attól függően, hogy havazik vagy sem. W_1 világ egyetlen helyből (vagy megnevezhető objektumból) áll, és ennek a jellemzője a hóesés. Ebben a világban nem is történhet más, mint hogy a benne lévő egyetlen helyen esik a hó, vagy nem esik. Végezetül W_1 története mindössze négy diszkrét időpont, melyet az egyszerűség kedvéért az 't_1,t_2,t_3,t_4' (vastagon szedett alsó indexszel ellátott) betűk ábrázolnak. W_1 világ teljes története a következő: az első időpontban tiszta idő van, a következő két időpontban havazik, végül az utolsó, a negyedik időpontban ismét eláll a havazás és kitisztul az égbolt. W_1 világ tehát térben is időben is véges.

Formális nyelven négy elemi formulával írjuk le W_1 történetét. Legyen 'Δ' az egyedüli térrész jele – mivel egyedüli állapot, el is hagyható – az 't_1,t_2,t_3,t_4' jelek pedig e kicsi véges világ egymást követő időpontjai. Legyen egy 'j' egy kétargumentumú függvény, amely egy dolog és egy időpont összefüggésében azt az állapotot adja meg, hogy azon a helyen akkor havazás van-e vagy tiszta az idő. Ebben a világban szélsőséges az időjárás, átmeneti állapotok nem fordulnak elő. (Mint, említettem egy kicsivel részletesebb példa esetén 'j'-nek három vagy több értéke is lehetne: szakadó hóesés van, szállingózik a hó, nem havazik.) Ezek felhasználásával az W_1 történetét ábrázoló négy elemi esemény így fest:

tiszta-az-idő$=j(t_1, \Delta)$; havazik$=j(t_2, \Delta)$;
havazik$=j(t_3, \Delta)$; tiszta-az-idő$=j(t_4, \Delta)$

W_1 világban – bármilyen kicsi is az – többféle létező van: hely, idő, jellemző. Egy bonyolultabb, több helyből vagy objektumból és több jellemzőből álló véges világ (univerzum) esetén a jellemzők között ennél érdekesebb összefüggések is megadhatók. Ekkor megfogalmazhatnánk természeti törvényszerűségeket is, amelyet szintén W_1 részének, 'létező'-nek fogadnánk el. Azt a nyelvet, amelyen W_1 világot ábrázoljuk, L_0 - nak nevezem. L_0 nyelv fogja modellálni azt a nyelven kívüli világot, amelyről L_1 nyelven állításokat fogalmazunk meg. Később látni fogjuk, hogy L_0 szerepében időben működő véges automata modell – fizikai, anyagi valóság – is megjelenhet, még világosabban mutatva a nyelv és nyelven kívüli világ kapcsolatát. W_1 világba annak történetét is beleértem. A történelem ábrázolása L_0 nyelven csak véges sok kifejezést tartalmaz. Bevezetve azt a kézenfekvő rövidítést, hogy 0=tiszta az idő, 1=havazik, a négy mondat egyszerűbbé válik:

$$L_0 = \{0 = j(t_1, \Delta), 1 = j(t_2, \Delta), 1 = j(t_3, \Delta), 0 = j(t_4, \Delta)\} \tag{4}$$

L_0 úgy is értelmezhető lenne mint egy függvény, egy véges matematikai struktúra, fogalmazás kérdése, hogy nyelvnek nevezem-e. Jelen esetben L_0 nyelv egyetlen kétargumentumú funktort tartalmaz, j-t. A funktor terjedelmébe függvények tartoznak, mely függvény értékei állapotok $(0, 1)$, argumentumába pedig időpont, hely párok kerülhetnek. L_0 esetében semelyik két állapot és időpont nem azonos. L_1 nyelv hat individuumnevet $(t_1, t_2, t_3, t_4, 0, 1)$ egy kétargumentumú predikátumot (H), és a jól ismert logikai konnektívumokat tartalmazza. A predikátum első argumentumába csak a 't_1, t_2, t_3, t_4' jelek, míg a második argumentumába csak a '0' vagy '1' jel kerülhet. L_1 atomi mondatainak halmazát jelölje A_1.

$$\begin{aligned} A_1 = \{&H(t_1, 0), H(t_1, 1), H(t_2, 0), H(t_2, 1), \\ &H(t_3, 0), H(t_3, 1), H(t_4, 0), H(t_4, 1)\} \end{aligned} \tag{5}$$

A szokásos logikai konnektívumok segítségével képezhetünk L_1 atomi mondataiból molekuláris mondatokat. Az atomi mondatok száma véges, de L_1 összes lehetséges kifejezéseinek száma végtelen. A két nyelv, L_0 és L_1 közötti kapcsolatot a metanyelven, L_2-n fogalmazzuk meg. L_2 gazdagabb mindkettőnél, már atomi mondatainak a száma sem véges. Jelen esetben L_2 metanyelv a magyar nyelv egy töredéke, formális szimbólumokkal kiegészítve. $H(x, 0)$ jelentése az, hogy tiszta az idő x-kor, míg $H(x, 1)$ jelentése az, hogy havazik. Figyeljünk föl arra, hogy '$H(x, 0) \,\&\, H(x, 1)$' nem lehet igaz semelyik x-re, mivel egyazon időpontban vagy havazik, vagy tiszta idő van, de a kettő nem fordulhat elő egyszerre. Ezt azonban nem tartalmazza axiómaként L_1 nyelv, ez következménye kell legyen a metanyelven leírt világ azon tulajdonságának, hogy a jellemzők referenciái függvények, melyek értékei egyértelműek.

Legyen adott L_1 nyelv mondatainak az aritmetikai fordítása, a következők szerint: a fordítás L_1 minden mondatához egy egész számot rendel. Legyen Z az egész számok halmaza, A pedig L_1 atomi mondatai halmaza. Legyen f egy A értelmezési tartományú és Z értékkészletű olyan függvény, melyre három feltétel teljesül:

A1 f L_1 minden atomi mondatához egy egész számot rendel, de különböző atomi mondatokhoz különböző számokat rendel.

A2 Ha p atomi mondathoz x szám, a q atomi mondathoz y szám tartozik, és p-nek tagadása (negációja) q, akkor fennáll a következő egyenlőség: $x = -y - 1$

A3 A '$H(x, y)$' atomi mondathoz rendelt $f('H(x, y)')$ szám kettőnél nagyobb prím szám akkor és csak akkor, ha $y = j(x, \Delta)$, ahol x időpontot, y pedig időjárást képvisel.

Az igazságfunktoroknak aritmetikai műveleteket feleltetek meg, és az ennek megfelelően lefordított formulák értékelésekor egész számokat kapunk. Az igazságfunktorok aritmetikai fordításakor csak néhány elemi aritmetikai műveletet használok: összeadás, kivonás, szorzás és a 'modulo' függvényt. Ha egy egész szám kettővel való osztási maradéka nulla, akkor a szám moduló értéke páros, míg minden más esetben a moduló értéke páratlan. Tehát a '$mod(p, 2)$' kifejezés p szám kettővel való osztási maradékát jelöli. A 'p' változó helyén összetett kifejezés is állhat pl: $-1 \times p - 1$ Az alábbi táblázat mutatja az igazságfüggvényeket (logikai funktorokat) egy sorban a nekik megfelelő aritmetikai kifejezéssel.

Igazságfunktorok;az argumentumuk 'p, q' mondatparaméterekkel kitöltve	Magyarázat	Az igazságérték aritmetikai megfelelője, ahol p és q értékei egész számok lehetnek.
$\sim p$	negáció (a tagadás jele)	$mod(-1 \times p - 1, 2)$
$p \& q$	ÉS kapcsolat	$mod(p \times q, 2)$
$p \vee q$	alternáció (megengedő értelmű vagy)	$mod(1 + (p + 1) \times (q + 1), 2)$

9. táblázat. Aritmetikai fordtás

Korábban rögzítettük, hogy W_1 világban az első ütemben nem havazik, majd a következő két ütemben havazik, míg az utolsó időpontban eláll a havazás. Ennek megfelelően egy f függvény – L_1 atomi mondatai egy interpretációja – az alábbi:

Az aritmetikai fordítás L_1 bármely összetett mondatához meghatároz egy egész számot. Ez alapján az igazság definíciója L_1-ben a következő:

L_1 bármely s mondata igaz pontosan akkor,

(6) ha az s-hez tartozó szám páratlan.

Formula	Értékelés	Jelentés
$H(t_1, 0)$	11	Tiszta az idő t_1-kor.
$H(t_1, 1)$	-14	Nem havazik t_1-kor.
$H(t_2, 0)$	-18	Nem tiszta az idő t_2-kor.
$H(t_2, 1)$	19	Havazik t_2-kor.
$H(t_3, 0)$	-24	Nem tiszta az idő t_3-kor.
$H(t_3, 1)$	27	Havazik t_3-kor.
$H(t_4, 0)$	29	Tiszta az idő t_4-kor.
$H(t_4, 1)$	-32	Nem havazik t_4-kor.

10. táblázat. Interpretáció

8. Az igazság elektronikus modellje

Most rátérek mostani vizsgálódásom fő céljára, hogy miképp modellálhatók L_1 mondatai, valamint az azok igazságát meghatározó világ véges automatákkal. Hogyan fordítható le Tarski szemantikai zártságot tiltó követelménye az automata modellek világába? Miképp jelenik meg ebben a modellben egy szemantikailag zárt nyelv lehetősége? Igazolhatja-e az elektronikus modell, hogy egy körben forgó gondolatot nem kell minden esetben elvetni. Ennek az automata modellnek meg kell jeleníteni időbeli eseményeket és az azokat leíró igaz mondatok időtlen – azaz időben állandó – igazságértékét. Ha jó a modell, akkor attól függően, hogy miként fest a valóságot reprezentáló modell, mi történik benne és mi nem, más és más L_1 - beli atomi mondatok lesznek igazak.

Az „Esik a hó." állítás kifejezte esemény érzékelésére valamiféle automata is készíthető, így az általa leírható valóság modellálható automatával. Mint korábban rögzítettem, az eseményeket, folyamatokat, tényeket reprezentáló bemenet nélküli automatákat generátornak nevezem.[15]

Jelen esetben egy generátor magas jelszintje azt ábrázolja, hogy esik a hó, alacsony szintje pedig azt, hogy nem havazik. Az, hogy az automata működése mástól nem függ, nincs bemenete, azt fejezi ki, hogy saját magától függnek a dolgok, maga modellálja ama tényt, hogy esik a hó. Ebben a megközelítésben a metanyelvi mondatok helyén a tényeket vagy dolgokat reprezentáló automaták szerepelnek, azon kívül a róluk szóló, tárgynyelvi állításokat képviselő automaták, és a kettő közötti kapcsolatok. A tényeket képviselő automatákat külön kell választani a róluk szóló állításokat reprezentáló automatáktól. Az utóbbiak igazságértékei, függvényei az előbbieknek. Pontosabban egy tárgynyelvi szinten megfogalmazott atomi állítás igazságát a neki megfeleltetett véges automata magas jelszintje képviseli. Ez a jelszint, a tárgynyelvi állítást reprezentáló automata kimeneti jelszintje, függvénye lesz a metanyelvi állítást reprezentáló véges automatának. Utóbbiak lesznek a tények, avagy a valóság modelljei a leírás világában. A leírás és realitás kapcsolatának filozófiai relációját tehát ábrázolhatjuk és magyarázhatjuk nyelvi szintek fölhasználásával, és véges automaták kapcsolatának bemutatásával is. Ez a két lehetőség azonban bizonyos értelemben csalóka. Csak akkor jelenik meg a maga valóságában, ha ezen magyarázat a kibernetikai tér világában is rendelkezésre áll, mint elektronikus dokumentum. Ugyanis csak az utóbbi képes eseményeket, történéseket, azaz az időt bemutatni, és nem csupán leírni. Egy elektronikus dokumentum megjeleníthet változásokat, míg egy papír alapú dokumentum nem. Az előbbi így bemutathatja a leírás és realitás kapcsolatának vetületét a mindennapi lét dimenziójában, míg az utóbbi, a statikus betűk világa ugyanennek az igazság, a magyarázat dimenziójában való vetületét ábrázolja. Ezért a mostani fejtegetés adekvát létmódja az elektronikus formátum és nem a nyomtatott szöveg. A papíron a véges automaták ugyanis nem mint időben működő dolgok, hanem mint ábrák vagy mint függvények és formulák jelentkeznek.

Az igazság, a magyarázatok dimenziójából kilépve a korábbiakat bemutató automata modell a mellékelt elektronikus dokumentum használatával a jelen időben tanulmányozható. A modellben a különböző nyelvi szinteket egy számolótáblázat egyes munkalapjai (worksheet) különböztetik meg. Ekkor a metanyelvi szint (L0 vagy MetaL) befolyásolhatja a tárgynyelvi szintnek megfelelő munkalap formuláinak értékét (kimenetét), de visszafelé nem megengedett a kapcsolat. A tárgynyelvi szintnek megfelelő munkalapon lévő formulák értékei (kimenetei) nem befolyásolhatják a metanyelvi szintet. Ennek a szabálynak a megsértése paradoxonhoz vezethet, mint azt az elektronikus modell további része be is mutatja. A modell a világos megfogalmazás érdekében fölhasználja az elemi logika korábban fölvázolt aritmetikai transzformációját. Az egyes logikai funktoroknak – melyek faktuális értékei ebben az egyszerű esetben csak a jól ismert igazságfüggvények – a számolótáblázat cellái közötti kapcsolatok felelnek meg. A funktorok argumentuma a számolótáblázat bementi értéke, míg a funktor értéke a kimenet, azaz a számítás eredménye. A modell könnyedén lehetővé teszi, hogy W_1 világ történetét különbözőképpen módosítva megfigyeljük, miképp változik ettől függően L_1 nyelv atomi mondatainak igazságértéke.[16]

Figyeljünk föl arra, hogy miközben a modell világában történnek események, a magyarázatok és leírások világában az igazságérték változatlan, állandó. A példa mutatja, hogy a leírások világának modellje kombinációs struktúra, ezzel szemben a tárgyi világ modellje nem az, hanem sorrendi struktúra. Kérdés azonban, hogy csak és kizárólag kombinációs automaták lehetnek-e a helyes magyarázatok és leírások, a logikailag korrekt elméletek modelljei.

Mostani vizsgálódásunk keretei között egyszerű logikai struktúrájú nyelveket használunk. Ezek formalizálhatók az elemi, kvantifikáció nélküli logika eszköztárával. Az ebben előforduló atomi formulákat igazságfunktorok kötik össze, és az összes igazságfunktor modellálható olyan véges automatákkal, melyeket kombinációs automatáknak neveztem. Ebből következik, hogy ezen szűk határok között megfogalmazható összes L_1 nyelvet használó elmélet és magyarázat is modellálható kombinációs automatákkal. Ezen kívül elfogadható-e bizonyos feltételekkel egy körben forgást tartalmazó elmélet? Ha igen, annak nem kombinációs automata lesz a modellje, hanem sorrendi hálózat. Ésszerű kikötés, hogy az automata legyen ciklikus, és bármely bemeneti állapota egyértelműen határozza meg a kimenet állandósult állapotát.

Tegyük fel, hogy van egy elméletünk melynek modellje egy sorrendi automata. Ez azt jelenti, hogy az elmélet igazságfeltételei nem kombinációs struktúra alapján függnek azoktól a tényektől, amiről az elmélet szól. Ebből az következi, hogy amitől az elmélet tárgyán kívül függ, az a modell, az automata belső állapota. Csakhogy egy elmélet esetén nem kézenfekvő, hogy mit jelenthet a belső állapot. Tárgyak esetén jelentheti a tárgy korábbi történetének lenyomatát, de van-e ennek értelme egy elmélet esetén? Elfogadva azt az automata elméleti föltevést, hogy minden sorrendi automata fölépíthető elemi kombinációs automaták visszacsatolt rendszereként, ha van jelentése az automata modell belső állapotának egy elmélet vonatkozásában, akkor az elmélet igazsága nem csak az elmélet tárgyától, hanem az elmélettől önmagától is függ. Elfogadható-e egy ilyen önigazoló elmélet? Legfeljebb akkor, ha az önigazoló jelleg nem játszik lényeges szerepet, bármennyire is homályos, hogy mi jelent itt a „lényeges szerep". Ha azt jelenti, hogy az elmélet immunis a külső hatásokra, és némelyik esetben nem ad meg egyértelmű igazságértéket, akkor az az elmélet elfogadhatatlan. Ha nem ad meg egyértelmű igazságértéket, az automata modellben úgy jelenik meg, hogy kimenetének állapota (az elmélet igazságértéke) nem konstans függvény az időben. A nem lényeges szerep pedig azt jelentheti, hogy egy elmélet „végső soron" a tényektől függ, önmaga feltételezett igazságától csak átmenetileg. Az automaták nyelvén ez úgy jelenik meg, hogy az elméletnek megfelelő kétállapotú automata kimeneti állapota hosszú távon csak a bemeneti állapotoktól függ, és nem függ az automata belső állapotától. A modell megerősíti azt a filozófiai sejtést, hogy az igazság mindig valami rajta kívül állónak a függvénye, végső soron sohasem függhet önmagától.

9. Talányos mondatok

A mindennapi gondolkodásban gyakoriak az olyan önellentmondó logikai szerkezetű mondatok, hogy „minden általánosítás téves" vagy „minden ismeret bizonytalan". Mivel maguk ezek a mondatok is általánosítások és ismeretek, így ebben a formában aláássák a saját hitelüket. Sok vallás és filozófia is ilyen körbeforgó igazságot állít, és némelykor a tudományos elméletek is magukba foglalják azt a szemléletmódot, igazolási eljárást, amelynek keretei között érvényesek. Polányi Mihály írja: „Az implicit hiedelemrendszerek azért képesek egyenként kivédeni az érvényes ellenvetéseket, mert körben forgók."[17] majd kifejti, hogy ebben az értelemben olykor a tudomány sem mentes az önigazoló jellegtől, a világnézetek pedig egészen nyilvánvalóan védik önmagukat a számukra elfogadhatatlan, az előítéleteiknek ellentmondó hírektől, ismeretektől. A világképek meghatároznak egy látásmódot, sémát a világ értelmezéséről, és megpróbálják csak azokat a benyomásokat, híreket, tudomásul venni, befogadni, amelyek erősítik, tovább építik a meglévő sémát, de legalábbis nem támadják annak alapjait.[18]

A tárgyak és környezetük viszonyához hasonlóan az eszmék világában is működik egyfajta visszacsatoláson alapuló szabályozás. Ezért egyet kell értsünk Polányival és a Duhem-Quine tézissel, hogy a gondolkodásnak van egy bizonyos összefüggő egész, holisztikus jellege. A nyelvi fordulat előtti filozófusok is érzékelték ezt a problémát a saját rendszerükön, amikor látták, hogy az egyes filozófiai problémákat nagyon nehéz, ha nem éppen lehetetlen elkülöníteni egymástól. A körben forgó érvelésnek és szemantikai önreferenciának – a kettő nem azonos – ez a problémája központi jelentőségű minden átfogó filozófiai gondolkodásmód esetén. Ezért ezek a logikai-szemantikai kérdések központi jelentőségűek a filozófia számára. Ezek központi problémája nem egy nehezen kiküszöbölhető ellentmondás. A körben forgó logikájú mondatoknak az a sajátossága, hogy az igazságértékük önmagától is függ, önmaga függvénye. Wittgenstein jól látta ezt a problémát: „Függvény azért nem lehet önmaga argumentuma, mert a függvény jele nem tartalmazza argumentumának prototípusát, márpedig saját magát nem tartalmazhatja. Tételezzük fel példának okáért, hogy az $F(fx)$ függvény önmagának argumentuma lehetne. Úgy lenne egy '$F(F(fx))$' kijelentés is és ebben az F külső függvény és az F belső függvény különböző jelentéssel bírnának, mivel a belső függvény $\varphi(fx)$, a külső függvény $\Psi(\varphi(fx))$ formájú."[19]

Mindazonáltal nem könnyű Wittgenstein érvét megérteni. Egy függvénynek lehet azonos értéke az argumentumában szereplő értékkel. Az a függvény, amely minden számhoz a szám négyzetét rendeli, az 'egy' számhoz az 'egy' számot rendeli, mivel $1^2 = 1$. Még inkább az a függvény, amely minden számhoz önmagát rendeli. Nem arról van tehát szó, hogy nem lehet azonos egy függvény értéke és argumentuma. Amit Wittgenstein állít, az tömören fogalmazva az, hogy a függvény argumentuma más típusú, mint a függvény. Ez arra a függvényre is igaz, amely bármely argumentumához a 'egy' számot rendeli. Vajon ismerte-e Wittgenstein a rekurzív sorozatokat, vagy az automatikában előforduló visszacsatolás problémáit? Ugyanis az eddigi és a további példák egy része épp annak bemutatására szolgál, hogy a 'visszacsatolás' kibernetikai fogalma szorosan kapcsolatos a körben forgás problémájával.

A hazug paradoxont gyakran két olyan mondat segítségével fogalmazzák meg, ahol az egyiket egyvonalas kerettel, a másikat kétvonalas kerettel azonosítják, és a két bekeretezett mondat kölcsönösen egymásra hivatkozik. Ha ez a hivatkozás a mondatok igazságát teszi egymástól függővé egy zárt körben, akkor ezek a mondatok semmit sem mondanak a kettejük alkotta körön kívüli világról. Ez alkotja a két különös mondat alkotta talány lényegét, és az teljesen mellékes, hogy a két mondat egymás igazságát vagy hamisságát állítja. (Az ilyen mondatokat nevezi Kripke nem megalapozottnak.) Alább egy olyan mondatpár szerepel, ahol a mondatok kölcsönösen igazolják egymást.

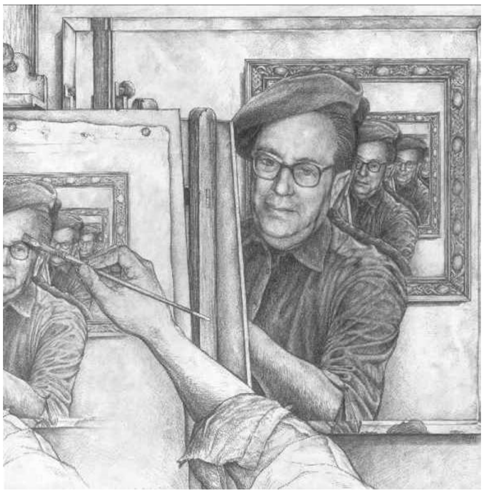
A duplakeretes mondat igaz.	A szimplakeretes mondat igaz.

Ha egy igaz mondatot a valóság hű tükörképének tekintünk, akkor a fenti két mondatnak két egymással szembefordított tükör .felel meg, amit a mellékelt rajz szemléltet, egy fontos eltéréssel. A rajzon azért látható egyáltalán valami, mert a két tükör nincs pontosan egymással szembe fordítva. Ha a keretes mondatok logikájának megfelelően csak és kizárólag egymást tükrözné vissza a két tükör, és semmi sem szivárogna be a külső világból, akkor a két tükörben a sötétségen vagy a világosságon kívül semmi sem látszana. Az igazság mindig valami rajta kívülinek a függvénye, miképp a tükör is csak akkor tükröz, ha kifelé irányul. Ezzel szemben a fenti keretes mondatokat igaznak és hamisnak is tekinthetjük, semmi sem nyújt fogódzót, igazodási pontot. Ha igaznak tekintjük őket, annak megfelel az az eset, amikor a két pontosan egymást tükröző tükörben csak a fényesség látszik, amikor pedig a sötétség, az annak megfelel az, amikor a tükrök közé nem jut be a fény.

10. További példák

1. A hazug paradoxon.

Az elektronikus modellben két munkalap LiarObj. és LiarMeta. foglalkozik az ismert paradoxonnal. Az első a tárgynyelvi, a második a metanyelvi szintet jeleníti meg. A metanyelvi szinten lévő atomata Y_1 kimenete 1 értékű, ha esik a hó a modell piciny véges világában, és $Y_1 = 0$ ha éppen nem havazik. Y_3 a szimplakeretes mondatot, Y_4 a dupla keretes mondatot jelképező automata kimenete. Ezek értéke 1, ha a mondat igaz, 0 ha hamis. A számítógép gombnyomogatására múlik az idő. Hogy mikor havazik és mikor nem, az attól függ, miképp írjuk elő a modell véges világának történetét. Az 'Output Function' nevű táblázat időpontok (t_1, t_2, t_3, t_4) alatti helyekre beírt '0' vagy '1' jelek határozzák meg, hogy mikor havazik és mikor nem. Az alatta lévő sorokban rendre a 'hazug', a szimpla keretes, majd végül a dupla keretes mondat igazságértékének aritmetikai fordítása látható. A 'hazug' értéke $Y_2 = 17$ ha igaz, és $Y_2 = -18$ ha hamis. A szimplakeretes mondat értéke $Y_3 = 19$ ha igaz, és $Y_3 = -20$ ha hamis, a duplakeretes mondat értéke $Y_4 = 23$ ha igaz, $Y_4 = -24$, ha hamis. A tárgynyelvi szintet (a vizsgált nyelvi szintet) képviselő automaták bemeneti értékei a metanyelvi szint kimeneti értékeitől függnek. A 'hazug' tárgynyelvi fordítását képviselő automata kimenete a munkalap C_4 cellája, bemenete az A_4 cella, a szimplakeretes mondat tárgynyelvi fordítását képviselő automata kimenete a munkalap a C_6 cellája, bemenete az A_6 cella, a duplakeretes mondat tárgynyelvi fordítását képviselő automata kimenete a C_8 cella, bemenete az A_8 cella. A cellákba kattintva láthatjuk az összefüggéseket. Ezeket követve láthatjuk, a 'hazug'-nak megfelelő automatának akkor lenne időben konstans kimeneti állapota, ha találnánk olyan egész számot, amelyik páros is és páratlan.



4. ábra. Papp S. Balázs: Tükörben

2. Vegyünk szemügyre néhány másik hasonlóan körben forgó logikai struktúrájú mondatot. Vizsgáljuk meg a középkori francia filozófus, Buridan egyik nevezetes szofizmáját, melynek lényeg a következő.

(1) Isten létezik.

(3) Sem (1) sem (3) mondat nem igaz.

(3) 'vagy-nem' kapcsolatot állít, mivel a 'nem p és nem q' ekvivalens a 'nem (p vagy q)' logikai struktúrával. A vagy-kapcsolat egyik összetevője egy létezési állítás, a másik összetevője pedig a vagy-kapcsolat önmaga. Az előbbit képviselje 'p', az utóbit pedig 'q' formula. Tehát $p =$: Isten létezik, $q =$: Sem az első, sem a második mondat nem igaz. Ezért 'p' igaz ha Isten létezik, hamis más esetben, és 'q' igaz ha sem p sem q nem igaz. Úgy fejezhetjük ki, hogy $|q| = |$ nem $(p$ vagy $q)|$, ahol az azonosság két oldalán formulák igazságértékei (faktuális értékei) szerepelnek. A formula azonban nem fejezi ki eléggé az önmagára való vonatkozás, a körben forgás tényét. Ezt visszacsatolással modelláltam a 2. ábrán bemutatott automata segítségével. Ott az egyik bemenet magas szintű ha Isten létezik, a másikra pedig az automata kimeneti állapota kerül vissza. A vagy-nem logikai funktornak a '$(p + 1) \times (q + 1)$' aritmetikai formula felel meg, aminek helyességét az elektronikus modellben ellenőrizhetjük. A visszacsatolást úgy fogalmazhatjuk meg formulával, hogy a szorzat értéke moduló ekvivalens a szorzat egyik összetevőjével. Legyen ugyanis '$p \equiv q$' kifejezés annak a jele, hogy $mod(p, 2) = mod(q, 2)$, azaz vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan. Ekkor az aritmetikai modell alapján lefordítva Buridan istenérvét az alábbi aritmetikai állítást kapjuk: $q \equiv (p + 1) \times (q + 1)$. Ennek csak akkor van megoldása, ha p páratlan, de q páros. Visszafordítva ezt az

eredményt azt kapjuk, hogy (1) igaz, viszont (3) hamis kell legyen, máskülönben ellentmondásba keveredünk. Pontosan ez derül ki az elektronikus modell kipróbálásával is. Az elektronikus modellben a BurdianObj. és a BurdianMeta. munkalapok tartalmazzák a megfelelő automata modellt. Utóbbiban ábrázoltam egy véges világot. Ebben a világban három jellemző van: az első minden időben állandó $y_1 = 10$ értéke fejezi ki Isten létét, a második $y_2 = TRUE$ ha a (3) nevű mondat igaz, és $y_3 = 1$ ha esik a hó. Ha tagadjuk Isten létét, amit úgy fejezhetünk ki ebben a modellben, hogy t_1, t_2, t_3, t_4 időpontok valamelyikében y_1 értéke nem 10, akkor y_2 jellemzőnek, (3) mondat igazságértékének nincs időben állandó értéke, miközben múlik az idő F9 gomb lenyomására.

3. Vizsgáljuk meg a következő négy mondat igazságértékét.(Kühnberger példái)[20]

János hamburgert eszik, és ez a mondat nem igaz.

János hamburgert eszik, vagy ez a mondat nem igaz.

Ha János hamburgert eszik, akkor ez a mondat nem igaz.

Ha ez a mondat nem igaz, akkor János hamburgert eszik.

A mondatokat zárójelbe tett betűkkel elnevezve az alábbiakat kapjuk:

(a) János hamburgert eszik, és az (a) nevű mondat nem igaz.

(b) János hamburgert eszik, vagy az (b) nevű mondat nem igaz.

(c) Ha János hamburgert eszik, akkor a (c) nevű mondat nem igaz.

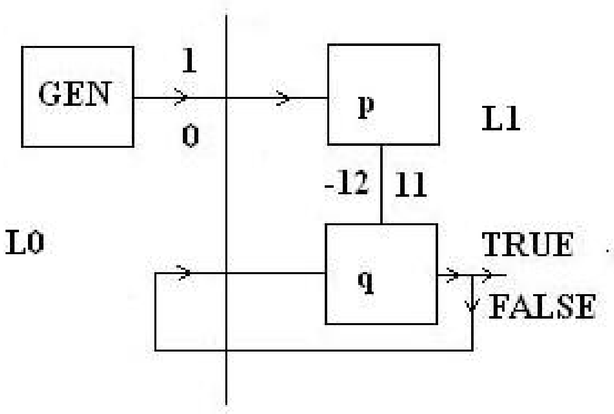
(d) Ha a (d) nevű mondat nem igaz, akkor János hamburgert eszik.

Vezessük be azt az interpretációt, hogy $p :=$ János hamburgert eszik, $q :=$ Ez a mondat nem igaz. A négy mondat háromféle kétváltozós igazságfunktort tartalmaz: ÉS, VAGY, Kondicionális. Eltekintve a négy mondatban előforduló igazságfunktorok egyedi sajátosságaitól, mind a négy esetben egy $p \otimes q$ szerkezetű mondat állít valamit saját magáról. Az első (a) esetben $\otimes := \&$ a másodikban $(b) \otimes := \vee$ a harmadikban $(c) \otimes :=\rightarrow$ a negyedikben $(d) \otimes :=\leftarrow$ Egy táblázattal megkísérelhetjük leírni az igazságfüggvényeket mind a négy esetben. Ez azonban nem fejezi ki 'q' mondat igazságértékének önmagától való függését. Egy $nem - q = p \otimes q$ szerkezetű formula szintén híján van az önmagára utalás képességének, viszont egy visszacsatolást tartalmazó digitális automata képes erre.

p	q	(a)	(b)	(c)	(d)
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

11. táblázat. János Hamburgert eszik

Legyen egy generátor kimenete H értékű, ha János eszik, és más betű, ha nem eszik. A 'p' jelű automata 1 (igaz) szintet ad ki, ha a bemenetére 'H' jel érkezik, és 0 jelet (hamis) máskor. A $\otimes$ jelű automata rendre a fenti igazságfüggényeket valósítja meg úgy, ahogy azt a táblázat mutatja. A $\otimes$ jelű automata egyik bemenetére p-nek a kimenete, a másikra viszont a saját kimenetének tagadása kerül visszacsatolva. Lásd 5. ábra.



5. ábra. János hamburgert eszik

Az elektronikus modell John-0 munkalapja öt jellemző állapotát mutatja. A C_3 cella értéke $= H$ ha János hamburgert eszik, míg más betű, ha nem. Az ötödik, hetedik, kilencedik és tizenegyedik sor arról tájékoztat, hogy az 'ez a mondat nem igaz' mondatot igazra vagy hamisra értékelve, az ellenkezőjére következtetünk. A mondat csak akkor tekinthető állításnak, csak akkor van igazságértéke, ha ez az értékelés az időben konstans eredményt ad. Jelen esetben csak egyetlen tényt változtathatunk szabadon a modellben, a John-0 munkalapon, hogy eszik-e János. Eme tény összes következménye már adódik a feltételekből, amit a John-1 munkalapon ellenőrizhetünk. A következőt tapasztaljuk: (d) mondat mindig igaz, (b) mondat igaz, ha János hamburgert eszik, viszont ekkor (a) és (c) nem rendelkezik állandó értékkel, ha viszont János nem eszik, akkor (a) hamis és (c) igaz, de (b) meghatározatlan, paradox mondat.

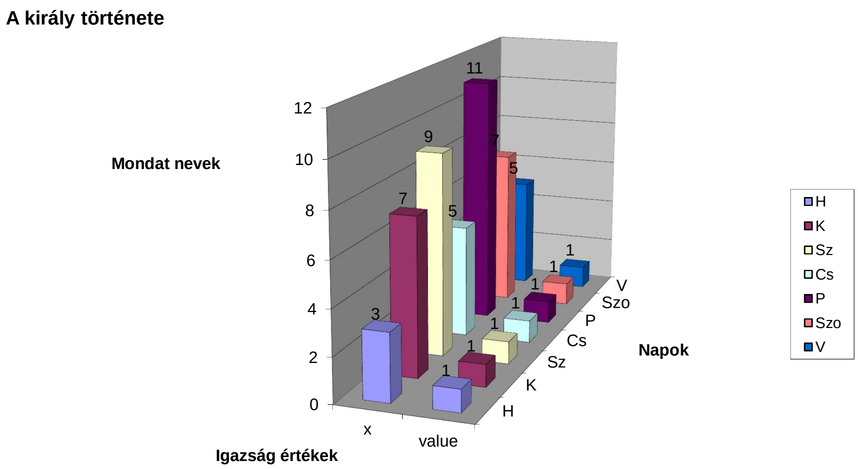
4. A következő példa Kripkétől származik.[21]

Jones csak azt az (a) mondatot állította a Watergate ügyről, miszerint Nixon állításainak a többsége a Watergate ügyről hamis. Nixon viszont azt a (b) mondatot állította, hogy minden amit Jones mond igaz, és még négy másik állítást is tett az ügyről. Vizsgáljuk meg mi az igazságértéke Jones (a) nevű és Nixon (b) nevű mondatainak attól függően, hogy az egykori elnök hány állítása hamis vagy igaz. Az elektronikus táblázat Nixon-0 munkalapja tartalmazza a lehetséges tényeket. Feltételezzük, hogy Nixon 'sentence1, 2, 3 és 4' nevű mondatai igazságértékkel rendelkeznek, és ezek számától függően megvizsgáljuk a következményeket, melyek a Nixon-1 munkalapon láthatók. Ha Nixonnak csak egy vagy kevesebb mondata igaz a négyből, akkor a modell szerint mind (a) mind (b) igaz. Ha viszont Nixonnak csak egyetlen, vagy kevesebb hamis állítása volt, akkor viszont mind (a) és mind (b) hamis. Abban az esetben, amikor fele-fele arányban oszlanak meg Nixon igaz és hamis állításai, akkor sem (a) sem (b) nem bír állandó értékkel, így nem tekinthetők állításnak. Mindezeket bemutatja a modell, melynek az imént írtam le a működését egy alkalmas közlési nyelven. Ez a közlési nyelv az eredeti probléma nyelvi szintjéhez képest meta-metanyelvi szintű, cáfolata Kripke azon véleményének, miszerint a Tarski féle igazság koncepció nem buldogul az ismertetett példával.

5. Különösen érdekes a következő feladvány. Egy király, aki mindössze egy hétig uralkodott, és a hét minden napján csak egyszer, egyetlen állítás erejéig szólalt meg, az ötödik napon a következőt mondta:

A király mindig igazat mond.

A kérdés az, hogy igazat mondott-e vagy hamisat ezzel a mondattal? Tegyük fel, hogy pontosan ismerjük e-király történetét, és így azt is tudjuk, mikor mit mondott. Ebben az esetben időben kiterítve, mintegy négydimenziós térben ábrázolhatjuk az eseményeket. Események lesznek a megszólalások, de nem a megnyilatkozások által kifejezett állítások (propozíciók). Utóbbiak igazságértékei időtlenek. Akkor miképpen ábrázolható a kimondásuk? Nem egyértelmű az sem, miképp értette a király a mondatot. Ha a mondat csak a kimondása előtt és után elhangzott más mondatokra vonatkozik, akkor igazsága nem tartalmaz körbeforgást, és egyértelmű függvénye az eseményeknek. Amennyiben ettől eltérően a mondat önmagára is vonatkozik, akkor sajnálatos módon két választásunk van. Ha a király minden más mondata igaz volt, akkor ezt a mondatot is igaznak tekinthetjük. Vélekedhetünk azonban úgy is, hogy bármit is mondott a király más alkalmakkor, ez a mondata hamis, mert megsért bizonyos logikai elveket. Ha ebben igazunk van, akkor legalább egyszer hamisat mondott a király, és így ez a tény önmagát is alátámasztja. A megoldás vázlatát a korábbi 3. ábra, a további részleteket az elektronikus modell king0 és king1 munkalapja ábrázolja. A második a tárgynyelvi szintnek megfelelő automata, míg az első (king0 munkalap) a metanyelvi szint. Ennek az 'output function' nevű táblázat meséli el a király történetét, hogy melyik nap mit mondott. A táblázat nem magukat a mondatokat, hanem a mondatok neveit tartalmazza. A mondatok nevei az egyszerűség kedvéért számok. A számokat olyan módon választottam meg, hogy az igazaknak páratlan számok, míg a hamisaknak páros számok felelnek meg. A harmadik sorban lévő 'value' érték ezt ábrázolja. Ha a pénteki nap kivételével megváltoztatjuk a király valamelyik nap mondott mondatát, azaz



6. ábra. A király története

egy más számot írunk a második sorba, akkor megváltozhat az igazságérték is. Próbáljuk ki, de a pénteki nap értékét ne módosítsuk, mert a pénteken elhangzott mondat jelentése rögzített. Ez a mondat tárgynyelvi szinten, a king1 munkalapon található, és a pénteki megnyilatkozáshoz tartozó cella értéke ide mutat. Figyeljük meg, ha csak egyszer hamisságot adunk a király szájába, örökre megváltozik annak a mondatnak az igazságértéke, hogy 'A király mindig igazat mond.' Ezen mondat értéke 11, ha igaz, -12 ha hamis. A tárgynyelvi (king1 munkalap) szinten lévő E2 cella értéke mutatja 'A király mindig igazat mond' mondat igazságértékét. A cellába kattintva láthatjuk az összefüggéseket. A 'mindig' azt jelenti, hogy uralkodása hetének mind a hét napján. Figyeljük meg, hogy ha valamelyik nap hamisat mondott a király, akkor utána nem tudjuk meg nem történtté tenni ezen esemény hatását. Hiába változtatjuk vissza a modellben pl. a hétfőn mondott mondatot igazra, a metanyelvi szinten megjelenő automata kimenete többé nem lesz igaz. Egyedül az egész táblázat újra kinyitása segít, mintegy újra indítva a modellt. A 6. ábrán egy színes grafikont is találunk. Ennek egyik dimenziója ábrázolja a király napjainak idejét, és a napokon elhangzott mondatokat, míg a másik, vízszintes dimenzióban a mondatok időtlen igazságértékeit láthatjuk (1=igaz, 0=hamis).

11. Összefoglalás

Egy körben forgó logikai szerkezetű mondat esetén három feladatot kell megoldani:

(a) Leírni a jelenséget. Ez természetes nyelven könnyen sikerülhet, és számos megoldás van a probléma tárgyalására a fuzzy halmazoktól a kvantummechanikáig.[22] Én arra tettem javaslatot, hogy a problémát ne formulákkal, hanem működő modellekkel írjuk le. Ilyen modell lehet egy fizikailag létező digitális áramkör, vagy egy elektronikus dokumentum is.

(b) Feltárni, hogy mi a baj ezzel a mondattal.

(c) Javaslatot tenni a hasonló problémák elkerülésére.

A most vizsgált talányos mondatokat csak szemantikailag zárt nyelven lehet megfogalmazni. Ezért ha elkerüljük a szemantikailag zárt nyelvek használatát, akkor nem fenyeget az ilyen típusú paradoxonok réme.[23] Az a kérdés azonban nyitva marad, hogy miért nem. Megkíséreltem megmagyarázni a jelenséget a probléma átfogalmazásával a véges automata modellek segítségével. Azt állítottam, hogy a körbeforgó logikai szerkezetű mondat nem állítás, hanem egy jelenség, és ezért az időben modellálható olyan módon, amilyen módon sok más időbeli jelenség is modellálható. Erre alkalmasak a véges automaták vagy a nekik megfelelő digitális áramkörök, illetve az ezeket szimuláló számítógépes programok. Ezekkel:

(1) Le lehet adekvát módon írni egy körbeforgó logikai szerkezetű mondatot.

(2) Lehet egy magyarázatot adni arra, hogy miért hiba ha egy gondolat körbeforgó? A hiba a mindennapi és az igazság dimenzió egybemosása.

(3) Bármilyen véges bonyolult mondat halmazról, amelyik modellálható véges automatával, véges sok lépésben el lehet dönteni, hogy tartalmaz-e körbeforgó logikai szerkezetű mondatot.

Ezzel nem a szemantikai paradoxonok univerzális elkerülésre tettem javaslatot. Elsődleges célom a leírás, modellálás, annak a megjelenítése, hogy gondolatok, mondatok egy véges halmaza körkörös logikai kapcsolatot tartalmaz. Ha a javasolt modell kimutatja, hogy a mondatok egy halmaza adott tulajdonságú, akkor a mondatok bizonyosan körben forgóak, de nem állítom, hogy minden hibát képes kimutatni. Meglehet, hogy adott esetben a mondatoknak az az elemzése, amire a véges automata modell képes, nem elégséges. Ugyanakkor a véges automata modellekkel világosan ki lehet mutatni, hogy a szemantikailag zárt nyelv lehetősége olyan automatáknak felel meg, amelyek nem kombinációs struktúrájúak, és adott esetben nincs állandó kimeneti állapotuk. Elképzelhető, hogy a szemantikai zártságot megengedő nyelvek vagy elméletek helyes mondatainak olyan sorrendi hálózatok felelnek meg, melyeknek kimeneti állapota az állandósult állapotban csak a bemeneti állapotoktól függ, a belső állapottól nem. Ezzel szemben a hibás mondatoknak megfelelő automatáknak nincs minden bemenetre állandósult állapota, vagy ha van, az nem mindig függvénye a bementi állapotoknak. Hasonlóan ahhoz, amit Kai-Uwe Kühnberger sejtet, miszerint egy elfogadhatatlan körbeforgó logikai szerkezetű mondat nem alakítható át jólfundált formára.[24]

Jegyzetek

[1]Tanulmányom korábbi változata megjelent az E-tudomány elektronikus folyóirat 2009/2 számában.

[2]Ez a követelmény a halmazelmélet széles körben használt Zermelo-Freankel féle fölépítésében azt garantálja, hogy egy halmaz nem eleme önmagának, vagy két halmaz nem eleme kölcsönösen egymásnak. A halmazelmélet ilyen fölépítését a továbbiakban 'ZF'-el jelölöm. Peter Aczel kidolgozott egy olyan halmazelméletet, amely nem tiltja a halmazok önmagára való körkörös hivatkozását.

[3]Kai-Uwe Kühnberger „Formal frameworks for circular phenomena" (Possibilities of Modeling Pathological Expressions in Formal and Natural Languages) Philosophische Dissertation, Universität Tübingen - 20.07.2001, Osnabrück - 2002. Letölthető az Internetről erről a címről:
`http://w210.ub.uni-tuebingen.de/dbt/volltexte/2002/477/pdf/Diss11.pdf`

[4]Ezért a kiegészítésért köszönettel tartozom Máté Andrásnak.

[5]V.ö: Roman Witold Ingarden, Time and Modes of Being. (ford. Helen R. Michejda) Springfield, Illinois: Charles C. Thomas, 1964. Amie Thomasson írja: „Most traditional category systems, such as Aristotle's, lay out a single dimension of categories supposed to be mutually exclusive and exhaustive. Ingarden, by contrast, develops a multi-dimensional category scheme by dividing ontology into three parts: formal, material and existential ontologies, corresponding to three distinct aspects that may be discerned in any entity (its formal structure, material nature, and mode of being respectively). . . . The ideal mode of being is a timeless mode of existence suitable for platonistically conceived numbers; the real mode of being is that of contingent spatio-temporal entities such as the realist assumes ordinary rocks and trees to be . . . " Thomasson, Amie, „Roman Ingarden", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2004 Edition), Edward N. Zalta (ed.)
`http://plato.stanford.edu/archives/spr2004/entries/ingarden/`

[6]John L. Austin, Tetten ért szavak. ford. Pléh Csaba (1990) Akadémiai, Bp. 113.o.

[7]Platón, Az állam. ford. Szabó Miklós, in Platón összes művei, Bp., Európa, 1984. 523a – 525b

[8]A kérdésről részletesebben lásd: Szűcs Ervin, Hasonlóság és modell, Műszaki K., Bp. 1972.

[9]Bagyinszki János, Véges automaták (Ádám András és Katona Gyula előadásai alapján), (1972) Az MTA Matematikai Kutató Intézete „A számítástechnika alapjai" c. tanfolyamának jegyzete. Bp. bevezetés IX.o. A példa is ebből a könyvből való.

[10]Részletesen foglalkoztam ezzel „Szemantikai gépek" c. 1985-ben írt kéziratomban. Ilyen értelemben tekinti a funktorok argumentumait gépek bemenetének Ruzsa Imre is a Bevezetés a modern logikába c. könyvében. (2000) Osiris,Bp. p.22.

[11]Lásd ezzel kapcsolatban angolul: Hodges, Wilfrid, „Tarski's Truth Definitions", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2001 Edition), Edward N. Zalta (ed.),

http://plato.stanford.edu/archives/win2001/entries/tarski-truth/
Magyar nyelven: Sós Vilmos: Modern igazságelméletek. Bp.,Gondolat,1978.

[12]v.ö. ezzel kapcsolatban az „On the Paradox of the Adder" The Reasoner 5/3, March 2011 c. írásomat.

[13] Erre utalt Karl Popper is. „Legyünk merészek, és vegyük komolyan, hogy vannak állítások, melyek megfelelnek a tényeknek. Bármely elméletnek, amely erről szólni kíván, tudnia kell beszélni (1) valamely nyelv - amelyet a vizsgált nyelvnek vagy tárgynyelvnek mondunk - állításairól és a (2) tényekről és feltételezett tényekről.

- Hogy állításokról beszélhessünk, rendelkeznünk kell nevekkel az állítások számára, pl. az állítások idézetneveivel vagy deskriptív neveivel. Ez azt jelenti, hogy bármely korrspondencia elméletet metanyelven kell megfogalmazni, vagyis egy olyan nyelven, amelyen beszélhetünk a kutatásunk tárgyát képező tárgynyelv kifejezéseiről.
- Hogy az állítások és a tények közötti relációkról is beszélhessünk, tények leírására is szükségünk van; azaz a tárgy nyelven leírható összes ténynek leírhatónak kell lennie metanyelvünkben is. Ily módon a metanyelvnek tartalmaznia kell a tárgy nyelvi kifejezések fordításait, vagy a tárgy nyelvet saját részként kell tartalmaznia (elkerülve ezáltal a hű fordítások létének kényes problematikáját). Így azt találjuk, hogy bármely elmélet, amely állítások és tények közötti korrespondenciával és ennélfogva állítások és tények közötti relációkkal foglalkozik, olyan metanyelven kell megfogalmazni, mely a szokásos logikai szavakon kívül három típusú kifejezéseket tartalmaz:

1. Állítások neveit, tehát valamely tárgynyelv nyelvi kifejezéseinek megnevezéseit: ezek részei a tárgynyelv 'morfológiájának' vagy 'szintaxisának'.
2. Tényeket (beleértve a nem tényeket) és körülményeket leíró állításokat: vagyis fordításokat a tárgynyelvből a metanyelvbe. (Hogy a fordítás buktatóit elkerüljük, a tárgynyelv, mint már utaltunk rá, beemelhető a metanyelvbe.)
3. Ezen a két alapvető kifejezéstípuson kívül van egy harmadik is: azon magasabb rendű kifejezések típusa, melyek e két alapvető kifejezéstípus predikátumait és a köztük lévő relációkat jelölik, pl. olyan predikátumok, mint 'X megfelel a tényeknek', vagy olyan relációk, mint 'X akkor és csak akkor felel meg a tényeknek, ha Y'.

Ez a három, csaknem nyilvánvaló minimálkövetelmény egy olyan nyelvvel szemben, amelyen egy korrespondenciaelméletet akarunk megfogalmazni." Karl R. Popper, Some Philosophical Comments on Tarski's Theory of Truth. In: Proceedings of the Tarski Symposium (ed. by L. Henkin and others), American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974, 397-409. Fordította: Pólos László. In: Alfred Tarki, Bizonyítás és igazság - válogatott tanulmányok (1990) Gondolat, Bp. 423.o.

[14]Máté András megjegyzése.

[15]Valaminek függvényekkel való ábrázolása egy folyamat vagy esemény, míg mondatokkal való megfogalmazása egy tény. A tények lehetnek logikai operátorokkal – és, vagy, ha-akkor – összetettek, ezzel szemben az események, folyamatok nem lehetnek ilyen módon összetettek.

[16]A számolótáblázatban az 'Object L' munkalapon lévő '$H(x, y)$' formula kiszámítására szolgáló kifejezés több részből áll. Központi része a $H(x, y)$ relációt valósítja meg, ahol a függvény argumentumában csak a meghatározott négy időpont jele (t_1, t_2, t_3, t_4) állhat. Ez a rész az alábbi:
$HLOOKUP(\$A\$28,'ObjectL'!\$I\$10 : \$L\$11, 2, FALSE)$
majd megvizsgálja, hogy a függvény értéke azonos-e a reláció megfelelő tagjával:
$B28 = (HLOOKUP(\$A\$28,'ObjectL'!\$I\$10 : \$L\$11, 2, FALSE)$
végül azt is ellenőrzi, hogy a $H(x, y)$ reláció második argumentumában megengedett

érték $(0,1)$ van e. Ilyen módon a $H(x,y)$ relációnak csak akkor lesz igazságértéke, ha argumentumaiba megengedett értéket írunk, ellenkező esetben hibajelzést kapunk.

[17]Polányi Mihály, Személyes tudás (Personal knowledge). ford. Papp Mária, Atlantisz kiadó, Bp., 1994, II. 77p.

[18]„...minden kritikai bölcsészettörténet írója a maga filozófiai álláspontjából meríti ama kiválogatás elvét, mely szerint némely tanítást fontosnak tart másokkal szemben s bizonyos megállapításokat haladás jeleinek tekint. Teljesen félreértené tehát a bölcsészettörténet midenlétét, aki művünk történei vázlataiban épp a 'filozófiai előítéletet' kifogásolná." írja Pauler Ákos, Bevezetés a filozófiába (reprint kiadás) Bp., Paulus Hungarus-Kairosz, 67.o.

[19]Ludwig Wittgenstein, Logikai filozófiai értekezés. Akadémiai, Bp.,1963. Ford. Márkus György, 3.332, 3.333

[20]Kühnberger i.m. 15.o.

[21]Saul Kripke, „Outline of a Theory of Truth" in Martin, Robert L. eds. : Recent Essays on Truth and the Liar Paradox (1984) Oxford University Press, New York

[22]A paradoxon újabb megközelítéseit ismerteti Szabó Zoltán „Paradoxon vagy antinómia?" in. Tertium non datur (Válogatott logikai-metodológiai tanulmányok 1984-1990) (2000) Osiris, Bp. 212-230 o. Első megjelenés: Tertium non datur, 5 (1988), 77-88 o. ; angolul J. Barwise and J. Etchemendy, The Liar. An Essay on Truth and Circularity, Cambridge 1987, CSLI Lecture Notes.

[23]Nevezetes tanulmányában Tarski így fogalmaz: „ ...nem létezhet olyan ellentmondásmentes nyelv, amelyre érvényesek a logika szokásos törvényei, és amely emellett kielégíti a következő feltételeket: (I) tetszőleges mondat mellett, amely a nyelvben előfordul, az illető mondatnak egy bizonyos egyedi neve is hozzátartozik a nyelvhez; (II) minden olyan kifejezést, amely úgy keletkezik, hogy »x igaz akkor és csak akkor ha p.«-ben a 'p' szimbólumot a nyelv tetszőleges mondatával, az 'x' szimbólumot pedig az illető mondat valamely egyedi nevével helyettesítjük, a nyelv igaz mondatának kell elfogadnunk; (III) a szóban forgó nyelvben megfogalmazható és igaznak elfogadható egy empirikusan megalapozott és α-val azonos jelentésű premissza." (Ahol α: 'c nem igaz mondat' azonos c-vel.) Tarski „Az igazság fogalma a formalizált nyelvekben" (ford. Máté András és Ruzsa Imre) in: Bizonyítás és igazság, Gondolat, Budapest. 1990. 73. o.

[24]„Conjecture 2.6.1 A circular entity is pathological if it does not allow an appropriate representation that is well-founded in the mathematical sense of wellfoundedness." Kühnberger i.m. 41. o.