

A nyíl paradoxonról

Felfigyeltem egy könyv fülszövegére (ami valójában a hátlapján van): „Talán meglepően hangzik, de a filozófusok is szerszámokkal dolgoznak. Persze nem vésővel vagy Excel-táblázatokkal, hanem jóval kifinomultabb eszközökkel: egyedi, csak rájuk jellemző gondolkodásmóddal és megközelítési módszerekkel, amelyek megtanulhatók, és az élet minden területén alkalmazhatók. ...”¹ Hát ez igazán érdekes, mert én épp ellenkezőleg úgy gondolom, hogy több filozófiai kérdéskört is nagyon jól lehet illusztrálni Excel táblázatokkal, bár az Excel táblázatok használata és megértése épp úgy ügyességet igényel, mint mondjuk a vésőé.

A könyv jó, bár nem felel meg teljesen a kitűzött céljának. Érdekes lett volna szót ejtenie a szerzőnek a középkori skolasztikusok vita kultúrájáról, arról, hogy pl. Aquinói Szent Tamás hogyan érvel, hogy miképpen tárgyalja a teológiai-filozófiai kérdéseket, vagy Descartes kapcsán felsorolni legalább a módszerről szóló értekezés négy szabályát, Wittgenstein kapcsán pedig megemlíteni a matematikai logika alkalmazását, és esetleg Carnappal is foglalkozni. Láthatóan a szerzőnek megvan a tehetsége arra, hogy bonyolult kérdéseket közérthetően tárgyaljon, így ezek nem jelentettek volna számára megoldhatatlan feladatot. Több helyesírási vagy fogalmazási hiba is van a könyvben, szerencsére nem nagyon zavaróak. Van egy tartalmi bökkenő is, amit azért kifogásolok, mert pl. Sainsbury a nagyközönségnek írt Paradoxonok c. könyvében szintén foglalkozik Zénón nyíl paradoxonjával, de ő kevésbé növeli tovább a zűrzavart. Most Fearn nyíl paradoxon megoldásával fogok foglalkozni.

„Mihelyt eljutottunk egy valódi – azaz per definitionem tovább nem osztható – pillanathoz, akkor az idő olyan törtrésznél vagyunk, amelyikben nem történhet mozgás. Ez azonban azt jelenti, hogy sosem mozoghat a nyílvesző, mivel a nem mozgások összegéből nem lehet mozgás. Mivel a nyílvesző röppályájának egyetlen pontján sem mozog, ezért az egész röppályáján sem mozog. A nyílparadoxonnal a legkönnyebb elbánni az itt felsoroltak közül. A mozgáshoz időre van szükség, így tehát nem meglepő, hogy az időt kiiktatva inkább pillanatokról beszélünk, azzal a mozgást is eltüntetjük. Jóllehet a nyílvesző esetleg egyetlen

adott időpillanatban sem mozog, még mindig mozoghat, ha a mozgást valamely dolog más helyen, később felbukkanó látszatként határozzuk meg.”²

A fenti gondolatmenet elhamarkodott. A gondolatmenet összekever két kérdést, összekeveri azt amit tudhatunk, azzal, ami van. Jelen esetben két kérdés merül fel:

(1) Mit tudhatunk akkor, amikor az idő tovább nem osztható tört részénél, egy pillanatnál vagyunk? Tudhadjuk-e hogy a nyíl áll, avagy mozog?

(2) Mozoghat vagy állhat-e egy tárgy, jelen esetben a nyíl, az idő tovább nem osztható tört részénél? Figyeljünk föl arra, hogy az álló helyzet épp úgy kérdés, mint a mozgás.

Gondoljunk egy pattogó labdára. A labda folyamatosan mozog, de periódikusan egy pillanatra megáll, amikor a földről visszapattan.

Térjünk vissza az idézethez, vizsgáljuk meg Fearn érvét. Kezdjük a végén. Ha a nyílvesző egyetlen időpillanatban sem mozog, akkor látszatként miért és hogyan mozogna, és miképpen megoldása ez a mozgás problémájának? Miképp értsük ebben az esetben a látszatot? A látszatot a valósággal szembeállítva szokták értelmezni. Pl. látszólag eltört a bot, ez azonban optikai csalódás, valójában a bot továbbra is egyenes. A bűvész látszólag kettéfűrészelte a nőt, de valójában mégsem, mert lám mosolyogva kiszáll a ládából. Ennek alapján így okoskodhatunk: látszólag mozog a nyíl, valójában mégsem mozog, hanem végig egyazon helyen van. Ez úgy történhet meg, hogy a nyílvesző egy asztalon fekszik, és mi autóban ülve elgördülünk az asztal előtt, de úgy érzékeljük, hogy mi állunk, és az asztalon lévő nyílvesző halad. Vajon ez megoldja a mozgó nyíl rejtélyét? Olyan módon oldja meg, hogy most helyette az autó mozog, annak mozgását kéne megmagyarázzuk. Valójában tehát nem oldotta meg a problémát, csak tovább tolt. Úgy tűnik Zénón valóban ellentmondást talált a mozgás fogalmában, de nézzük meg ezt közelebbről.

Tegyük fel, hogy a nyíl mozog, amely feltevésünket (1)-el jelölöm, és a csillag arra utal, hogy ez pusztán feltevés, nem pedig logikai igazság. Az újabb és újabb feltevéseket újabb csillag oszloppal jelölöm. A jobboldali zárójelbe tett szám azt mutatja, hogy miből következik a mondat.

- * (1) A nyíl t_1 időpillanatban mozog.
- ** (2) A nyíl minden t időpillanatban a pálya meghatározott s helyén van.
- ** (3) A nyíl t_1 időpillanatban s_1 helyen van. (2)
- *** (4) Ha a nyíl mozog, akkor egy időtartományban van.
- *** (5) Ha egy nyíl nem idő tartományban van, akkor nem mozog. (4)
- **** (6) Egy időpillanat soha nem egy idő tartomány.
- **** (7) A t_1 időpillanat nem időtartomány (6)
- **** (8) A nyíl t_1 időpillanatban nem időtartományban van. (7)
- **** (9) A nyíl t_1 időpillanatban nem mozog. (5) (8)
- **** (10) A nyíl t_1 időpillanatban mozog és a nyíl t_1 időpillanatban nem mozog. (1) (9)

Mivel t_1 időpillanat tetszőleges volt, bármely időpillanatra nézve ellentmondásra jutunk. Ellentmondásra jutottunk, tehát egy vagy több kiinduló föltevést – premisszát – el kell vessünk. Melyiket válasszuk? Vegyük sorra a csillaggal megjelölt új sorokat, azaz a premisszáinkat, melyeket most római számokkal jelöltem:

- (I.) A nyíl t_1 időpillanatban mozog.
- (II.) A nyíl minden t időpillanatban a pálya meghatározott s helyén van.
- (III.) Ha a nyíl mozog, akkor egy időtartományban mozog.
- (IV.) Egy időpillanat soha nem egy idő tartomány.

Az utolsó premissza cáfolhatatlannak tűnik. Miért? Azért mert az időpillanat egy már tovább nem osztható valami, az időtartomány viszont folytonos időt feltételezve, mindig tovább osztható. Valami tehát vagy időpillanat, vagy időtartomány. Ez azonban nem zárja ki, hogy egy időtartomány időpillanatokból áll, csak a fogalmi különbségre utal. Diszkrét időt feltételezve a legrövidebb időtartomány két egymást követő időpillanat, folytonos időt feltételezve viszont nem értelmezhető a valamely időpontra rákövetkező időpillanat. (Ne keverjük össze a folytonosat a folyamattal. Utóbbi mind folytonos mind diszkrét időben értelmezhető.)

A második premissza is megingathatatlanak tűnik. Ha a nyíl pályáját valamely s függvény írja le az időben, akkor a függvény argumentum értékeire értelmezve van a függvény értéke, tehát minden t időpontra van olyan y , hogy $y=s(t)$.

A helyzet tehát a következő:

vagy (I) –et kell elveszük, és akkor Zénónnak igaza van, vagy (III.)-kell elveszük, ekkor Newton követői vagyunk. Vizsgáljuk meg közelebbről mit is állít (III.) Valójában azt állítja, hogy ha a nyíl t_1 időpillanatban s_1 helyen van, akkor a nyíl áll. Mielőtt ezt matematikai szempontból megvizsgáljuk, vizsgáljuk meg egy szemléletes példával. Az alábbi két ábra közül az egyik a t_1 helyen álló, a másik a t_1 helyen mozgó nyílt ábrázolja. Meg tudjuk-e mondani, hogy melyik a kettő közül a mozgó nyíl ábrája, a balra, vagy a jobbra mutató nyíl?



Nem tudjuk, mert azt sem tudjuk megmondani, hogy melyik ábrázolja az állót.³ A probléma a következő. Egy pillanat alatt a nyíl semennyit sem tud előrehaladni, csak hogy ebből mégsem következik, hogy abban a pillanatban a nyíl sebessége nulla. Ez ellentmond a józan észnek, mégis igaz. Miképpen látható ez be? Kétféleképpen is elmondom. Elmondom általános iskolai ismereteket, és elmondom középiskolás ismereteket föltételezve is.

Elemi iskolai tananyag, hogy: út = sebesség * idő. Ez így azért nem elég pontos, pontosabban így fest: a nyíl által megtett út = a nyíl sebessége * az eltelt idő. Képlettel: $s = v * t$. Zénón abból, hogy $s=0$ arra következtetett, hogy akkor $v=0$, azaz a nyíl áll. Ez azonban hibás következtetés, mert ez csak az egyik lehetőség, a másik lehetőség az, hogy az eltelt idő, azaz $t=0$ és a sebesség viszont nem nulla. Ezért téves volt a következtetése, de Zénón sem az ilyen formulákat, sem a sebesség fogalmát nem ismerte, így neki nem róható föl a tévedés.

Középiskolás fokon még precízebben és általánosabban fogalmazhatunk. A nyíl helyét minden időpillanatban megadja az s út-idő függvény egy T időtartományban, de mi írja le a sebességét? Feltéve, hogy a nyíl út-idő függvénye T időtartomány minden pillanatában differenciálható, a nyíl sebességét az s függvény s' derivált függvénye írja le T időtartományban. A derivált függvény ekkor minden időpillanatban megadja a nyíl sebességét, legalábbis a newtoni fizika szerint. Tehát igenis értelmezhető a nyíl sebessége minden időpillanatban, nem csak egy időtartományban. A nyílnak van sebessége minden időpillanatban, és a nyíl akkor áll valamely t időpillanatban, ha a sebesség függvény értéke abban a t időpillanatban nulla, mozog más esetben. Amikor pl. a nyílvessző visszapattan, akkor egy pillanatra megáll, hasonlóan egy pattogó labdához. Ugyanakkor amennyiben csak egyetlen időpontban ismerjük a nyíl helyét, az alapján nem tudjuk meghatározni a pályáját leíró függvényt, és így a sebesség függvényét sem. Ha csak egyetlen hely-időpont értéket ismerünk, az alapján nem határozható meg a függvény abban a pontban lévő differenciál

hányadosa, mivel nem meghatározható az ahhoz a függvény értékhez tartozó érintő. Ha nem határozható meg az érintő, akkor a sebesség sem határozható meg, azaz nem tudjuk, hogy a nyíl áll vagy mozog. Ezért nem tudunk a fenti két ábra között választani.⁴

Richard Mark Sainsbury a paradoxonokról írt népszerű könyvében szintén említi a nyíl paradoxont.⁵ Bemutatja a probléma megoldását Newton szellemében, számára azonban ez nem „a megoldás”, hanem csak egy a lehetséges megoldások közül, azaz csak egy vélemény. Szerintem téved, a klasszikus fizika megoldása elől ebben a kérdésben lehetetlen kitérni. Gondoljuk végig a következőket a nyíl példájánál maradva. A jobb oldali zárójelbe tett számok mutatják hogy miből következik a sor, mellette az szerepel, hogy milyen megfontolások alapján. A példa általánosítható.

* (1) A nyíl minden t időpillanatban van valahol.

* (2) A nyílnak minden t időpillanatban van $s(t)$ helye. (1)józan ész

* (3) Létezik a nyíl s út-idő függvénye. (2)matematika

** (4) Tegyük fel hogy a nyíl út-idő függvénye minden időpillanatban differenciálható. Ez a második premissza a klasszikus fizika föltevése

** (5) Létezik a nyíl sebességét leíró s' derivált függvény. (4)matematika

** (6) A nyílnak minden t időpillanatban meghatározott az $s'(t)$ sebessége, amelyik lehet nulla, vagy nem nulla; azaz minden időpillanatban létezik a nyíl sebessége. (5)fizika

(7) Ha a nyíl minden t időpillanatban van valahol, és az út-idő függvénye deriválható, akkor abból, hogy valamely t_1 időpillanatra $a=s'(t_1)$ nem következik, hogy $0=s'(t_1)$. (1) (4)

A newtoni fizika megoldása csak akkor vitatható, csak akkor pusztán egy a lehetséges megoldási javaslatok közül, ha vitatható, hogy a nyíl minden t időpillanatban van valahol vagy az út-idő függvénye deriválható. Utóbbi kérdésben a fizika kompetens, a filozófia illetékességi köre arra korlátozódik, hogy a nyíl minden t időpillanatban van valahol. Megkérdőjelezhető-e ez utóbbi álláspont? Úgy gondolom nem, és ezért a klasszikus fizika megoldása sem kérdőjelezhető meg.⁶

Mindebből az következik, hogy a nyíl paradoxon nem bizonyítja a mozgás ellentmondásos mivoltát, és föltéve, hogy az ellentmondásos fogalmak terjedelme üres, nem cáfolja meg a mozgás tulajdonságának létét. Ha valami rejtély a mozgással kapcsolatban, akkor az, hogy több mint háromszáz évvel Newton után miért ismételteti ezt sok kortárs filozófus?

1 Fearn Nicholas, Zénón és a teknősbéka - Avagy hogyan gondolkodjunk úgy, mint egy filozófus? (2011) Bp., Akadémiai Kiadó

2 Fearn, u.o. p.37. Sokan úgy vélik Zénón antinómiái máig megoldatlanok, még ELTE TTK szakos hallgató is: http://hps.elte.hu/tdk/dogak/bognarg_doga.pdf

3 Az illegális Beszélőben jelent „Pomádé király új ruhája” címmel egy írásom, melyben szerepel ez a példa a mozgás ellentmondásos mivoltát cáfolandó. Újra nyomva a Beszélő összkiadásban 1987-1989 (1992) AB-Beszélő Kiadó, III. pp.127-136

4 Ruzsa Imre szerint Zénón a tér és idő atomos szerkezetének föltevéséből a mozgás lehetlenségére következtet. Csakhogy az ellentmondás levezetésekor nem hivatkoztunk az idő vagy a tér folytonos vagy diszkrét (atomos) természetére. A lényeg abban van amit később ír: „Tehát abból, hogy 'a P pont a t időpontban a tér (x,y,z) koordinátájú pontjában van', a P pont nyugalmi vagy mozgási állapotára nem lehet következni,” A matematika néhány filozófiai problémájáról (1966) Bp., Tankönyvkiadó p.66.,67. Az akkoriban kötelező marxista tanítás szerint „Zénón a mozgás objektíve meglévő ellentmondását fejezi ki: mozogni annyi, mint valahol lenni, és ugyanakkor nem ott lenni.” Kellett bizonyos bátorság, egy mégoly eldugott helyen is, a kötelező dogmát tagadni. Bertrand Russell számos helyen foglalkozott Zénón aporiáival, és gyakran megváltoztatta álláspontját. Egy helyütt ezt írta: "a given instant, it is where it is ... but we cannot say that it is at rest at the instant." Our Knowledge of the External World (1914) Hogy pontosan mit gondolt Zénón, azt természetesen senki sem tudja, mivel nem maradtak fenn írásai, sem azok másolatai.

5 Richard Mark Sainsbury, Paradoxonok. (2012) Bp.,Typotext, p.25.

6 A kérdéshez semmi köze nincsen, hogy klasszikus analízisben vagy non standard analízisben gondolkozunk, a derivált függvény mindkét esetben létezik és azonos. V.ö. ezzel kapcsolatban Benedek András: Válasz Zénónnak? in. Tudomány és történet szerk: Forrai Gábor – Margitay Tihamér, Typotex, Bp. 2002. Több kortárs magyar filozófus, mint a mai napig megoldatlan nehéz problémát emlegeti Zénón aporiáját.